MATEMÁTICA

PDE | GESTAR II

PROGRAMA GESTÃO
DA APRENDIZAGEM ESCOLAR

Acesse www.mec.gov.br ou ligue 0800 616161

FNDE

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA NAS FORMAS GEOMÉTRICAS E NA ECOLOGIA – TP3

GESTAR II

PDE | GESTAR II

PROGRAMA GESTÃO
DA APRENDIZAGEM ESCOLAR

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA NAS FORMAS GEOMÉTRICAS E NA ECOLOGIA

TP3

CADERNO DE TEORIA E PRÁTICA

Presidência da República

Ministério da Educação

Secretaria Executiva

Secretaria de Educação Básica

PROGRAMA GESTÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR
GESTAR II

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DOS ANOS/SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

MATEMÁTICA

CADERNO DE TEORIA E PRÁTICA 3

MATEMÁTICA NAS FORMAS GEOMÉTRICAS E NA ECOLOGIA

Diretoria de Políticas de Formação, Materiais Didáticos e de Tecnologias para a Educação Básica
Coordenação Geral de Formação de Professores

Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II

Matemática

Organizador
Cristiano Alberto Muniz

Autores
Ana Lúcia Braz Dias - TP2, TP3 e TP5
Doutora em Matemática
Universidade de Indiana

Celso de Oliveira Faria - TP2, TP4, TP5, AAA1, AAA2 e AAA3
Mestre em Educação
Universidade Federal de Goiás/UFG

Cristiano Alberto Muniz - TP1 e TP4
Doutor em Ciência da Educação
Universidade Paris XIII
Professor Adjunto - Educação Matemática
Universidade de Brasília/UnB

Nilza Eigenheer Bertoni - TP1, TP3, TP4, TP5 e TP6
Mestre em Matemática
Universidade de Brasília/UnB

Regina da Silva Pina Neves - AAA4, AAA5 e AAA6
Mestre em Educação
Universidade de Brasília/UnB

Sinval Braga de Freitas - TP6
Mestre em Matemática
Universidade de Brasília/UnB

Guias e Manuais

Autores
Elciene de Oliveira Diniz Barbosa
Especialização em Língua Portuguesa
Universidade Salgado de Oliveira/UNIVERSO

Lúcia Helena Cavasin Zabotto Pulino
Doutora em Filosofia
Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP
Professora Adjunta - Instituto de Psicologia
Universidade de Brasília/UnB

Paola Maluceli Lins
Mestre em Lingüística
Universidade Federal de Pernambuco/UFPE

Ilustrações
Francisco Régis e Tatiana Rivoire

DISTRIBUIÇÃO
SEB - Secretaria de Educação Básica
Esplanada dos Ministérios, Bloco L, 5o Andar, Sala 500
CEP: 70047-900 - Brasília-DF - Brasil

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Centro de Informação e Biblioteca em Educação (CIBEC)

Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II. Matemática: Caderno de Teoria e Prática 3 - TP3: matemática nas formas geométricas e na ecologia. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.

250 p.: il.

1. Programa Gestão da Aprendizagem Escolar. 2. Matemática. 3. Formação de Professores. I. Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica.

CDU 371.13

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA

PROGRAMA GESTÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR
GESTAR II

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DOS ANOS/SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

MATEMÁTICA

CADERNO DE TEORIA E PRÁTICA 3

MATEMÁTICA NAS FORMAS GEOMÉTRICAS E NA ECOLOGIA

BRASÍLIA
2008

Sumário

PARTE II

PARTE III

Apresentação

Caro Professor, cara Professora:

Ao iniciar este módulo é importante que você tenha uma visão mais ampla da proposta de Matemática, como estão estruturados os módulos em unidades e estes em seções. É necessário, caro professor, que você vá se situando, momento a momento, nos diferentes estágios e circunstâncias da proposta.

Primeiro reconhecimento que você fará é que a matemática se apresenta na proposta impregnada em diferentes aspectos da vida real e em situações significativas. Um segundo reconhecimento imediato é da provocação do desenvolvimento dessa visão de matemática junto aos seus alunos.

Este trabalho foi elaborado, com carinho e muita dedicação, pensando em você, nos seus interesses, nas suas necessidades e nas suas dúvidas e facilidades. A idéia central que conduziu a produção da equipe foi, a todo momento, que tipo de proposta levar a você que possa ser de real valor para ajudá-lo a melhor desenvolver seu trabalho pedagógico em matemática nas séries finais do ensino fundamental.

Sem dúvida, trata-se de uma proposta muito abrangente quando vemos que se destina a professores de diferentes regiões do nosso Brasil. Por isso, foi importante nossa vivência com formação de professores, nos mais diferentes espaços geográficos, para que a proposta se aproxime o máximo possível dos seus interesses e necessidades.

Pensar na qualidade do trabalho pedagógico em sala de aula em Matemática requereu num duplo pensamento: de um lado, no próprio fazer matemático do professor, ou seja, o quanto de matemática e que tipo de matemática precisamos saber para desenvolvermos um bom trabalho; de outro lado, no fazer pedagógico, do como trabalhar a matemática com nossos alunos.

Essa preocupação fez com que a proposta fosse estruturada a partir de três eixos:

– Conhecimentos matemáticos: um convite ao "fazer matemático".

– Conhecimentos de Educação Matemática: um convite à leituras, reflexões e discussões acerca do tema.

– Transposição Didática, que implica conhecimentos para a sala de aula.

Cada caderno será composto de 4 unidades, sendo que em cada unidade você encontrará conhecimentos relacionados aos três eixos.

Os **conhecimentos matemáticos para você**, professor do GESTAR, serão desenvolvidos em dois momentos:

A – Na seção 1 de cada unidade, ao vivenciar a resolução de uma situação-problema como uma estratégia para mobilizar conhecimentos matemáticos já conhecidos ou buscar outros que emergem naturalmente no contexto.

B – Na seção 2, pela construção de conhecimentos matemáticos em ação, na qual, a partir da situação-problema da seção 1, procuraremos buscar e elaborar procedimentos e conceitos matemáticos envolvidos.

Os **conhecimentos matemáticos para os alunos** serão desenvolvidos na seção 3. Educar envolve muito mais que preparar uma boa aula, estruturar atividades e apresentar um conteúdo de forma organizada. Você, professor, precisa estar "afiado" também em outros aspectos da Educação Matemática: o "contrato didático", as novas dimensões do currículo, o papel das interações dos alunos entre si e com o professor em sua aprendizagem...

São estes assuntos que compõem o segundo eixo de estruturamento dos módulos de matemática do GESTAR, o eixo "**Conhecimentos de Educação Matemática**", e sobre os quais vamos conversar em dois espaços:

A – No Texto de Referência que aparece ao final de cada unidade e

B – Em pequenos textos que podem surgir nas seções 2 e 3, que aparecem em quadros com o título "Aprendendo sobre Educação Matemática".

Nestes dois espaços você vai encontrar estes assuntos sistematizados textualmente. Mas esperamos que você aprenda sobre educação matemática também na prática, ao longo de toda a unidade. Como se dará isto?

Ao iniciarmos cada Unidade com uma situação-problema, já estamos fazendo que você vivencie um novo modo de aprender matemática, a partir de situações do mundo real e que, para sua solução, requerem a busca e a construção de conhecimentos matemáticos. Essa busca e construção ocorrem, portanto, a partir de necessidades geradas por uma situação real, e não impostas dentro de uma concepção linear de currículo.

Ou seja, os módulos do GESTAR fazem uso de teorias de Educação Matemática para ajudá-lo a crescer em sua relação com a matemática e no modo como você a utiliza em sua vida. Vivendo, na prática, um processo de Educação Matemática, e aprendendo mais sobre essa área do conhecimento nos quadros e no Texto de Referência, você poderá entender e ajudar a construir a Educação Matemática de seus alunos.

Os conhecimentos relativos ao terceiro eixo de estruturação dos módulos, a **Transposição Didática**, aparecem sempre na seção 3. Ela visa a ajudá-lo a conhecer e produzir situações didáticas que facilitem o desenvolvimento, em sala de aula, de conhecimentos matemáticos vistos nas seções 1 e 2.

Portanto, as seções 1 e 2 são voltadas para o **seu** processo de Educação Matemática. A seção 3 procura ajudá-lo em um dos aspectos da Educação Matemática **de seus alunos**: o modo como você poderá fazer, em sala de aula, a Transposição Didática, dos conteúdos matemáticos que você trabalhou nas seções 1 e 2.

Nós quatro esperamos fielmente que este caderno provoque momentos de dúvidas, desafios, aventuras e, acima de tudo, alegria e satisfação diante da oportunidade de expandir seus limites realizando novas e interessantes aprendizagens. Um bom trabalho e até breve!

Ana Lúcia, Celso, Cristiano e Nilza

PARTE I

TEORIA E PRÁTICA 3

- Unidade 9
- Unidade 10
- Unidade 11
- Unidade 12

GESTAR TP3

GESTAR II

TP3 - Matemática

Caro amigo professor,

Iniciamos agora o TP 3 e, com ele, a última parte do Módulo 1 do GESTAR de 5ª a 8ª série.

Um dos conteúdos que apresentam mais problemas na aprendizagem da matemática é o da Geometria. Nesse TP, você fará um mergulho total nesse assunto, explorando o universo das formas geométricas, planas ou não, nas unidades 9 e 10. O mundo em que vivemos, principalmente nas cidades, é feito de formas geométricas – elas estão nas casas, nos espaços urbanos, nas obras de engenharia, nas artes, na disposição escolhida para os móveis, em pequenas reformas que organizamos em nossos lares. Nessas unidades, vamos trabalhar com situações do contexto real – o planejamento de uma piscina e, depois, o seu revestimento com ladrilhos. Você se envolverá com a construção de maquetes e com o revestimento de superfícies planas por meio de polígonos e o preenchimento do espaço por meio de poliedros. Trabalharemos também com a semelhança de figuras, planas ou não.

O tema central das unidades 11 e 12 é a Ecologia. Você fará uma pesquisa para verificar qual é o nível de consciência ecológica de algumas pessoas e se elas agem de forma ecologicamente correta. Depois você examinará como essas variáveis se relacionam. Isso possibilitará introduzir de uma maneira viva e significativa os conceitos, centrais em Matemática, de variável e de função. Esses conceitos estão presentes em inúmeras situações do mundo real e também em outras áreas científicas.

Na Unidade 11, o foco estará em representar e interpretar a interdependência entre duas variáveis por meio de três representações: gráficos, tabelas e fórmulas.

A Unidade 12 continua o estudo sobre funções, pensando nos aspectos de crescimento, decrescimento, taxa de crescimento ou de decrescimento.

As unidades terminam com Textos de Referência, que aprofundam os seus conhecimentos sobre Educação Matemática e lhe permitem enriquecer sua prática pedagógica. São os seguintes:

- Aprender e ensinar Geometria: um desafio permanente;
- Teoria das situações didáticas;
- A história da matemática no seu ensino;
- O professor de matemática pesquisador.

Mais uma vez, estamos torcendo para que você continue essa jornada com disposição e que ela lhe propicie, ao lado dos esforços, muita alegria e progressos.

Unidade 9

O universo das formas

Nilza Eigenheer Bertoni

Iniciando a nossa conversa

Pare e procure lembrar-se: alguma unidade já tratou de objetos geométricos e de medidas? Qual foi? Na Unidade 1 do TP1, por exemplo, que trabalhou com alimentação, foram explorados conceitos de área e de volume. Na Unidade 5 do TP 2, você estudou a área das principais figuras planas. Na Oficina da Unidade 3 do TP1, você montou um fractal não plano para explorar frações e porcentagens. Isso sempre ocorre com a geometria – ela se articula com outras áreas da Matemática, ampliando a possibilidade de resolver problemas.

Todavia, esta é a primeira unidade em que o objetivo central é o estudo de figuras planas e não planas.

Nossa exploração dos aspectos geométricos estará associada à exploração do espaço e ao desenvolvimento da percepção visual.

Como dissemos, devemos considerar também a natureza interligada da Matemática, o que exige freqüentemente, na abordagem de uma situação, o uso simultâneo de noções geométricas, métricas, algébricas, aritméticas.

Essa perspectiva também estará dominando nossos estudos de geometria: os fatos geométricos surgem associados a outras áreas da Matemática e poderemos, aos poucos, destacá-los e investigá-los melhor.

Outro fato que cabe lembrar é o de que muitas escolas e cidades realizam feiras de ciências que têm estimulado os alunos a desenvolverem formas geométricas criativas, a fazerem desenhos e cálculos para poder realizá-las. Quem sabe esta unidade poderá lhe dar idéias sobre isso?

Esta unidade está organizada em três seções:

1. Resolução de uma situação-problema
A resolução da situação-problema desta unidade envolve a construção de uma piscina e constitui-se em um caminho para a aprendizagem dos conceitos de representação plana, visualização e capacidade.

2. Conhecimento matemático em ação
Nesta seção, você verá como, partindo de uma situação significativa que foi a construção de uma piscina, surgirá a necessidade de conhecimentos matemáticos relacionados a figuras geométricas planas ou não planas e suas dimensões, cálculo de volumes e de superfícies. Você poderá mobilizar conhecimentos que já tem, aprofundar esses conhecimentos e construir outros relacionados também à construção de maquetes e ao preenchimento do plano e do espaço por meio de formas geométricas.

3 - Transposição Didática
Esta seção discute problemas relacionados ao ensino-aprendizagem de conceitos vistos nas seções 1 e 2, sugerindo ações para a sala de aula.

Como as outras unidades, esta também conterá um Texto de Referência sobre Educação Matemática, cujo título é Aprender e Ensinar Geometria: um desafio permanente.

Definindo o nosso percurso

O objetivo geral da unidade é conhecer, identificar e representar figuras geométricas planas e não planas, com o intuito de usá-las na resolução de problemas e de saber desenvolvê-las junto aos alunos.

Explicitando, esperamos que você possa, ao longo desta unidade:

1 – Com relação aos seus conhecimentos matemáticos:

Vivenciar a resolução de uma situação-problema envolvendo figuras geométricas planas e não planas, como uma estratégia para mobilizar conhecimentos e desenvolver habilidades relacionadas a:

– identificação de poliedros e prismas;

– cálculo de volume e áreas;

– identificação da dimensão de figuras geométricas.

Esses conhecimentos serão desenvolvidos nas seções 1 e 2.

2 – Com relação aos seus conhecimentos sobre Educação Matemática:

– Rever a importância de situações-problema, na seção 1;

– Caracterizar o fazer matemático do aluno, na seção 3;

– Identificar o sentido de Aprender e Ensinar Geometria, no Texto de Referência.

3 – Com relação à sua atuação em sala de aula:

– Conhecer e produzir, com relação às figuras geométricas, situações didáticas adequadas à série em que atua.

Esse objetivo será tratado na seção 3.

Seção 1

Resolução de situação-problema: criando, visualizando, representando e medindo um modelo de piscina

Objetivo da seção

- Representar uma forma tridimensional por meio de maquetes e desenhos, com vistas à resolução de uma situação-problema.
- Representar objetos não planos no plano.
- Visualizar objetos a partir de sua representação plana.
- Estimar a capacidade de recipientes e de formas geométricas ocas.

Integrando a matemática ao mundo real

Reconhecendo as formas geométricas à nossa volta e construindo seu conhecimento

Provavelmente você já observou que, desde muito cedo, as crianças têm noções intuitivas sobre espaço. Bebês que engatinham vão de um ponto em direção a um brinquedo, aprendem a passar atrás de um sofá e a reaparecer, tentam subir em obstáculos que encontram. Mais ainda: os primeiros contatos exploratórios da criança com o mundo ocorrem sem a ajuda da linguagem e constituem–se em experiências sucessivas: tácteis - envolvendo a boca, a mão, o corpo, e motoras - em movimentos de pegar, mexer, orientar seu olhar e seu corpo. Deslocamentos e o sentido de orientação fazem parte dessa aprendizagem e constituem-se em temas relevantes no estudo da geometria.

Além disso, muitas informações chegam do meio ambiente e penetram no cérebro através do *sistema visual*. As crianças vêem os objetos que querem agarrar, os obstáculos que devem contornar, a diferença de nível que exige um esforço de subida. É importante que você, professor, reflita sobre a importância de experiências visuais, tácteis, motoras e outras na construção do conhecimento geométrico, incorporando-as às suas atividades em sala de aula.

Falando em experiências visuais, um simples olhar voltado para o ambiente onde estamos, seja ele interior ou espaço aberto, traz-nos inúmeras informações sobre formas do espaço, planas e não planas. Manusear livros de História também nos mostra como formas geométricas foram sempre usadas nas construções humanas.

Ilustração 1 - construção maia (1), egípcia (2) e grega (3)

Atualmente, formas geométricas inovadoras são cada vez mais usadas na arquitetura ou em esculturas decorativas. Existem algumas em sua cidade?

Exemplos bem conhecidos são vistos na arquitetura de Brasília.

Ilustração 2 - escultura de Tomie Ohtake em frente ao Hotel Blue Tree em Brasília

Ilustração 3 - arquitetura na baía de Sydney

Durante a Olimpíada realizada em Sydney, na Austrália, apareceu várias vezes na televisão o edifício da ópera, localizado na baía dessa cidade, chamando atenção de todos pelo arrojo das formas.

Recentemente, dois exemplos radicais de arquitetura são o *Complexo Ohtake Cultural*, em São Paulo, e o *Museu Guggenheim*, em Bilbao, na Espanha.

Existem vários museus Guggenheim no mundo, em grande parte financiados pela fundação Solomon Guggenheim, que pesquisa, coleciona, preserva e apresenta obras de arte moderna e contemporânea. O de Bilbao ficou famoso por sua arquitetura incomum.

Veja na Espanha a localização de Bilbao e fotos do edifício do museu.

Ilustração 4 - mapa da Espanha, com a localização de Bilbao. Fotos externas do Museu de Bilbao

Fotos: Daniela Eigenheer

Outro edifício muito comentado foi o do Complexo Ohtake Cultural, inaugurado no ano de 2001. Veja um pouco da história da família Ohtake.

Tomie Ohtake é uma artista plástica nascida no Japão, que vive no Brasil desde 1936. Durante anos foi apenas uma dona de casa, começando a pintar aos 39 anos. Mas, segundo ela, *sua cabeça sempre pintava*. Com 88 anos, ela é muito ativa e inaugura muitas obras novas, em todo o Brasil.

Ruy e Ricardo são seus filhos, ambos arquitetos famosos. Ruy concebeu o projeto e Ricardo pensou na divisão interna do Ohtake Cultural – sede da empresa Aché, mas que contém outros escritórios e firmas e abriga também o Instituto Tomie Ohtake, um espaço de arte que os filhos fizeram em homenagem à mãe.

Ilustração 5 - Ohtake Cultural

Também na arte aparecem formas geométricas.

No Brasil, um pintor famoso pela influência da geometria em sua obra é Hércules Barsotti, cujo nome já pertence à história da arte no Brasil. Ele é considerado rigorosamente um pintor abstrato geométrico e foi ligado a um movimento artístico denominado neoconcretismo, que teve origem na década de 50 do século passado e que incluiu também pintores como Amílcar de Castro, Franz Weissmann, Aluísio Carvão, Lygia Clark e Hélio Oiticica. Na seção Arte da revista "Isto É" de 22 de maio de 1996[1], Olívio Tavares de Araújo afirma que:

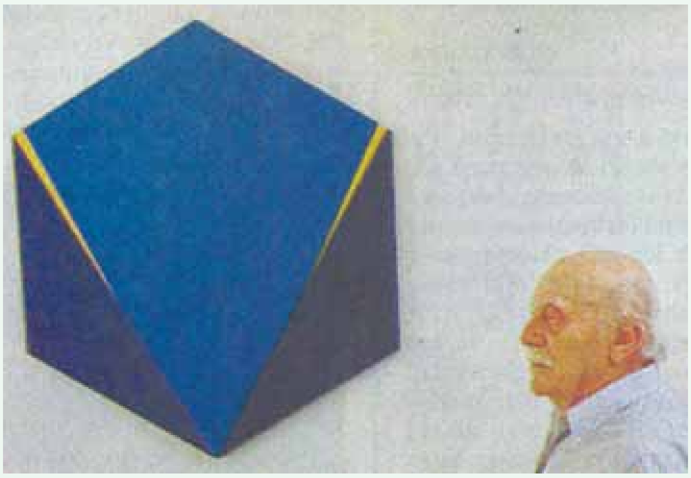


Ilustração 6 - Barsotti e um de seus quadros

"Durante muitos anos, os quadros de Barsotti tinham o formato de um quadrado visto na diagonal. Ultimamente, podem ter também formatos de círculos, triângulos, losangos, pentágonos e hexágonos. Juntos, os nomes de tantas formas geométricas podem fazer pensar em matemática, frieza ou aridez. A pintura de Barsotti é exatamente o oposto. Feita, como ele mesmo reconhece, "por um processo mais emocional que intelectual", sua grande qualidade não é ilustrar idéias nem provar teses, mas sim gerar um prazer requintado e inteligente. No ato de criar, os artistas se valem, mesmo, da intuição".

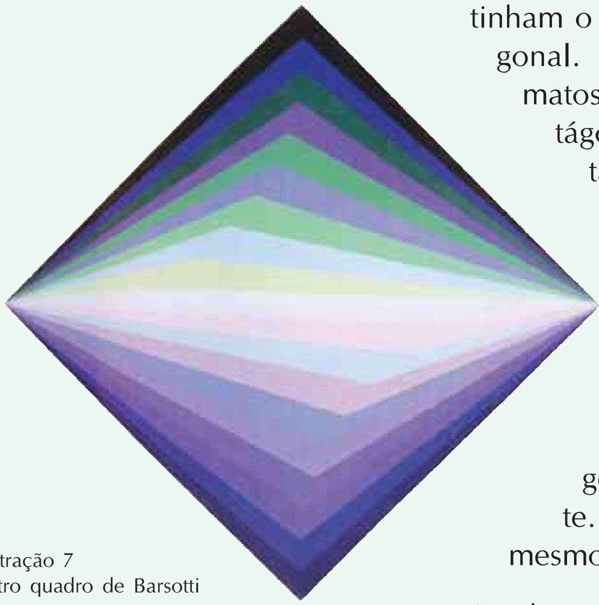
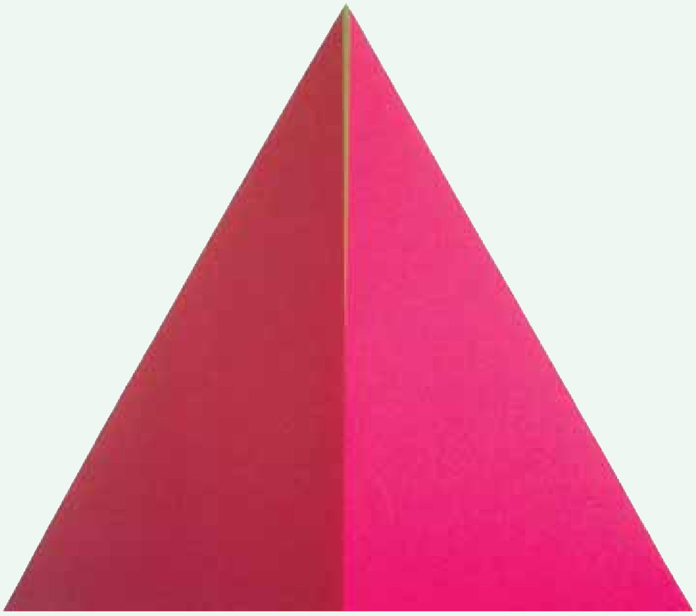


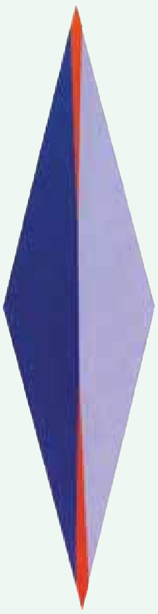
Ilustração 7
Outro quadro de Barsotti

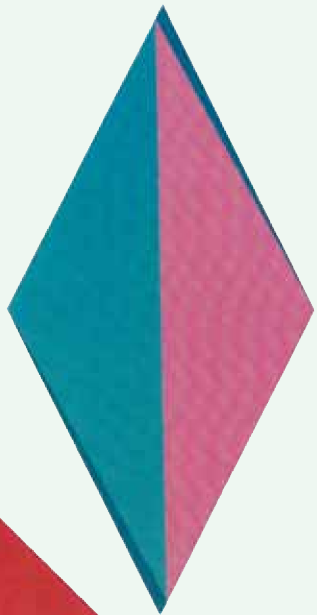
As obras humanas, feitas para tornar nossa vida mais variada, prática, confortável e bela - como pinturas, esculturas, prédios, pontes, torres, cabos, veículos, estradas, barragens, entre tantas outras - mostram-nos o quanto a geometria está presente e é útil na vida humana.

Essa geometria, presente nas obras, nos projetos e desenhos, é chamada euclidiana, pois foi apresentada de modo formal por um matemático grego chamado Euclides, que viveu a cerca de 300 anos antes de Cristo, em Alexandria, uma cidade da costa do Egito, mas que, naquele tempo, pertencia à Grécia.

1 Na Internet, procure "Isto É – edições anteriores". No índice da edição do dia 22/05/96, veja a seção Arte.







Segundo a matemática e educadora francesa Lucienne Felix, que viveu no século passado, essa geometria *estuda o espaço onde o mecânico constrói modelos ou o desenhista constrói figuras com seus instrumentos*. Podemos completar, dizendo que é o espaço onde os mecânicos, engenheiros, arquitetos, construtores e artistas planejam e constróem suas obras com o apoio de desenhos feitos em papel ou no computador e onde nós, homens e mulheres comuns, também fazemos modelos e desenhos.

Ilustração 8 - Mais alguns dos quadros de Barsotti

Situação-problema: A construção de uma piscina

A comunidade de uma escola, junto com o Conselho Escolar, decidiu atender a um pedido dos alunos e construir uma piscina. Avaliando o espaço disponível e as necessidades, decidiram que sua superfície deveria caber em um espaço com medidas 6m por 12m. Quanto à profundidade, para que a maioria dos alunos pudesse usá-la, decidiram que seria de 1m na parte mais rasa e de 3m na parte mais funda. Decidiram também que o fundo não teria a forma de uma rampa em toda a extensão, ou seja, não inclinaria de modo uniforme da parte mais rasa para a mais funda. Ao invés disso, haveria alguns degraus no fundo entre pisos horizontais, mas na parte mais funda o piso poderia ser inclinado.

As preocupações que surgiram foram:

a) como fazer um projeto satisfazendo a essas condições;

b) como informar o projeto aos construtores, por meio de desenhos;

c) como saber qual a quantidade de água que seria necessária para encher a piscina, até 20cm da borda.

Atividade 1

Reflita e exponha idéias iniciais para resolver esses problemas:

a) Imagine uma piscina satisfazendo as condições desejadas e apresente, desenhado em papel, um esboço do seu projeto (compreensível pelos que vão construí-la). Faça um modelo tridimensional (maquete) para a piscina que você criou. Indique todas as medidas.

b) Faça o cálculo da quantidade de água necessária para encher a piscina, até 20cm da borda (dê a resposta em litros).

c) Se não conseguir calcular exatamente o volume de água, apresente uma estimativa. Por exemplo, apresente formas mais simples, uma menor e outra maior que a piscina, e calcule o volume de ambas. O volume de água da piscina estará entre os volumes calculados, e essa é uma estimativa desse volume.

No cálculo do volume da água (ou *capacidade* da piscina), um dado importante a considerar é que $1m^3$ equivale a 1000 litros. Você consegue visualizar claramente essa equivalência por meio de um modelo concreto?

Na seção 3, de Transposição Didática, daremos algumas idéias sobre isso. Não deixe de ler com atenção e desenvolvê-las com seus alunos.

Uma piscina tem a forma de um recipiente oco e sem tampa. Dependendo da criatividade de seu idealizador, descrever sua forma e calcular a sua capacidade podem ser tarefas não muito simples. Na próxima seção, estudaremos algumas formas geométricas padrão, cujo volume pode ser determinado por cálculos elementares. Isso poderá ajudá-lo a resolver a situação-problema, no caso de você ter sido criativo em seu projeto.

Essa situação-problema propicia o exercício:

- de sua capacidade de visualização em três dimensões;

- da representação dessa visualização.

São habilidades importantes, para quem quer saber mais sobre geometria.

Seção 2

Construção do conhecimento matemático em ação: entendendo, usando e medindo figuras geométricas

Objetivo da seção

Esperamos que, ao longo desta seção, você possa:

- Representar objetos por meio de maquetes e desenhos;
- Identificar poliedros, prismas e figuras planas associadas;
- Construir estratégias para o cálculo do volume de prismas e de áreas;
- Identificar a dimensão de figuras geométricas;
- Identificar o aspecto de um objeto sob diferentes pontos de vista e saber representá-lo por meio de desenho.

Reconhecendo poliedros

Dentre a infinidade de formas geométricas espaciais não contidas em um plano, existem as que são formadas apenas por superfícies planas e outras, não. Veja na ilustração 9:

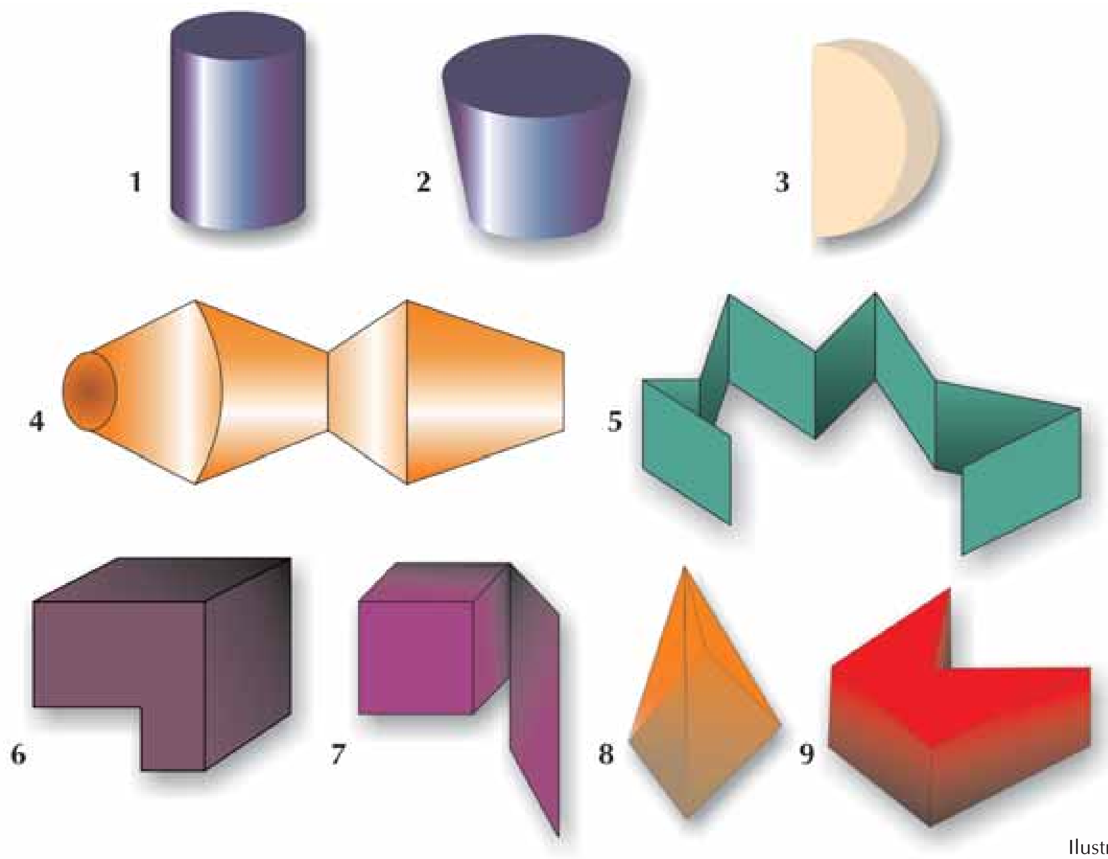


Ilustração 9

Estamos querendo distinguir, entre essas, aquelas que chamaremos de poliedros. Este é um conceito que sofreu várias modificações ao longo da história da matemática e, até hoje, é possível encontrar distintas definições de poliedro.

Vamos adotar uma definição que abrange uma grande classe de figuras espaciais de fácil reconhecimento e cujo estudo será útil em matemática. Em estudos posteriores você poderá apurar seu conhecimento sobre poliedros e reconhecer, entre eles, outras formas mais elaboradas.

Dentre as figuras espaciais não contidas em um plano, mas limitadas apenas por superfícies planas, existem algumas com características especiais:

1) São a reunião de um número finito de polígonos.

2) A intersecção de dois polígonos distintos é uma aresta comum, um ponto comum ou é vazia.

3) Nenhuma aresta tem alguma parte livre e toda aresta une exatamente dois polígonos.

4) Dois polígonos unidos por uma aresta não são coplanares.

Tais formas são chamadas *poliedros*[1].

Os polígonos são chamados *faces* do poliedro, seus lados são as *arestas* do poliedro e os vértices dos polígonos são os vértices do poliedro.

Na ilustração anterior, as figuras 1, 2, 3 e 4 não são poliedros pois possuem faces que não são planas.

A figura 5 não é um poliedro no sentido que estamos tomando (podemos chamá-la de superfície poliédrica aberta); a figura 7 não é um poliedro pois, embora seja uma reunião de polígonos, ela tem arestas (na face maior) que não são a intersecção de duas faces, além disso, a intersecção do polígono mais alto com o polígono lateral do cubo não é uma aresta comum (o mesmo ocorre com a intersecção dessa face mais alta com a face posterior do cubo); 6, 8 e 9 são poliedros.

Atividade 2

a) Cite ou desenhe pelo menos dois objetos que tenham as características citadas.

No universo que nos cerca, há muitos objetos que lembram poliedros. Caixas sem tampa lembram poliedros, ainda que, na verdade, falte uma face para fechá-la.

b) Identifique com um X, nos desenhos abaixo, os que lembram poliedros.

1 Estamos admitindo a existência de polígonos convexos ou côncavos na constituição de um poliedro, de acordo com Castrucci (1962).

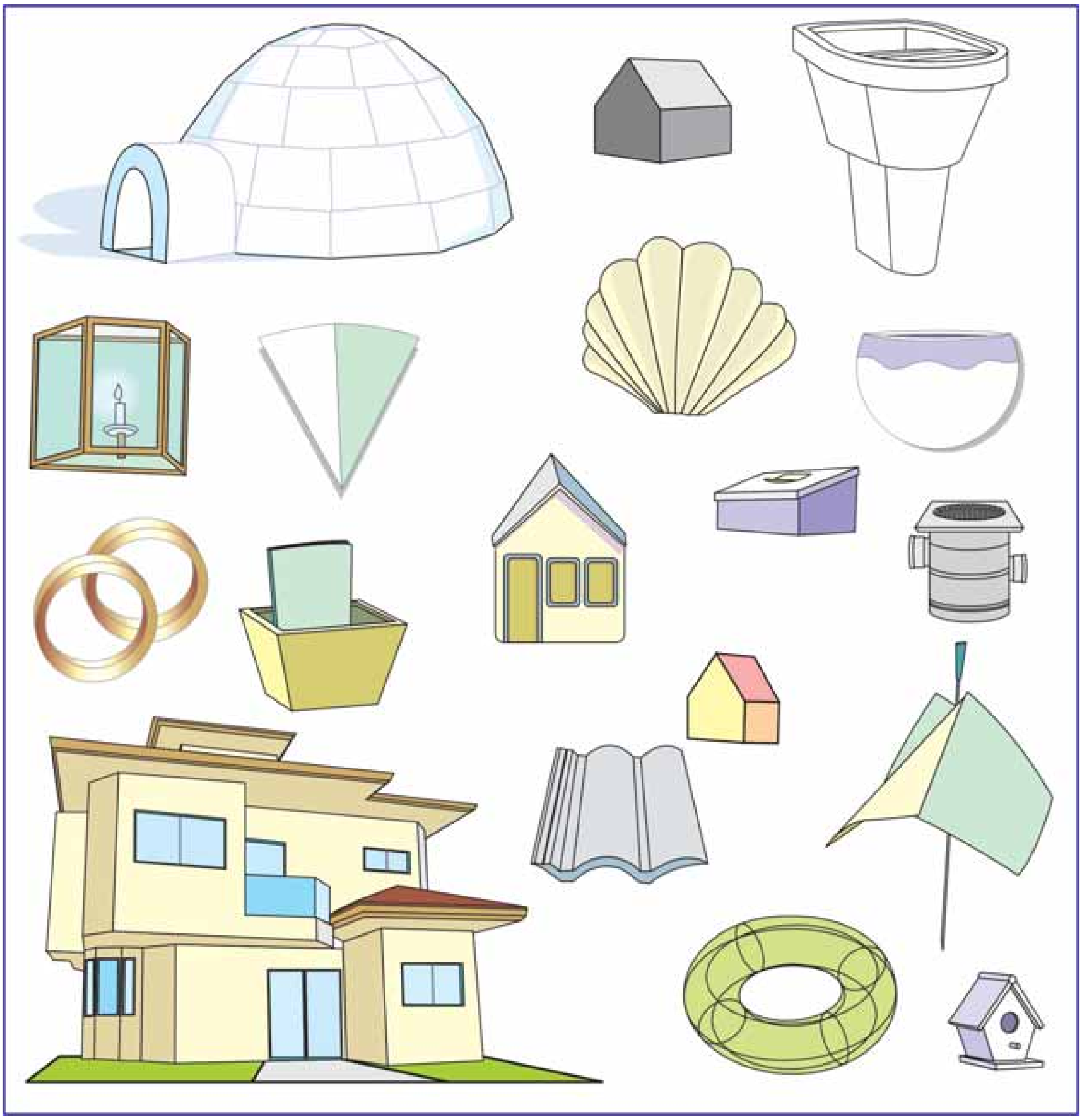


Ilustração 10

Poliedro

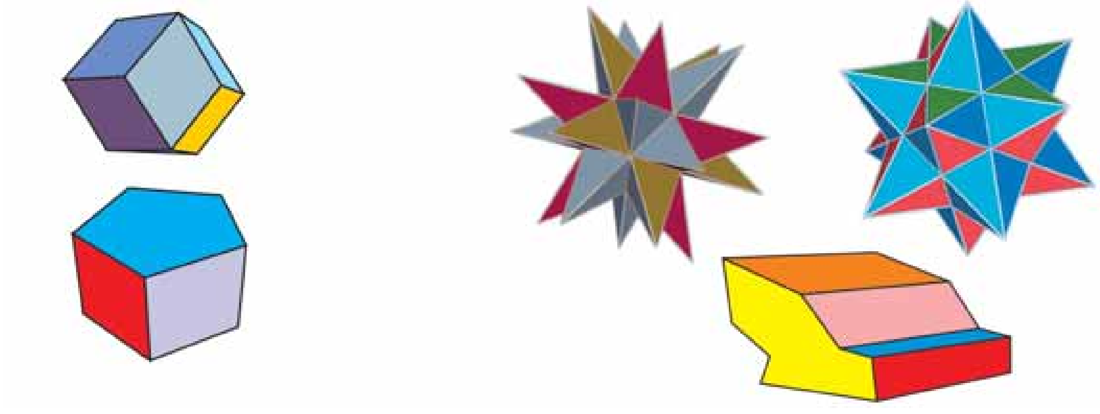
- Nas raízes da palavra poliedro temos *poli,* do grego, significando *muitas;* enquanto *hedron* é uma palavra indo-européia significando *assento,* ou *lugar de apoio*. Significa *que o* poliedro (convexo) tem muitas faces para se apoiar.
George W. Hart – Polyhedra Names
http://mathforum.org.dr.math/faq.polygon.names.html

- A palavra *poliedro* significa "muitos assentos"; os "assentos", neste caso, significando as faces do poliedro, sobre cada uma das quais ele pode apoiar-se quando colocado sobre uma superfície horizontal.
George Olshewsky – http://members.aol.com/Polycell/what.html

Assim como *polígono* pode significar tanto o contorno como a região compreendida por ele, poliedro pode significar um sólido ou apenas sua casca.

Poliedros convexos e côncavos

Se, apoiando-se qualquer face de um poliedro sobre um plano, ele fica inteiramente contido em um mesmo semi-espaço determinado por esse plano, então o poliedro é convexo. Se isso nem sempre ocorre, o poliedro é côncavo.



Poliedros convexos — Poliedros côncavos

Ilustração 11

Agora, preste atenção nas figuras planas que formam as faces do poliedro. Você deve ter reparado que, em cada uma:

- todos os lados dessas figuras são segmentos de reta.

- dois lados consecutivos não são colineares (isto é, não estão sobre uma mesma reta) e encontram-se em um único ponto (chamado vértice).

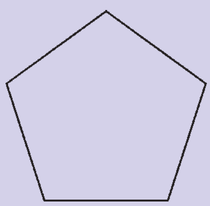
- os lados não se cruzam.

- o contorno da figura é uma linha fechada - na verdade, constitui o que se chama uma *linha poligonal fechada*.

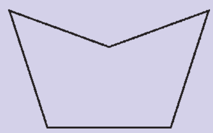
Você já sabe que essas figuras são chamadas *polígonos* e conhece vários deles: triângulos, retângulos, paralelogramos, trapézios, pentágonos etc.

Um polígono é uma figura plana formada por uma linha poligonal fechada sem auto-intersecções, isto é, cada lado tem apenas um ponto comum com o lado anterior e com o seguinte, mas não com os demais.Como dissemos, a palavra polígono pode designar tanto o contorno como a região do plano limitada por ela. Se falamos em área de um polígono, estamos nos referindo à região poligonal.

Existem polígonos convexos e côncavos.



Polígonos convexos
Para quaisquer dois pontos P e Q da região poligonal, o segmento PQ está inteiramente contido na região.



Polígonos côncavos

Reconhecendo prismas

Atividade 3

a) Dentre os poliedros que você desenhou e os que identificou com X na Atividade 2, procure aqueles em que:

- Existem duas faces paralelas idênticas (chamadas bases).

- Cada vértice de uma das bases foi unido a um vértice da outra base, de modo a formar as outras faces do poliedro, que são todas retângulos ou paralelogramos.

Tais poliedros são chamados *prismas*.

b) Em todos os poliedros que você identificou como prismas no item a, destaque as bases (ou a base visível), colorindo-as ou hachureando-as.

Atividade 4

Reconheça prismas matemáticos e objetos com forma prismática que se apresentam no mundo real.

a) Verifique se nos exemplos dados de poliedros côncavos e convexos aparecem prismas. Em cada prisma, identifique as suas bases (as que estiverem visíveis) e complete a frase: as faces laterais têm a forma de ____________________

b) Dentre os objetos a seguir, assinale os que têm forma prismática e os que podem ser decompostos em objetos prismáticos.

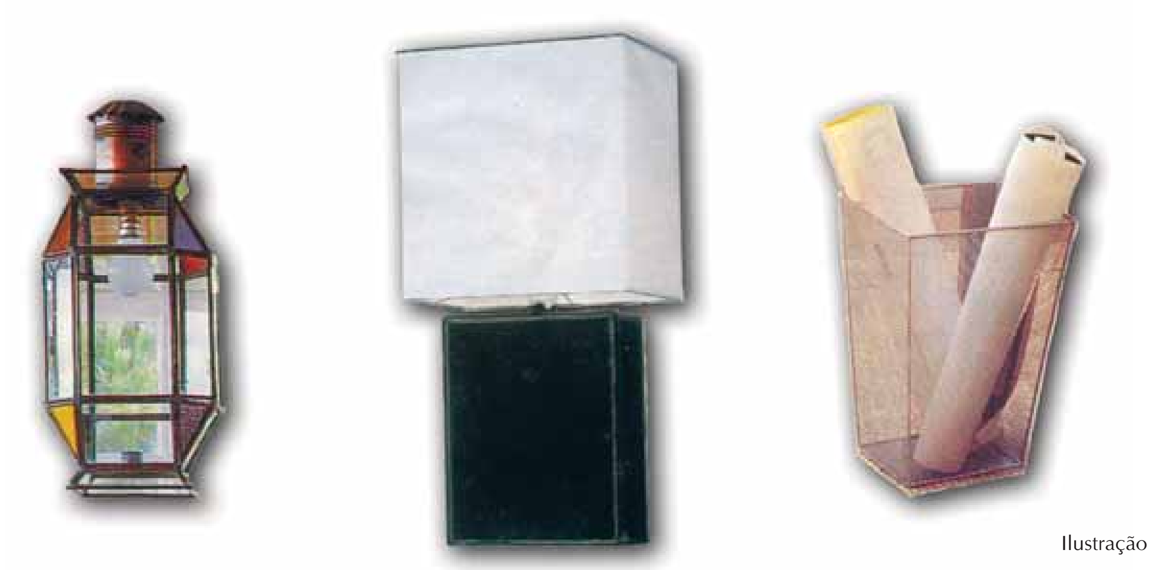


Ilustração 12

Nos prismas, identifique as bases e a forma das demais faces.

Voltando à piscina ...

A rigor, a piscina não é um poliedro (ela não é fechada), nem é formada de prismas, em sentido estrito. Mas fazer analogias com essas figuras espaciais ajuda nos cálculos de volume.

Atividade 5

Considere a maquete que você fez para a sua piscina.

a) A forma de sua piscina lembra a forma de um poliedro ou não? Por quê?

b) A forma de sua piscina é análoga à de um prisma ou não? Por quê?

c) Você consegue decompor o modelo que fez para a sua piscina em formas análogas às de alguns prismas? Em caso positivo, mostre isso por meio de um desenho e explicações.

Volte ao painel de figuras não planas da Atividade 2, no qual você marcou com um X as que eram poliedros. Veja a variedade das formas que sobraram: - existem as não fechadas, as que têm partes arredondadas, dentre outros tipos.

Como vimos, os poliedros são figuras não contidas em um plano, fechadas, limitadas por superfícies planas (polígonos), satisfazendo algumas condições especiais.

Mas existem também figuras não contidas em um plano, fechadas, que são limitadas por superfícies curvas, ou por algumas superfícies curvas e outras planas. Vamos chamá-las de *superfícies curvas ou corpos curvos*.

Os exemplos mais comuns dessas figuras são a esfera, o cone e o cilindro. Contudo, há também uma infinidade de outras que não se encaixam em nenhum desses três.

Atividade 6

a) No painel da Atividade 2, dê exemplo de figuras não planas, fechadas e com superfícies curvas.

b) Dê exemplo de uma figura não plana, não fechada e com superfícies curvas.

Atividade 7

a) A piscina que você projetou tem forma análoga à de uma superfície curva?

b) Pensando na piscina tampada, você consegue decompô-la em corpos curvos e poliedros? Dentre os poliedros, indique se haveria prismas.

Dimensões

Costumamos dizer que vivemos num espaço tridimensional - existem sempre três dimensões presentes nos objetos e nas localizações. Nos objetos, é comum falarmos em largura, comprimento e altura e dizermos que eles são tridimensionais. Um modo da dimensão do objeto ser menor que 3 é uma ou mais dessas dimensões ser nula. Por exemplo, no caso de um objeto ter largura e comprimento, mas ter altura desprezível, dizemos que é um objeto bidimensional. Matematicamente, as figuras planas têm dimensão 0, 1 ou 2. Entretanto, você verá que existem figuras não planas com essas dimensões. Em termos de localização, a posição de qualquer ponto sobre a Terra pode ser dada por uma latitude, uma longitude e uma altura. Também aqui uma ou mais podem ser nulas.

Lembrete

Latitude: Indica o afastamento lateral a partir do meridiano de Greenwich.

Longitude: Indica o afastamento a partir da linha do equador, indo para os pólos.

Altura: Indica o afastamento em relação ao nível do mar.

Converse com o professor de Geografia sobre esses conceitos.

Também pode-se falar em uma quarta dimensão: o tempo. É diferente estar em um mesmo ponto em certo momento do ano de 1985 e em um momento de 2002. Veja a importância que isso pode ter: um navio flutuando descreve sua latitude e sua longitude (a altura será sempre nula, pois é medida em relação ao nível do mar) que são exatamente iguais à latitude e à longitude de outra embarcação, também sobre o mar. Estarão colidindo? Não necessariamente, pois aquelas informações podem se referir a momentos diferentes.

Contudo, do ponto de vista só de localização espacial, três dimensões são suficientes para descrever a posição do objeto.

No espaço em que vivemos, todas as formas são espaciais, pois existem nesse espaço. Todavia, é comum nos referirmos a formas de dimensão 1, 2 e 3 (a forma de dimensão zero seria o ponto).

Atividade 8

Na sua forma de ver:

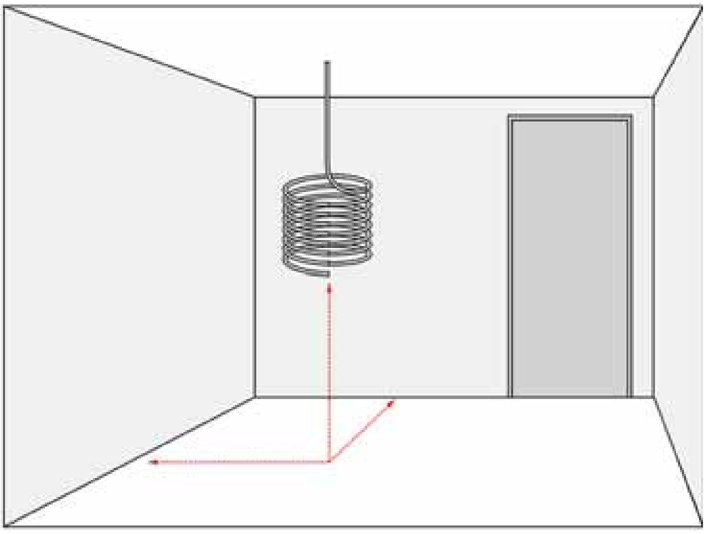
a) Formas de dimensão 1 estão sempre sobre uma reta? Por quê?

b) Formas de dimensão 2 estão sempre contidas em um plano? Por quê?

Muitas vezes, uma atividade que propomos refere-se a um assunto que ainda será desenvolvido. Ela tem a função de levá-lo a fazer um balanço dos seus conhecimentos sobre o tema - afinal, você terá algo a aprender a respeito ou não? Ao mesmo tempo, ela deve intrigá-lo e aguçar sua curiosidade em confirmar suas opiniões a respeito ou ampliá-las. É o que esperamos que tenha ocorrido na Atividade 8. Sobre o tema dimensões, continuaremos a falar a seguir.

Molas, espirais, bandeiras ao vento e latas de refrigerantes

Imagine uma mola bem fininha, de espessura quase nula, e procure abstraí-la para a forma perfeita de uma espiral geométrica espacial.



Pense e responda:

a) Suponha a mola colocada em uma sala comum, em forma de caixa retangular. Se dermos as distâncias de um ponto da mola à parede lateral, à parede frontal e ao piso, a posição desse ponto estará bem descrita? E um ponto da espiral geométrica poderá ser determinado por três distâncias?

b) Que grandeza seria possível medir: 1) nessa mola de espessura quase nula e 2) na figura abstrata de uma linha espiralada espacial?

c) É possível espichar a mola (ou imaginar a linha espiralada esticada), de modo que a mola ou a linha apóiem-se sobre uma linha reta, estabelecendo uma correspondência bijetora entre os pontos da mola ou da espiral e os pontos de um segmento da reta? (Veja figura da mola).

Se você respondeu sim ao primeiro item, está com um bom conhecimento ou uma boa intuição geométrica.

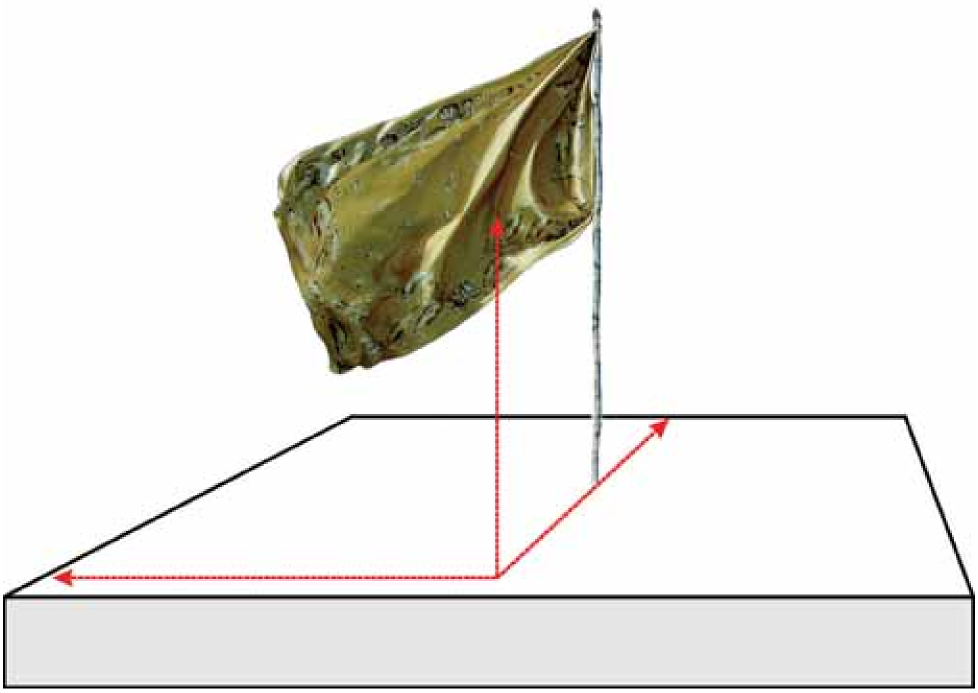
No item b), devemos pensar separadamente na mola real e na espiral matemática. A mola real, se espichada, toma a forma de um cilindro fininho, com uma base circular minúscula - nela podemos medir o *volume*. A espiral geométrica tem apenas *comprimento*.

No item c) também há diferença entre as duas. Se a mola fosse espichada sobre uma reta, sobre cada ponto da reta (ou melhor, de um segmento dela) estaria apoiado um círculo da mola (originado de um corte da mesma). Nesse círculo, mesmo minúsculo, há infinitos pontos, todos correspondendo a um único ponto da reta. Para a espiral geométrica não ocorre isso. Se espichada, há uma correspondência perfeita entre cada ponto dela e um ponto da reta ou de um segmento de reta.

O item a) evidencia que a mola (e a espiral) são objetos não planos: cada ponto, para ser bem localizado, precisa de 3 distâncias a um referencial. Se fossem planos, bastariam duas distâncias para definir o ponto.

No caso da mola, o item c) evidencia que ela não tem dimensão 1, pois seus pontos NÃO podem ser postos em correspondência com pontos de uma linha reta ou de um segmento de reta; já o item b) evidencia tratar-se de um objeto de dimensão 3: ela tem volume. No caso da espiral matemática, esses itens evidenciam tratar-se de uma forma com dimensão 1: ela tem apenas comprimento e seus pontos podem ser postos em correspondência bijetora com pontos da reta.

Do mesmo modo, você pode pensar em uma bandeira retangular, de espessura quase nula, ondulada ao vento. Você pode cristalizar o movimento em certo instante e também pode abstrair o modelo da bandeira ondulada e imóvel para uma forma geométrica pura: uma superfície geométrica idealizada, sem espessura, ondulada como ocorre com a bandeira.



Como no caso da mola, pense e responda:

a) Suponha a bandeira colocada em um salão em forma de uma caixa retangular. Se dermos as distâncias de um ponto da bandeira à parede lateral, à parede frontal e ao piso, a posição desse ponto estará bem descrito? E um ponto da superfície geométrica ondulada, também está determinado por 3 distâncias?

b) é possível esticar, apoiando sobre um plano, estabelecendo uma correspondência entre os pontos do que é esticado e os pontos do plano:

b_1) a bandeira?

b_2) a figura abstrata de uma superfície ondulada , imitando a bandeira, sem espessura?

c) que grandeza seria possível medir:

c_1) nessa bandeira ondulada?

c_2) na figura abstrata de uma superfície ondulada , imitando a bandeira, sem espessura?

A resposta ao item a) é SIM. Esse item evidencia que a bandeira (e a superfície ondulada) são objetos não planos: cada ponto, para ser bem localizado, precisa de 3 distâncias a um referencial. Se fossem planos, bastariam duas distâncias para definir o ponto.

No caso da bandeira, a resposta ao item b_1) é que seus pontos NÃO podem ser postos em correspondência bijetora com pontos de um plano (ou de uma parte do plano) - esticada sobre um plano, mais do que um ponto da bandeira (por causa da espessura) estariam sobre um mesmo ponto do plano. Isso evidencia que a bandeira não pode ter dimensão 2.

A resposta ao item c_1) é que seria possível medir na bandeira a grandeza volume (pois tem comprimento, largura e uma altura ou espessura ínfima mas não nula), portanto a bandeira é um objeto de dimensão 3: ela tem volume.

No caso da superfície matemática, a resposta ao item b_2) é que seus pontos podem ser postos em correspondência bijetora com pontos de uma parte do plano, logo ela tem dimensão 2. Quanto ao item c_2), a grandeza que pode ser medida é sua *superfície* (não seu volume), reforçando o fato dela ter dimensão 2.

Da mesma forma, corpos ocos, como uma forma cilíndrica análoga a uma lata de refrigerante, têm dimensão 2. Planificando-a, vemos que há uma correspondência entre os pontos da forma cilíndrica e os pontos da planificação.

Observe que um sólido maciço não pode ser planificado - apenas sua superfície externa (*casca*) poderá sê-lo.

Após essa leitura sobre a mola e a bandeira idealizadas geometricamente, volte à Atividade 8 e reveja suas respostas.

Figuras não contidas em um plano

Inicialmente, podemos separá-las nas figuras formadas apenas por superfícies planas (nas quais se inserem os poliedros) e as formadas por superfícies não todas planas (que chamaremos de superfícies ou corpos curvos).

Ambas podem variar de infinitos modos.

Dentre os poliedros, destaca-se uma classe importante, a dos primas. Mais à frente veremos outra classe importante dos poliedros: a das pirâmides. Mas fora do conjunto dos prismas e das pirâmides sobram infinitos poliedros. Veja um esquema:

- **FIGURAS NÃO PLANAS**
  - **Limitadas por faces planas**
    - **Poliedros**
      - **Prismas**
      - **Pirâmides**
      - **Nem prismas nem pirâmides**
    - **Não poliedros**
  - **e**
  - **Limitadas por faces não todas planas** (chamaremos **superfícies curvas**)
    - formadas apenas de superfícies curvas;
    - ou
    - formadas de faces planas e de superfícies curvas.

Figuras não planas fechadas ou maciças são chamadas sólidos.

Quanto à dimensão, as formas espaciais têm dimensão 0, 1, 2 ou 3.

Lembre-se:

Existem formas que não são retilíneas nem planas e têm dimensão 1: por exemplo, a idealização geométrica de uma mola.

Existem formas não planas com dimensão 2: a idealização geométrica de uma bandeira ondulando, de uma lata de refrigerante etc.

Desenhando

Você teve dificuldade em desenhar seu projeto de piscina, nas Atividades 1 e 5? Vamos desenvolver dois modos de fazer isso, que poderão ajudá-lo.

Não sabemos como foi a piscina que você projetou.

Nós projetamos uma que pode ser assim descrita:

- *A superfície é um retângulo 6m por 12m;*
- *Ao longo do comprimento:*

- nos primeiros 3,5 metros, a profundidade seria constante, igual a 1 metro;

- após estes 3,5 metros: 1 º degrau de 30cm;

- após mais 1,25m : 2º degrau de 30cm;

- após mais 1,25m : 3 º degrau de 30cm;

- após mais 1,25m : 4 º degrau de 30cm;

- após mais 1,25m : 5 º degrau de 30cm.

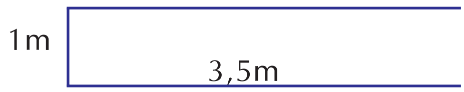
Entre um degrau e outro, a profundidade seria constante.

• *Após o último degrau, o fundo da piscina passaria a ser uma rampa, até atingir a profundidade máxima de 3 metros.*

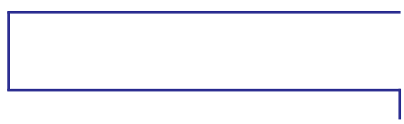
Ficou complicado para entender? Vamos analisar por partes:

a) A piscina terá forma retangular, aproveitando todo o terreno disponível: 6m por 12m.

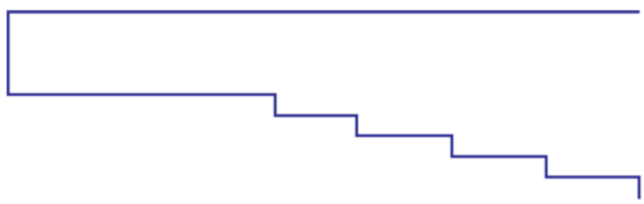
b) Ao longo do comprimento, nos primeiros 3,5 metros, a profundidade é constante, igual a 1 metro. Vamos ver como fica parte da parede lateral da piscina (ao longo do comprimento) olhando-se por dentro:



c) Ao fim desses 3,5 metros, há um degrau de 30cm, passando a profundidade a 1,30m.



d) A partir daí, a cada 1,25m (ao longo do comprimento) há um novo degrau de 30cm, até completarem 5 (incluindo o inicial). Entre um degrau e outro, a profundidade é constante.



Que comprimento da parede já atingimos nesse ponto em que há um último degrau?

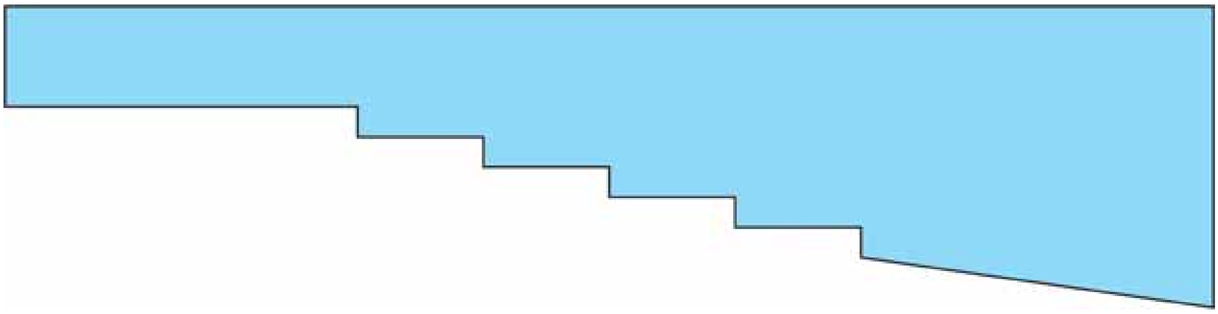
3,5m + (4 x 1,25m) = 8,5m. (Ainda faltam 3,5m para completar os 12m).

Que profundidade já foi atingida, no topo do quinto degrau?

1m + (4 x 0,30m) = 2,20m. (Ainda falta 0,80m para atingir 3m).

Na base do quinto degrau, a profundidade será de 2,50m. (Ainda falta 0,50m para atingir 3m).

e) Após o último degrau, o fundo da piscina passaria a ser uma rampa, até atingir a profundidade máxima de 3 metros.

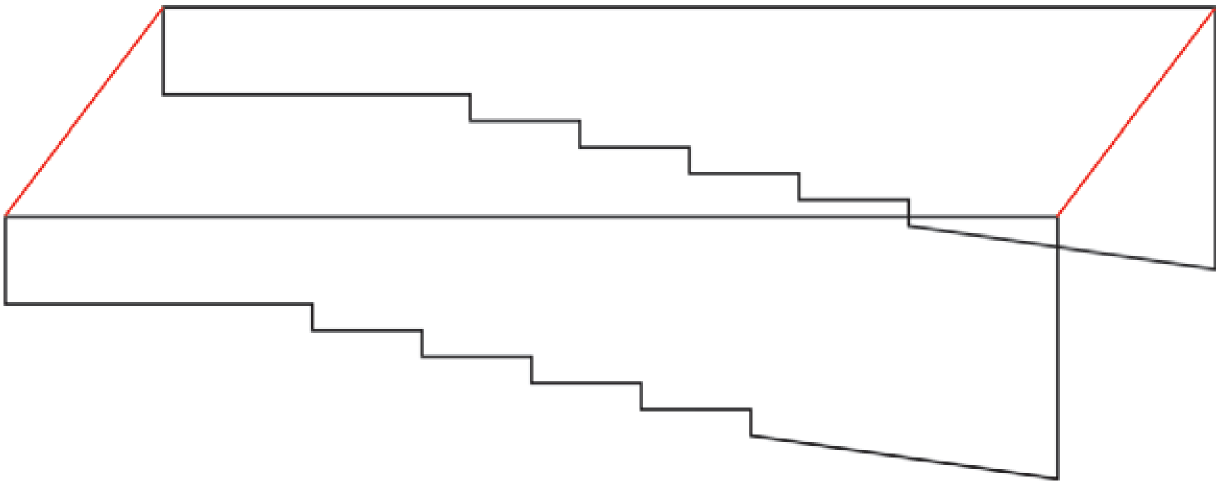


Pronto! Agora já temos a forma da lateral da piscina, ao longo do comprimento. Você viu que não foi tão difícil desenhá-la.

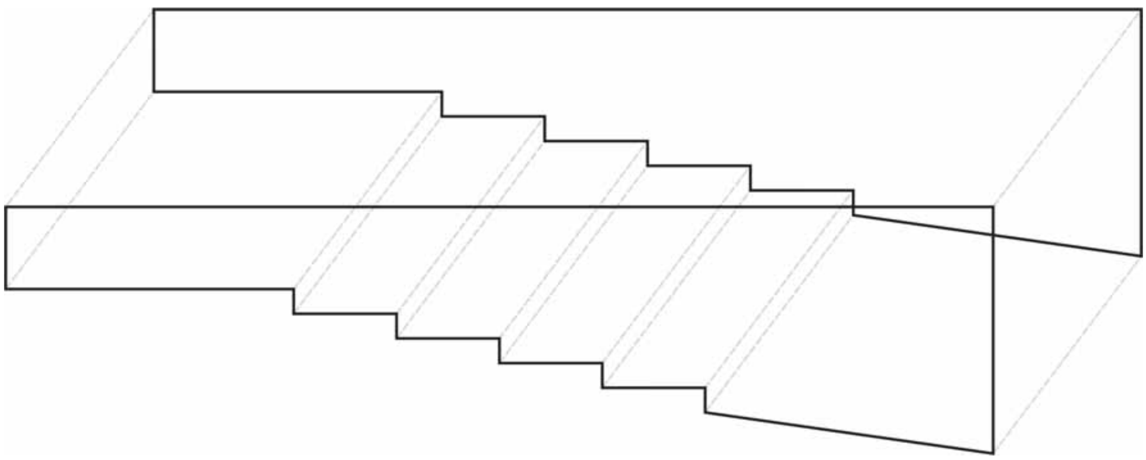
E para fazer um esboço da piscina toda, como podemos desenhar?

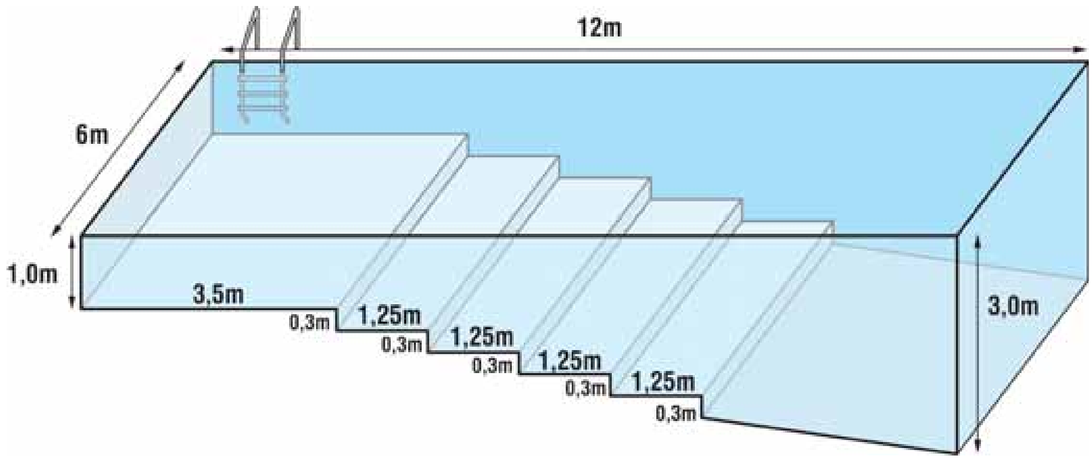
Uma idéia é desenhar logo a face superior da piscina. Se a olhássemos de um ponto alto, bem em cima do centro da superfície da piscina, veríamos um retângulo, concorda? Mas se a olhássemos meio de lado, a face superior pareceria um paralelogramo.

Observe: serão duas paredes iguais, ao longo do comprimento. Então podemos repetir a forma da parede que já fizemos. Repare que linhas verticais do modelo real permanecem verticais no desenho. Por isso todas as linhas que formam as laterais da piscina são verticais.



Veja: já estão desenhadas a face superior e as duas laterais, ao longo do comprimento. Sabe como completar agora? É so unir cada ponto da parede de trás ao seu correspondente na parede da frente, formando as linhas que faltam.





Você acha que a piscina que nós projetamos e desenhamos tem a forma de um prisma? Isto é, se fosse fechada, seria análoga a um prisma?

Não sei se você respondeu Sim ou Não. Mas é bom lembrar sempre:

Para saber se um poliedro (faces planas poligonais) é um prisma, precisamos:

- achar duas faces paralelas e idênticas (bases do prisma);

- verificar se as faces restantes são obtidas por segmentos que unem os pontos de uma base aos correspondentes da outra.

Nesse caso, observe ainda se as faces são sempre retângulos ou paralelogramos.

Verifique, na próxima atividade, se a piscina que planejamos satisfaz as condições para ser um prisma.

Atividade 9

a) Identifique duas faces paralelas e idênticas na piscina desenhada. Se achá-las, hachu-reie-as.

b) As demais faces são definidas por segmentos de reta unindo os pontos de uma dessas faces aos pontos correspondentes da outra?

c) As demais faces têm a forma de retângulos ou paralelogramos?

d) O que você pode concluir sobre a forma da piscina?

e) Contando a superfície da piscina também como uma face, quantas faces tem a piscina?

f) Para revestir todas as faces internas da piscina com azulejos, quantos metros quadrados desse material serão necessários?

Esperamos que você tenha desenhado a nossa piscina de acordo com as idéias que desenvolvemos, e que esse desenho o tenha ajudado a resolver a Atividade 9.

Essa foi uma forma de desenhar a piscina. Entretanto, a partir da sua maquete, existe outra forma bastante curiosa de obter seu desenho. Veja primeiro a ilustração de um pintor em seu trabalho:

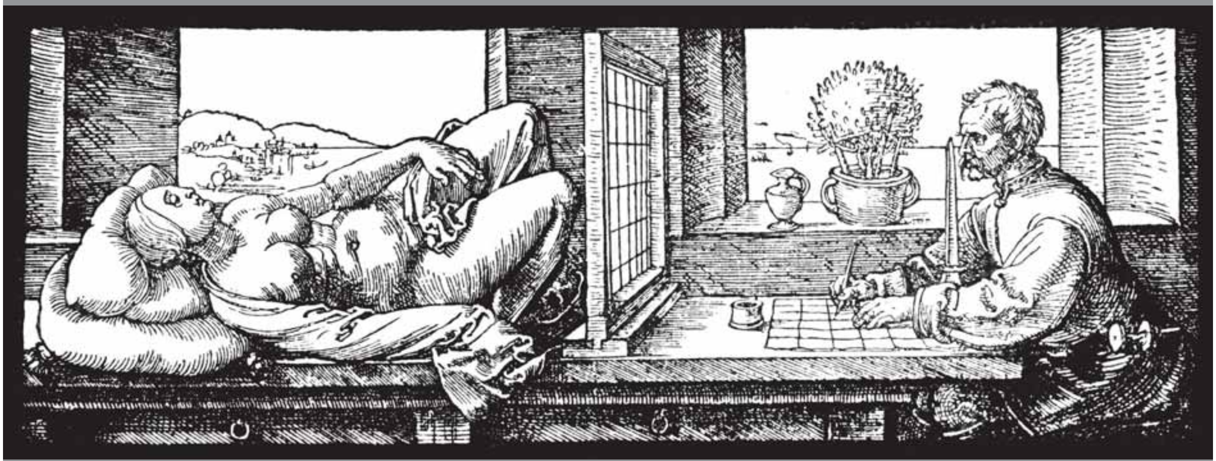


Ilustração 13 - Desenho de Albrecht Dürer

Nesse quadro, o pintor Albrecht Dürer mostra outro pintor frente ao seu modelo. Repare: esse pintor usa um vidro quadriculado para observar a cena, e tem uma tela quadriculada na qual reproduz cada pequeno retângulo visto no vidro. O pintor olha a cena através de um suporte fixo, para que seu ponto de vista não mude.

Observe que o pintor poderia ter pintado diretamente no anteparo de vidro, mas o quadro ficaria frágil.

Que tal usar um método parecido, pintando diretamente sobre um vidro?

NADA DE IGNORAR ESSA PERGUNTA-CONVITE, PULAR ESSE PEDAÇO E CONTINUAR A LEITURA.

Essas inovações foram especialmente escolhidas para que possam levá-lo a novas experiências e reflexões relacionadas à geometria.

Para realizá-la, você precisa de:

a) sua maquete feita a partir do seu projeto de piscina (não venha dizer que ainda não a fez. Se isso ocorreu, agora é um bom momento para construi-la).

b) um vidro retangular transparente, mais ou menos de 25cm por 20cm.

Outra possibilidade é você dar um jeito de colocar sua maquete por fora de um vidro de uma janela da sua casa.

Vá preparar tudo e depois volte ao texto.

Pronto? Vamos lá, desenhar como alguns antigos pintores.

Atividade 10

a) Coloque sua maquete sobre uma mesa apoiada em alguns suportes, e coloque um pedaço de vidro transparente inclinado na frente dela.

b) Arrume um jeito de deixar o vidro vertical ou um pouco inclinado sobre uma mesa (um jeito é apoiar uma pequena parte das beiradas laterais em pilhas de livros, deixando o vidro livre entre elas).

c) Posicione-se em um lugar de onde você veja toda a maquete através do vidro e de onde sua mão possa pintar no vidro. Marque esse lugar (contorne seus pés, por exemplo).

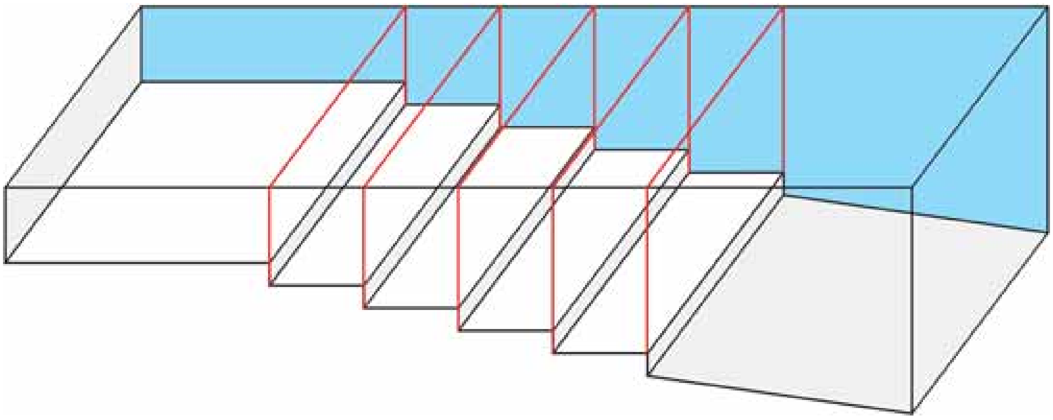
Caso você esteja usando a janela, faça o mesmo: fixe a maquete por fora e marque muito bem o lugar dos seus pés.

d) Sem sair do lugar e sem inclinar o corpo ou a cabeça, você deve desenhar riscos no vidro que se superponham aos segmentos da maquete. Use uma caneta que marque bem o vidro. O melhor é uma caneta de retroprojetor, mas um pincel atômico ou uma canetinha hidrocor também servem. Uma boa técnica é começar marcando na superfície do vidro pontos-chave da maquete: os quatro vértices da borda, os pontos inferiores das paredes etc. Eles ajudarão você a manter o enquadramento da maquete no vidro. Depois, é só fazer os segmentos que os unem.

Surpreso? O desenho da sua maquete aparece todinho no vidro, sob um ângulo diferente daquele que foi usado no desenho anterior.

Decomposição de poliedros e de prismas

Embora nossa piscina tenha a forma de um prisma (um prisma poderia encaixar-se exatamente nela), ela ainda pode ser decomposta em outros prismas mais simples. Quer ver como?



Observe que são 5 primas na forma de bloco retangular (como tijolos) e um prisma com bases na forma de trapézios (as duas faces idênticas e paralelas). Embora pareça que esses 6 prismas tenham comprimentos diferentes, isso é uma distorção da versão – todos eles tem comprimento igual à largura da piscina.

Atividade 11

Agora um desafio:

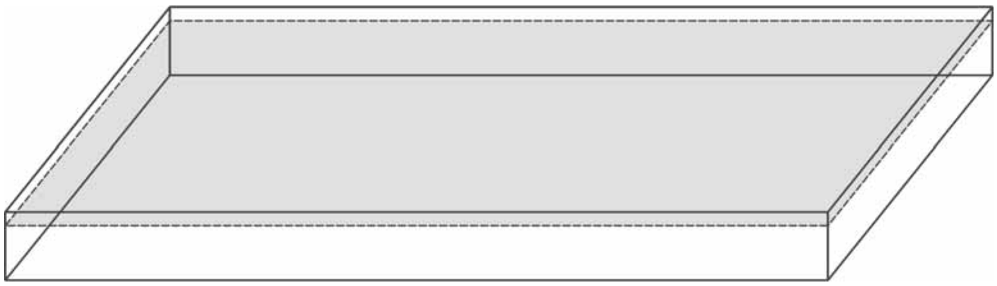
Imagine e desenhe o prisma da piscina em pé, apoiado sobre uma das faces idênticas. Afinal, você já teve uma lição de desenho.

Na Atividade 1, foi pedido o cálculo da quantidade de água necessária para encher a piscina, até 20cm da borda - o cálculo exato, ou, pelo menos, dois valores entre os quais o volume de água da sua piscina estaria situado.

Para calcular a capacidade, devemos saber o volume.

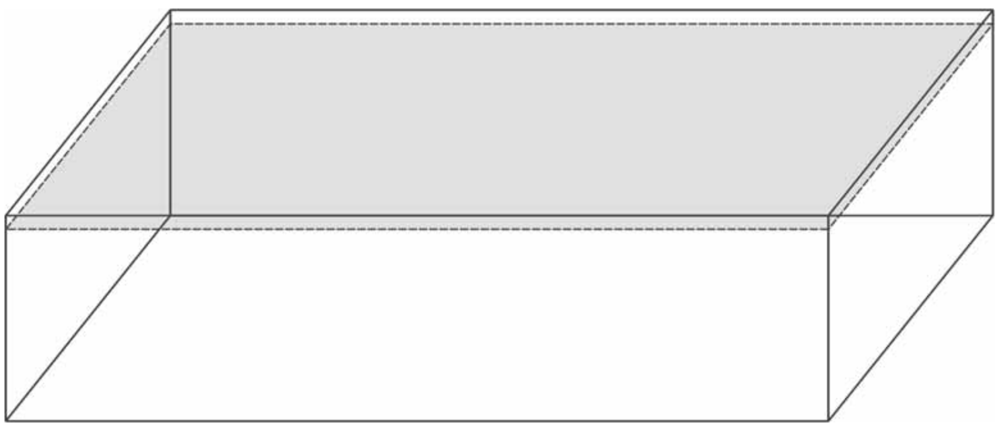
Provavelmente você sabe que o volume de um cubo é igual a $\mathbf{a^3}$, em que **a** é o lado do cubo. Para um bloco retangular de dimensões **a**, **b** e **c**, o volume é igual ao produto **a x b x c.** Você poderá ver como se chega a essas fórmulas no próximo item: Volumes de Prismas.

Essas fórmulas nos permitem calcular dois valores entre os quais se encontra a capacidade da piscina. No caso daquela que nós projetamos, sua capacidade é maior do que a de um bloco retangular com medidas 6mx12mx0,80m (descontamos 20cm da profundidade de 1 metro).



$V = 6m \times 12m \times 0{,}80m = 57{,}6m^3$

Por outro lado, a capacidade desta piscina é inferior à de um bloco retangular com medidas 6m x 12m x 2,80m (descontando os 20 centímetros da profundidade de 3m).



$V = 6m \times 12m \times 2{,}80m = 201{,}6m^3$

Podemos afirmar que a quantidade de água necessária para encher a piscina até 20cm da borda está entre 57,6 e 201,6cm^3. É uma variação muito grande, que nos informa pouco a respeito da água necessária.

Precisamos determinar a capacidade ou o volume exatos, e para isso precisamos de alguns conhecimentos mais.

Volumes de prismas

Você já sabe que, sempre que vamos fazer uma medição, devemos ter:

a) um objeto no qual faremos a medida;

b) uma grandeza desse objeto, escolhida para ser medida;

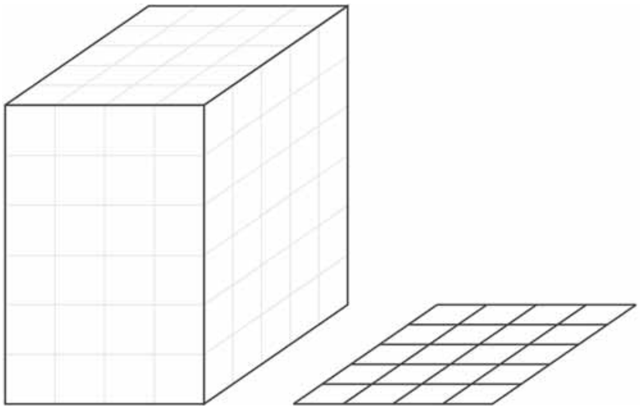
c) uma unidade de medida, da mesma natureza da grandeza a ser medida.

A medição consistirá em verificar quantas vezes a unidade de medida está contida no objeto. O resultado da medição será expresso por um número, resultado dessa verificação, junto da unidade de medida considerada.

Para avaliar o volume do prisma, ele próprio é o objeto; a grandeza a ser medida é o volume; a unidade de volume pode ser o centímetro cúbico.

Considere um prisma com 4cm de largura, 5cm de profundidade e 6cm de altura. Veja como a área da base do prisma pode auxiliar na compreensão do cálculo do seu volume.

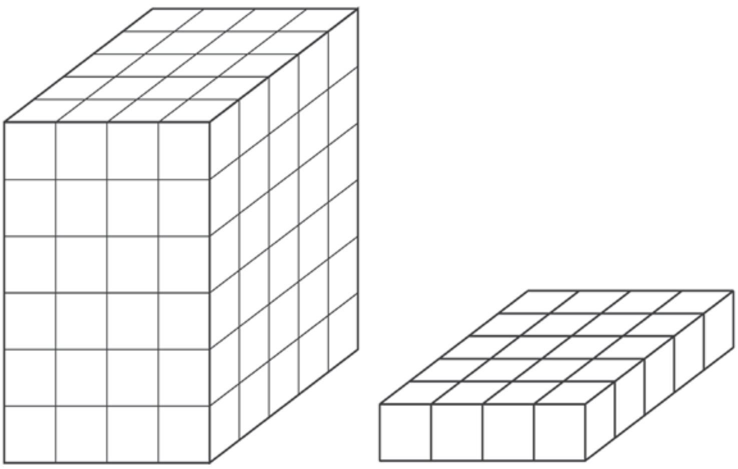
Prisma



Área da base do prisma: 4cm x 5cm = 20cm^2

Para encher uma primeira camada do prisma, precisaremos de 20 cubinhos de 1cm^3, correspondentes aos 20 quadradinhos da base. Em seguida comparamos com o prisma todo. Como ele tem 6cm de altura, serão necessárias seis camadas iguais a essa para preencher o prisma.

Podemos dizer que o volume desse prisma é igual a 4 x 5 x 6 = 120cm^3.



Esse processo nos permite dizer que o volume de um prisma é igual ao produto da área de sua base por sua altura (que representaremos por h). Temos:

$$V_{prisma} = A_{base} \times h$$

No caso de uma base retangular de medidas a e b, e sendo c a altura do prisma, podemos escrever o volume como:

$$V_{prisma} = a \times b \times c$$

No caso de o prisma ser um cubo temos a=b=c e portanto

$$V_{prisma} = a \times a \times a$$

Nesta unidade, a piscina serviu como ponto inicial de uma situação-problema e serve também como um objeto sobre o qual queremos mais informações, gerando a necessidade de novos conhecimentos que poderão resolver as informações que queremos.

Desse modo, o motivo que nos levou a introduzir o tema Volume de Prismas foi a necessidade de calcular com exatidão a capacidade da piscina, deixando livre 20cm da borda.

Lembrete

Tradicionalmente, em Matemática, *volume* é uma grandeza referente a sólidos (maciços) e descreve a quantidade de espaço ocupada por ele, medida em alguma unidade.

Capacidade é uma grandeza referente a figuras não planas ocas, que descreve a quantidade de matéria que pode ser colocada dentro dela.

Na prática, essa diferença é irrelevante. Como a unidade de volume dm^3 é equivalente à unidade de capacidade l, conhecendo-se uma podemos ter a outra, sem dificuldade. Por exemplo, o volume ou a capacidade de uma caixa d´água nos dão informações eqüivalentes.

Talvez você se surpreenda com o que vem agora - uma articulação entre:

a) as áreas de polígonos, que você estudou na Unidade 1 do TP2, sobre esportes, e

b) o cálculo do volume de prismas.

Lembra-se de como foi o estudo das áreas?

1 - a área do quadrado e do retângulo foi calculada diretamente, por preenchimento dessas figuras com unidades de área;

2 – a área do paralelogramo foi calculada cortando e deslocando uma parte dele, de modo a transformá-lo em um retângulo;

3 – duplicamos um triângulo de modo a obter um retângulo ou um paralelogramo, cuja área já é conhecida, e dividimos essa área por 2, para voltar à área do triângulo;

4 – para calcular a área de um trapézio, podemos decompô-lo em várias figuras de áreas conhecidas ou duplicá-lo, obtendo-se um paralelogramo, cuja área será dividida por 2, para voltar à área do trapézio.

Lembrete para a aprendizagem

Dúvidas nesses fatos sobre as áreas, ou lembranças meio nebulosas? Volte lá, confira. Isso fará com que você avance pisando em chão mais firme. Compreenderá melhor a conexão entre as áreas de polígonos e os volumes dos prismas (que faremos em seguida) e não se esquecerá disso.

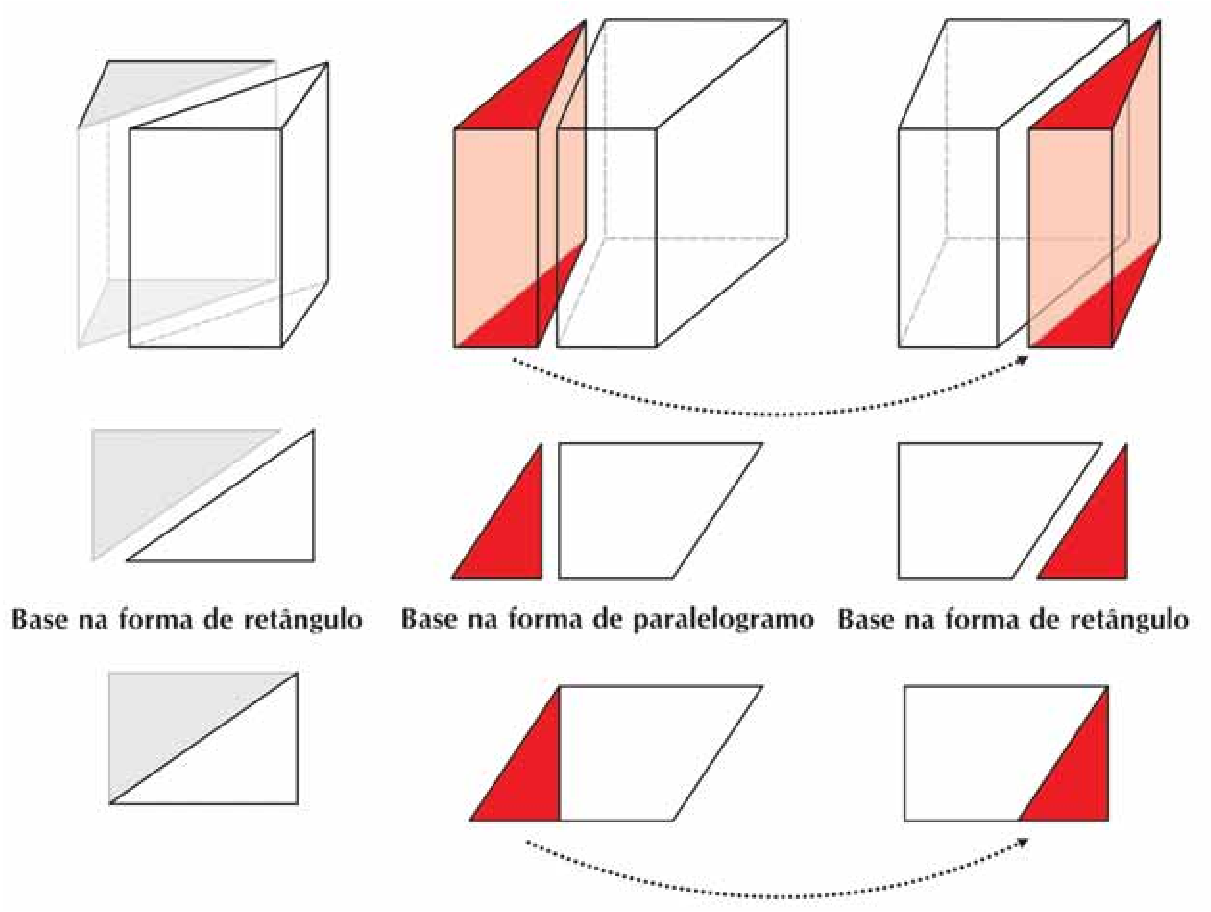
Cálculo do volume de um prisma

Vamos trilhar os mesmos passos feitos no caso das áreas.

1 – A base do prisma é um retângulo ou um quadrado.

Esse já foi feito: preenchemos a base com unidades de área e, sobre elas, colocamos unidades de volume, formando uma primeira camada. Multiplicamos pela altura do prisma, de modo a ter camadas que preenchessem o prisma.

2 – A base do prisma é um paralelogramo.



Olhe os dois prismas que têm uma parte vermelha. Pode parecer que as bases de ambos são retângulos, mas não é isso que quisemos representar. De cada um deles parte uma flecha vertical indicando qual é a base correspondente. No primeiro, a flecha indica a base em forma de paralelogramo; no segundo, em forma de retângulo. Talvez a mudança ocorrida na base - corte de uma parte e recomposição na forma de um retângulo

- ajude você a ver o processo correspondente feito no prisma: como sua base não era um retângulo, foi cortada a parte vermelha do prisma e justaposta do outro lado, de modo a torná-lo um prisma com base retangular, cujo volume já sabemos calcular:

$$V_{\text{prisma retangular}} = A_{\text{retângulo da base}} \times h$$

Como a decomposição e recomposição não alterou o volume, o prisma cuja base é um paralelogramo tem esse mesmo volume. Devemos lembrar ainda que a área da base retangular do 3º prisma é igual à área da base em forma do paralelogramo do 2º prisma. Então podemos escrever:

$$V_{\text{prisma com base paralelogramo}} = A_{\text{paralelogramo da base}} \times h$$

3 – A base do prisma tem a forma de um triângulo. Na mesma figura que estávamos considerando, há um prisma sem colorido, com base triangular. Veja como ele foi duplicado para se obter um prisma retangular (se o triângulo não fosse retângulo, a duplicação teria gerado um prisma com base em forma de paralelogramo).

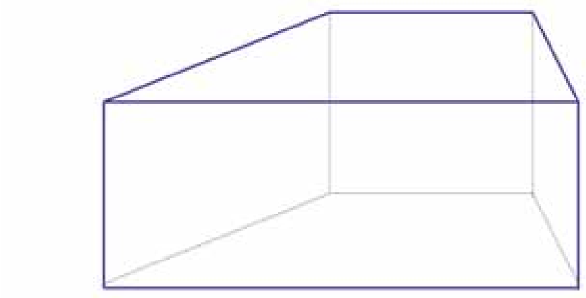
O volume do prisma triangular é igual à metade do volume do prisma retangular:

$$V_{\text{prisma triangular}} = \frac{1}{2} V_{\text{prisma retangular}} = \frac{1}{2} A_{\text{retângulo da base}} \times h$$

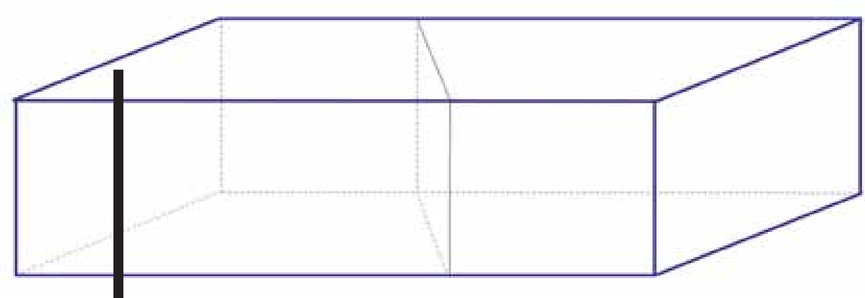
Como metade da área do retângulo é igual à área do triângulo, temos:

$$V_{\text{prisma triangular}} = A_{\text{triângulo da base}} \times h$$

4 – A base do prisma tem a forma de um trapézio.



Nesse caso, podemos duplicar o prisma obtendo um prisma com base em forma de paralelogramo, da mesma forma como fizemos com as áreas (lembre-se do que você fez na Atividade 17, Unidade 1 do TP2).



Percebemos então, que o volume do prisma inicial é igual à metade do volume desse novo prisma, que já sabemos ser igual ao produto de sua base (paralelogramo) pela sua altura. Dividindo por 2, a base também fica dividida por 2, e seu valor será o da área do trapézio inicial. Temos:

$$V_{\text{prisma trapezoidal}} = \frac{1}{2}\, V_{\text{prisma com base igual a paralelogramo}} = \frac{1}{2}\, A_{\text{paralelogramo}} \times h$$

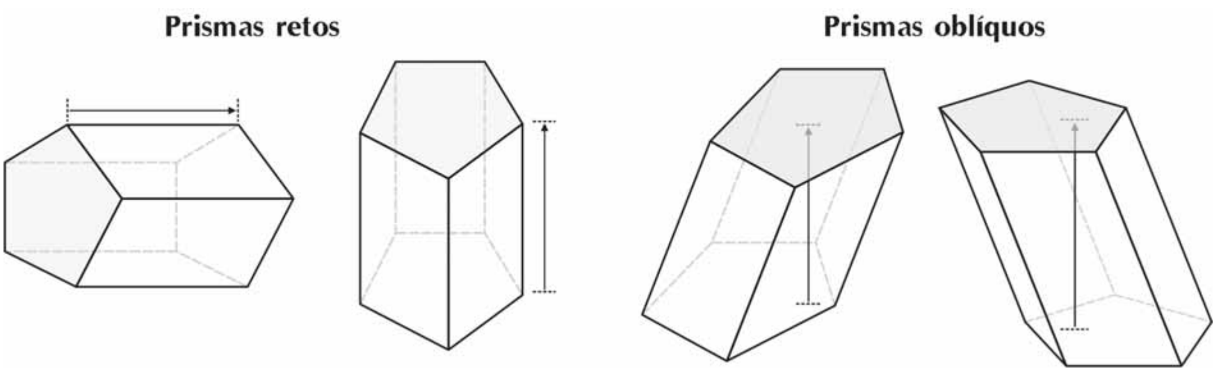
Como 1/2 (área do paralelogramo) é igual à área do trapézio, obtemos:

$$V_{\text{prisma trapezoidal}} = A_{\text{trapézio da base}} \times h$$

O que se tem em comum nos quatro prismas cujos volumes determinamos? *O volume de todos eles é igual ao produto da área da base pela altura.*

Os prismas que vimos nesta unidade são todos prismas *retos:* suas arestas laterais são perpendiculares às bases e formam faces todas retangulares.

Em um prisma *oblíquo*, também existem duas faces paralelas e idênticas (bases). Mas as arestas que ligam os pontos correspondentes das bases não são perpendiculares aos planos das mesmas. Por isso, elas formam faces que são paralelogramos (e não retângulos). Veja a figura.



A altura é dada por qualquer aresta lateral.

A altura é dada por um segmento perpendicular à base.

Volume de um prisma

Para prismas retos ou oblíquos, o volume é dado pelo produto da área da base pela altura.

Voltando à capacidade da piscina

Como estudamos o volume de um prisma a partir da área da base e também pela decomposição, você tem pelo menos dois caminhos naturais para o cálculo da capacidade da piscina:

a) Calcular a área da base da piscina (aqui base não é tomada no sentido da linguagem comum, com o significado de superfície de apoio, mas é a base da forma *prisma* que podemos reconhecer na piscina) e multiplicar essa área pela altura (do prisma representado pela piscina). Se você desenhou, na Atividade 11, a piscina apoiada sobre uma das laterais idênticas, vai compreender melhor o que é base e o que é a altura desse prisma. (Que tal voltar lá e conferir ou completar o desenho?)

b) Decompor o prisma associado à piscina em vários outros, e calcular o volume de cada um.

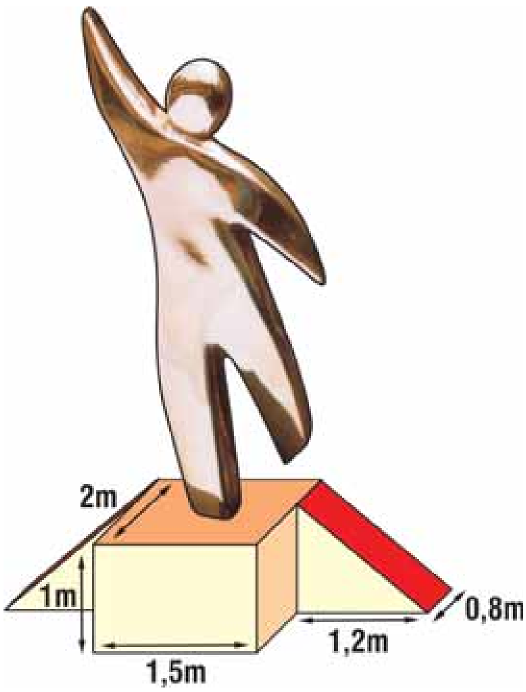
Em qualquer dos dois caminhos acima, será útil transformar os metros cúbicos em litros, que são usados para descrever capacidade.

Atividade 12

Calcule, por um dos processos mencionados acima (ou outro que você queira), a capacidade da piscina, quando cheia até 20cm da borda.

Atividade 13

A figura mostra um pedestal no qual as duas saliências laterais são idênticas. Calcule seu volume.



Piscinas – residenciais ou comunitárias?

Nesta unidade, estamos falando muito de uma piscina para a escola. São poucas as escolas que possuem uma, mas, na verdade, seria importantíssimo que todas tivessem. A natação é reconhecidamente um dos esportes mais completos e sua prática é muito benéfica para a saúde. Clubes comunitários deveriam existir em quantidade suficiente para atender à população, dispondo de piscina.

Por outro lado, as piscinas envolvem um problema delicado e que se agrava a cada ano – o da escassez de água de consumo no mundo. Relativos a esse tema, transcrevemos a seguir dois textos que podem gerar reflexões, atitudes e trabalhos sobre o tema em sala de aula.

Conferência na Suécia discute escassez de água no mundo

Secas devem atingir principalmente Ásia e África.

Representantes de mais de cem países deram início nesta segunda-feira em Estocolmo, na Suécia, a uma conferência para discutir soluções para o problema da escassez da água no mundo.

O principal debate da chamada Semana da Água será como equilibrar as necessidades da crescente população mundial e os limites dos recursos naturais.

Realizada anualmente, a reunião está chamando mais atenção este ano porque suas conclusões serão levadas à Cúpula Mundial para o Desenvolvimento Sustentável - a Rio+10 - em Johanesburgo, na África do Sul.

Na conferência do ano passado, os delegados - que incluem cientistas, economistas e representantes de governo e de empresas - divulgaram que 450 milhões de pessoas sofrem atualmente com a escassez de água em todo o mundo.

Redução

Segundo estimativas das Nações Unidas, se o consumo de água se mantiver nos níveis atuais, esse número pode aumentar para 2,7 bilhões até 2025 - o equivalente a um terço da população mundial prevista para esse ano.

Para amenizar o problema, seria necessário reduzir o consumo anual em pelo menos 10%.

No entanto, fatores como o aumento populacional, o desperdício e o intenso uso da água na agricultura e na indústria exercem grandes pressões sobre os limitados recursos hídricos disponíveis.

Menos de 3% da água da Terra é potável e a maior parte disso está na forma de gelo polar ou se encontra em camadas profundas e inacessíveis do planeta.

A quantidade de água potável que está acessível – seja em lagos, rios ou represas – representa menos de 0,25% do total.

As áreas sob maior risco de enfrentar a falta de água estão nas regiões semiáridas da Ásia e da parte da África ao sul do deserto do Saara.

12 de agosto, 2002 - Publicado às 11h48 GMT
BBC.BRASIL.COM

A possível futura escassez de água doce que existe na terra é a principal preocupação das autoridades

Rosana Camargo
Mestra e Doutoranda em Engenharia Mecânica pela USP
Professora da Área de Mecânica do CEFET-SP

Embora a água seja a substância mais abundante do nosso planeta, especialistas e autoridades internacionais alertam para um possível colapso das reservas de água doce, a qual está se tornando uma raridade em diversos países. A matemática é simples: a quantidade de água no mundo tem permanecido constante nos últimos 500 milhões de anos, enquanto cada vez mais pessoas utilizam água da mesma fonte. A procura aumenta, mas a oferta permanece inalterada. Em 24 anos, 1/3 da população da Terra poderá ficar sem água, se não forem tomadas medidas urgentes.

http://www.cefetsp.br/edu/sinergia/4p35.html

Resumindo

Nesta seção, você aprendeu a:

- Perceber a divisão das figuras não planas naquelas que são limitadas apenas por superfícies planas e nas que possuem alguma superfície curva;

- Identificar poliedros;

- Identificar prismas como uma subclasse dos mesmos;

- Construir estratégias variadas para o cálculo do volume de prismas retos ou oblíquos, cujas bases são retângulos, triângulos, paralelogramos ou trapézios;

- Construir estratégias variadas para o cálculo da superfície externa ou interna de um prisma;

- Identificar arestas laterais em prismas – que são perpendiculares ao plano da base em prismas retos e não perpendiculares ao plano da base em prismas oblíquos;

- Estabelecer analogias entre cálculo de áreas de polígonos e volumes de prismas;

- Decompor sólidos em outros menores;

- Decompor certos poliedros em prismas;

- Reconhecer polígonos associados aos prismas;

- Identificar dimensões de formas geométricas;

- Identificar o aspecto de um objeto sob diferentes pontos de vista e saber representá-lo por meio de desenho.

Seção 3

Transposição didática: trabalhando formas geométricas especiais em sala de aula

Objetivo da seção

Esperamos que, ao longo desta seção, você possa:

Conhecer e produzir situações didáticas adequadas à série em que atua, envolvendo figuras não planas gerais, sólidos, prismas e volumes.

Mais especificamente, você poderá:

- Refletir sobre o ensino de Geometria e de Medidas da 5ª a 8ª série.
- Identificar situações-problema que envolvam prismas, como a construção de uma piscina ou a construção de um ginásio de esportes fechado.
- Aprender a produzir um material concreto que permite identificar a dimensão real de um metro cúbico e sua equivalência com mil decímetros cúbicos.
- Usar construções e objetos destacados de revistas para determinar volumes; fazer desenhos e maquetes de modelos planejados; investigar sobre a dimensão de figuras encontradas na realidade: esculturas maciças, esculturas feitas a partir de folhas metálicas dobradas ou curvadas.

Chegamos ao momento no qual cabe a você planejar suas atividades para a sala de aula, levando em conta o que você aprendeu aqui. Como já se fez em unidades anteriores, um primeiro passo importante é refletir sobre o que significou para você esse aprendizado.

Não sabemos se a proposta curricular da sua escola, ou o seu livro didático, incluem o conceito de prisma e do seu volume na fase da 5ª a 8ª série.

Em geral, as propostas curriculares e os livros didáticos apresentam as figuras geométricas com alguma classificação, e exploram suas dimensões e propriedades. Desenvolvem o cálculo da superfície total de sólidos, ou o cálculo da superfície externa ou interna de um recipiente. Também é comum aparecer o cálculo do volume, pelo menos de uma figura com a forma de paralelepípedo retângulo – que é um prisma reto de base retangular. Julgamos importante a capacidade de visualização e representação da realidade e, para isso, procuramos desenvolver a capacidade de perceber as diferentes vistas (lateral, frontal e superior) de uma figura não plana e de saber desenhá-la, isto é, produzir uma representação plana da figura toda.

Consideramos que esses conceitos são relevantes para a resolução de problemas matemáticos e que nem sempre estão bem desenvolvidos nos livros didáticos. Procuramos explorá-los em situações contextualizadas, sem perder de vista a construção matemática desses conceitos.

Não houve a preocupação de esgotar cada tema. Por exemplo, o conceito de cilindros e pirâmides e a área lateral de um cilindro não foram explorados. Apesar disso, uma boa arte dos conteúdos propostos foram trabalhados aqui.

Em nosso modo de trabalhar, os conceitos aparecem e vão sendo explorados a partir de situações-problema. Você também pode fazer o mesmo, abandonando a ordem imposta pelo livro ou por seu planejamento. Explore com gosto situações-problema, o que despertará bastante o interesse dos seus alunos, e vá anotando no planejamento feito o que já foi trabalhado, e abrindo um lembrete para o que ainda falta.

Atividade 14 - Revendo o significado de conceito em ação

Na situação-problema apresentada, vários conceitos surgiram *em ação*.

Escreva o que você entende sobre conceitos, procedimentos e fatos matemáticos que surgem *em ação* e qual sua opinião a respeito.

(Você pode reler o Texto de Referência da Unidade 2 do TP 1, que tratou desse tema. Ou rever um exemplo, dado na seção 2 da Unidade 4 do TP1, no quadro *Um recado para a sala de aula*).

Recado novo: uma razão para reler o exemplo mencionado acima

Ficar procurando coisas já vistas e passadas dá uma certa preguiça e pode parecer perda de tempo. Entretanto, trata-se de um dos procedimentos mais relevantes para a aquisição de conhecimentos. De fato, ao se deparar com um conceito pela primeira vez, você obtém uma idéia um pouco vaga sobre ele. Quando você torna a encontrá-lo em outra situação, a releitura do momento anterior e o confronto com o novo detona um processo mental que aprofunda sua compreensão do conceito e produz uma visão mais clara sobre seu significado. Lembre-se disso!

Atividade 15

a) O conceito mais trabalhado nesta unidade, o de prisma e do seu volume, originou-se de uma situação-problema. Faça alguns comentários a respeito, como: isso tornou o assunto mais significativo? Mais interessante? Mais difícil?

b) O prisma trabalhado, associado à forma de uma piscina, surgiu numa posição nada convencional: as bases, em vez de serem, uma, o ponto de apoio do prisma em um plano horizontal, e a outra, o seu topo ou tampa, eram as paredes laterais da piscina. Em sua opinião, isso contribui para quê?

Vale a pena lembrar de dois pontos que ressaltamos no TP 1, Unidade 3, seção 3, como fatores que podem levar a uma ressignificação dos conceitos:

- A apresentação de aspectos que desestabilizam suas concepções anteriores a respeito. (Por exemplo, no conceito de porcentagem, apresentamos novos aspectos, que levaram a ultrapassar certa visão restritiva e errada; nesta unidade, entre os conceitos que procuramos esclarecer, está o de dimensão de formas geométricas).

- A apresentação de aspectos e procedimentos diversificados a respeito do conceito, relacionados à Teoria dos Quadros, apresentada no Texto de Referência da Unidade 5 do TP2.

Atividade 16

Reveja as atividades 8 (sobre dimensões) ou 15b (sobre prisma em posição não convencional) e reflita sobre a relação entre elas e os dois itens acima.

Essa maneira pela qual apresentamos conteúdos matemáticos tem a ver com uma reelaboração dos mesmos - do saber puro e sistematizado para um conhecimento mais dinâmico e adaptado à vida real, que surge *em ação,* como já dissemos. Novamente lembramos que uma outra reelaboração cabe a você, no sentido de encontrar formas adequadas e interessantes para levar esse conhecimento aos seus alunos. Estamos falando da transposição didática que você deverá fazer. Lembre-se dos pontos que mencionamos no TP 1, Unidade 3, seção 3:

Para que você possa fazer isso, é importante considerar:

- *Que situações-problema podem se constituir em desafio para os alunos?*
- *Como julgar, nessas situações: a relevância, o grau de motivação do aluno em resolvê-las, a abrangência dos conceitos envolvidos, a capacidade que têm de propiciar questões e mesmo respostas variadas?*
- *Quais os vários aspectos do conceito matemático envolvido que se fazem necessários em outras situações e contextos?*
- *Quais as relações entre esses vários aspectos?*

Quais conhecimentos seus alunos já possuem a respeito? É preciso garantir que a situação não seja simples demais nem tão complexa a ponto de ser desanimadora.

Situação-problema adequada à sala de aula

Você deve procurar uma situação-problema que envolva prismas. Pode propor várias aos seus alunos, verificando qual desperta maior interesse:

a) a construção de uma piscina;

b) a construção de um ginásio de esportes fechado;

c) outras sugestões.

Na construção de um ginásio de esportes é possível que o teto tenha a forma de uma superfície cilíndrica. Veja quantos aspectos poderiam ser trabalhados:

a) a decomposição do ginásio em duas partes: uma, inferior, com forma de prisma, e outra, superior, como metade de um cilindro (cortado perpendicularmente à base);

b) fazendo a maquete, eles perceberão que a superfície cilíndrica tem dois tampos laterais, que correspondem a meio círculo cada um. Será uma oportunidade de trabalhar a área do círculo;

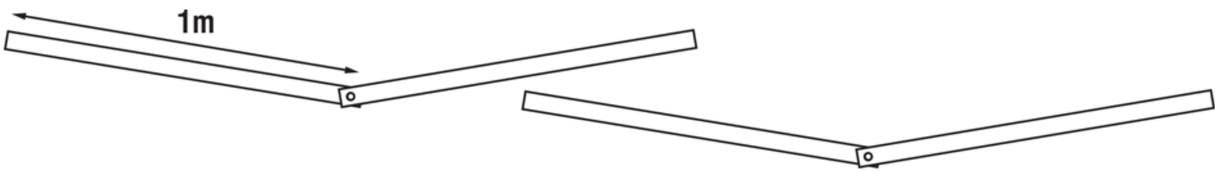
c) quanto ao volume do cilindro, você poderá despertar-lhes a curiosidade questionando: será que vale uma fórmula análoga à do volume do prisma (área da base x altura)?;

d) você pode aproveitar para propor que verifiquem isso experimentalmente: Podem encher uma latinha cilíndrica com grãos de arroz, depois virar o arroz em um recipiente graduado em cm^3. Verifiquem se o número obtido é aproximadamente igual ao dado por aquele produto.

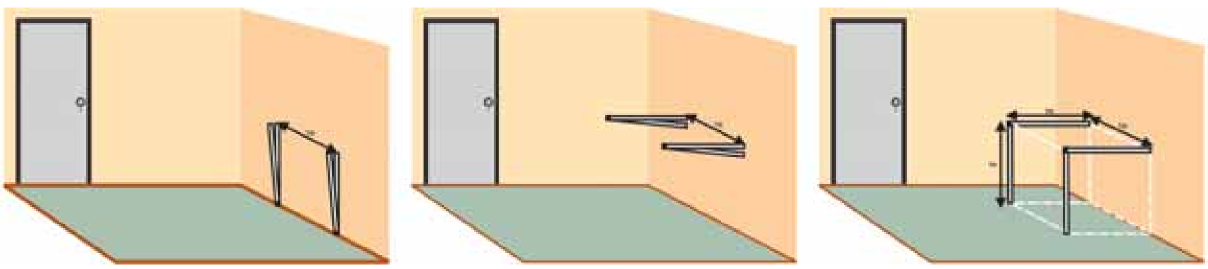
Um material didático esclarecedor

Veja o que o professor Reinaldo fez em sua classe:

Ele preparou 4 varetas de 1 m de comprimento, articuladas duas a duas. Ou seja, elas são ligadas nas extremidades por parafusos não muito apertados, que permitem abrir ou fechar o ângulo entre as duas varetas.

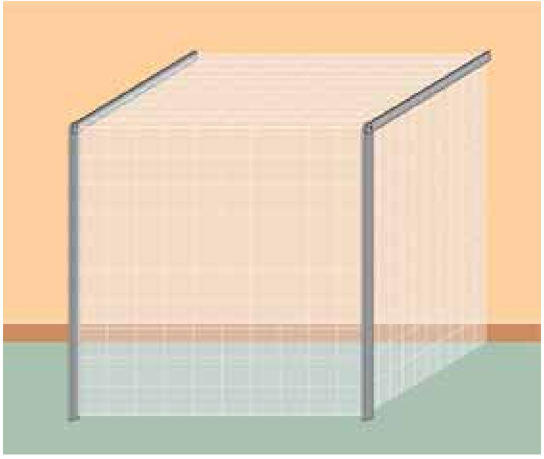


Fixou-as numa parede, a 1m de altura e distando 1m entre si:



Veja como elas ficam fechadas e como ficam abertas. Afinal, para que serve essa invenção? Você deve ter percebido que o espaço delimitado corresponde exatamente a $1m^3$.

Para ver a equivalência com os 1000 litros, ele tomou 6 metros de plástico transparente com 1 metro de largura e, com o auxílio dos alunos, quadriculou-os em quadrados de 10cm de lado. O melhor para isso é usar uma caneta de retroprojetor, cuja tinta permanece mais. Veja o espaço das varetas recoberto com esse plástico.



Na verdade, isso mostrou a equivalência entre 1 metro cúbico e 1 mil decímetros cúbicos. Mas o litro, você sabe, é definido como a capacidade de um dm^3, portanto 1 metro cúbico é igual a 1000 litros. Contudo, afirmar essa equivalência entre o decímetro cúbico e o litro é muito abstrato. Para relacioná-la com seus conhecimentos do mundo físico e social, nada melhor que uma simples experiência. Utilize um cubo acrílico com 1dm de aresta. Você pode também mandar fazê-lo em lata. Depois, pegue qualquer recipiente do mundo cotidiano com capacidade de 1 litro. Encha-o de água e despeje no decímetro cúbico - os alunos não se esquecerão da equivalência verificada.

Para ficar claro para os alunos o que é um decímetro cúbico, você pode recorrer a um material que existe em muitas escolas: o material dourado. O cubo maior desse material é um sólido cujo volume é 1 decímetro cúbico.

Ações no cotidiano escolar

As ações a serem desenvolvidas no cotidiano escolar, visando sedimentar melhor os conhecimentos adquiridos, não devem ser exercícios rotineiros e com pouco significado. De acordo com o que foi tratado, essas atividades podem constar de:

a) determinação de volumes em construções destacadas de revistas de arquitetura;

b) desenhos e maquetes de modelos planejados;

c) investigação sobre a dimensão de figuras encontradas no dia-a-dia: esculturas maciças, esculturas feitas a partir de folhas metálicas dobradas ou curvadas (desprezando-se a espessura) etc.

Lembre-se ainda de que trabalhos em pequenos grupos podem ser estimulantes.

E pense na idéia de um «dossiê», ou álbum de matemática dos alunos. Devem ser individuais. Cada aluno coloca no seu suas próprias produções, artigos ou figuras que tenha achado interessante sobre matemática. Projetos envolvendo figuras espaciais são muito apropriados para o dossiê.

Resumindo

Nesta seção, você teve oportunidade de:

a) refletir sobre o estudo de figuras planas e não planas, volumes e superfícies para as séries 5^a a 8^a;

b) identificar situações-problema, adequadas aos alunos, envolvendo formas geométricas (construção de piscina, de ginásio de esportes);

c) conhecer um modelo simples de metro cúbico, útil para a sala de aula;

d) conhecer idéias para ações no cotidiano escolar: uso de construções e objetos reproduzidos em revistas para cálculo de volume, elaboração de maquetes, reconhecimento da dimensão de formas;

e) refletir sobre a adequação, no processo de ensino e aprendizagem, de procedimentos como:

- formação de conceitos *em ação,*

- uso de situações-problema,

- apresentação de aspectos que desestabilizam as concepções anteriores do aluno a respeito de um conceito,

- apresentação de aspectos e procedimentos diversificados a respeito de um conceito.

Leituras sugeridas

LINDQUIST, M. M. e SHULTE, A.P. (org). *Aprendendo e ensinando geometria*. São Paulo: Atual, 1994.

O livro é constituído de uma série de textos sobre geometria, escritos por autores variados. Há textos mais teóricos mas, de modo geral, todos apresentam propostas de atividades práticas. Eles se englobam, segundo a temática, em cinco partes:

- Perspectivas.
- Resolução de problemas e aplicações: um panorama.
- Atividades em foco.
- A geometria e outras partes da Matemática.
- Formação de professores.

As atividades são adaptadas a diferentes níveis de escolaridade.

KALEFF, A.M.M.R. *Vendo e entendendo poliedros*. Niterói: EdUFF, 1998.

Embora essencialmente calcado em propostas de atividades para o ensino da geometria, o livro apresenta também considerações teóricas e metodológicas. É dividido em cinco partes:

- Planificações e dobraduras de papel.
- Atividades com cubos.
- Atividades com quebra-cabeças não planos.
- Atividades com varetas e canudos.
- Atividades com canudos, quebra-cabeças e outros materiais.

As atividades são muito interessantes para o aluno e constituem-se em rico manancial de idéias para o professor explorar em sala de aula. Como ocorre no livro anterior, são adaptadas a diferentes níveis de escolaridade.

Bibliografia

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: Matemática (5ª a 8ª série). Brasília: MEC/SEF, 1998.

CASTRUCCI, B. *Lições de geometria elementar*. 7. ed. São Paulo: Duplicadora Forte, 1962.

LIMA, Elon. *Meu professor de matemática*. Rio de Janeiro: IMPA/VITAE, 1991.

LINDQUIST, Mary Montgomery e SHULTE, Albert P. (org). *Aprendendo e ensinando geometria*. São Paulo: Atual, 1994. p. 308.

SITES CONSULTADOS:

ARAÚJO, O. T. *Arte*. In: revista “Isto É” , 22 de maio de 1996. Disponível na Internet, em “Isto É – edições anteriores”.

HART, G.W. – *Polyhedra Names*. Disponível em: <http://mathforum.org.dr.math/faq.polygon.names.html>

OLSHEWSKY, G. – *What are polyhedra?* Disponível em: <http://members.aol.com/Polycell/what.html>

PRISM. Disponível em: <mathworld.wolfram.com/Prism.html >

BBC.BRASIL SAÚDE & TECNOLOGIA.com. 12 de agosto, 2002 - Publicado às 11h48 GMT.

CAMARGO, R. *A possível futura escassez de água doce que existe na terra é a principal preocupação das autoridades*. Disponível em: <http://www.cefetsp.br/edu/sinergia/4p35.html>

Texto de referência

Aprender e ensinar Geometria: um desafio permanente

Regina da Silva Pina Neves[1]

Introdução

Pesquisadores em Educação Matemática têm buscado, nos dias atuais, novas estratégias para o ensino e para a aprendizagem da geometria. O objetivo desses estudos é a democratização do acesso a esse saber, haja vista o consenso entre docentes e discentes em relação à sua não-aprendizagem pela maioria dos que iniciam seu estudo. Diante dessa problemática, acompanhamos discussões e sugestões acerca da utilização de diversos instrumentos mediadores, desde o uso da dobradura até os softwares educativos. Essa diversidade tem como função criar o maior número possível de situações de aprendizagem e, com elas, oferecer diferentes representações de um mesmo objeto geométrico, aumentando as possibilidades de acesso ao saber geométrico.

Considerando essa situação, faz-se necessária a organização constante de redes de discussão e ação entre professores, futuros professores e pesquisadores a fim de se planejar, testar e propor situações de aprendizagem em geometria que valorizem a multiplicidade de instrumentos mediadores e a construção de conceitos, sendo esses, importantes ferramentas para a resolução de situações-problema.

O estabelecimento de tais redes apenas será possível com a divulgação de estudos já realizados, bem como, de estudos em andamento. Ampliando assim, a informação quanto à temática entre os professores de matemática e a comunidade em geral. Deste modo, o presente texto visa fomentar o debate, estabelecendo possibilidades de conhecimento, discussões e novas ações na prática pedagógica da geometria.

1. A geometria como conhecimento matemático: origens e trajetória

Desde os tempos mais remotos, o homem já se inquietava com os fatos matemáticos, lançando-se em um caminho de descobertas e de dúvidas. Da noção de número ao cálculo infinitesimal, às geometrias não-euclidianas, construiu seu saber por meio de erros e acertos. Saber esse questionado em épocas posteriores e muitas vezes posto em terra; em algumas delas, apenas tratavam-se de batalhas intelectuais sem consenso. Assim, os conhecimentos foram colocados à prova quando novos problemas surgiram, imprimindo um movimento de permanente construção do saber matemático concebido pelo homem.

---

1 Regina da Silva Pina é Licenciada e Especialista em Matemática pela Universidade Federal de Goiás, Mestre em Educação – área de concentração Educação Matemática e Novas Tecnologias pela Universidade de Brasília. É docente na Fajesu nos cursos de Pedagogia e Matemática e Consultora do Programa Gestar – Formação de Professores de Matemática do MEC.

Analisando essa construção, observa-se que, para a civilização egípcia, a matemática apresentava caráter estritamente prático e imediato. Os conhecimentos matemáticos, em especial os geométricos, foram gerados tendo uma aplicação motivadora para a descoberta e a validação, mas nem todas as civilizações tiveram problemas imediatos como motivadores. A civilização grega, por exemplo, devido à sua estrutura política e organizacional, ofereceu aos pesquisadores em matemática outra possibilidade de concebê-la, partindo do plano prático imediato para o abstrato futuro em que a aplicabilidade não estava visível. Desse modo, retratando a concepção dos povos que a tomaram como desafio, a matemática foi se desenvolvendo, tendo como alicerces "concepções" que influenciaram e influenciam a pesquisa matemática e a prática docente da atualidade.

No longo caminho em busca dos alicerces para a pesquisa matemática, três correntes consolidaram-se com diferentes concepções de Matemática.

> "O *Logicismo:* para os logicistas, a matemática é vista como um ramo da Lógica. Desse modo, os conceitos matemáticos passam a ser formulados como conceitos lógicos, e os teoremas matemáticos são demonstrados por regras previamente estabelecidas pela Lógica; o *Intuicionismo: os* princípios que norteiam a corrente intuicionista são radicalmente diferentes daqueles assumidos pela escola logicista, deixando de lado, assim, grande parte da matemática tradicional. Os intuicionistas consideram apenas as partes obtidas por processos de construção efetiva; e o *Formalismo:* concepção fundamentada nos ideais do positivismo – neutralidade do saber. Para a corrente formalista, a matemática ocupa-se com sistemas simbólicos formais, ou seja, ela é vista como um conjunto de desenvolvimentos abstratos, nos quais os termos são simbólicos e as afirmações são fórmulas envolvendo esses símbolos. Dessa forma, o fundamento da Matemática constitui uma coleção de símbolos e um conjunto de operações feitas com eles." (Pavanello, 1989).

2. Entendendo a realidade do ensino e da aprendizagem da geometria

2.1 A concepção formalista na Matemática

Para essa corrente de pensamento, a matemática é somente um "jogo formal" em que os símbolos desempenham papéis bem definidos segundo regras lógicas, não se preocupando com a interpretação. Bertoni (1995) afirma que:

> "Modelos formais que predominam na matemática acadêmica disponível não revelam a origem desse conhecimento, não dizem quais foram a necessidade, a motivação ou a intuição iniciais. São modelos que tomam como ponto de partida definições que são, na verdade, pontos de chegada de um longo processo de conhecimento. Esses modelos não revelam para que é feita a matemática, nem como foi feita."

Com essa visão, relegou-se para o segundo plano a maioria da população mundial que não conseguiu, em tempo hábil, dominar a linguagem simbólica da qual a matemática se revestiu e elegeu os poucos seres com habilidade para esse tipo de linguagem como os eleitos, difundindo o mito da "matemática para poucos", de a "capacidade cognitiva para a matemática ser inata", gerando assim, excluídos. A matemática passou a ser vista como algo abstrato, destinada a ser apreciada e desenvolvida apenas por "*... indivíduos eleitos, com especial talento e tendências inatas"* (Machado apud Pavanello, 1989, p. 67).

2.2 A influência do formalismo no ensino da matemática

Segundo Bertoni (1995):

> "Na década de 70, a influência do formalismo decai entre os matemáticos pesquisadores, mas amplia-se nos novos currículos da escola elementar e secundária, através do Movimento da Matemática Moderna no Ensino."

A concepção formalista está presente no dia-a-dia da sala de aula, definindo a postura de professor (mediador), os currículos escolares e o material didático, impondo uma linguagem rebuscada, repleta de símbolos. Segundo os postulados dessa corrente, a seleção dos mais fortes será feita naturalmente e os alunos são os únicos responsáveis pelo seu baixo rendimento escolar em matemática, legitimados pelo consenso da "matemática para poucos". A linguagem científica não sofreu nenhuma transposição no caminho da pesquisa matemática aos livros didáticos e aos planos de ação executados pelos professores em sala de aula. Assim, confunde-se saber científico[2] com saber escolar, exigindo do aluno (iniciante no estudo da matemática) um alto grau de compreensão e análise dos conteúdos.

A diferenciação entre o "pesquisador matemático" e o "educador matemático" é inexistente, admitindo-se que o domínio do saber científico da matemática é suficiente e necessário para a prática docente, desconsiderando todas as variáveis didático-pedagógicas que compõem o ato educativo.

Essa nova orientação foi seguida nos livros didáticos, nos cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática de todo o País. Assim, estava no ensino da matemática e, em especial, no da geometria, cada vez mais distante da criança e do adolescente a arte da criação e cada vez mais próxima uma matemática pronta em que o processo de aprendizagem por ensaio e erro ficava cada vez mais inexistente. Dessa maneira, as aulas de matemática deixaram de ser espaços propícios a descobertas e passaram a ser ambientes de repetições.

Entretanto, para ser construída, a matemática não só necessitou de um problema para estruturar-se, mas também gerou hipóteses, alimentou dúvidas, viveu incertezas, tateios, imprecisões, enfim, cometeu erros e acertos no movimento de sua constituição como ciência. Ao negar essa oportunidade de percorrer os caminhos na busca do conhecimento, matamos o que há de mais valioso no processo de aprendizagem: "o ensaio e o erro" na construção dos conceitos.

Logo, o movimento da matemática moderna instituiu, na prática, em sala de aula, uma dinâmica contrária à própria concepção da ciência Matemática, o que vem elucidar as dificuldades de acesso ao saber matemático, ou seja, a legião de excluídos.

2.3 O formalismo e o ensino da geometria

Na prática dessa nova orientação, encontraram-se dificuldades quanto à adequação da geometria, pois não existindo mais a preocupação em construir uma sistematização com base em noções primitivas, empiricamente elaboradas, testadas, ocorre uma "algebrização" da geometria, distanciando-se da geometria prática (concepção egípcia), aproximando-se da geometria formal (concepção grega). Essa orientação, aliada ao despreparo dos professores, contribuiu para que a geometria não fosse ensinada. Os professores, não conseguindo transpor para o contexto didático as novas orientações, abandonaram a anterior, passando a enfatizar, nas escolas, o ensino da álgebra em detrimento do ensino da geometria. Essa disciplina, quando ministrada, era apenas uma ferramenta do pensamento algébrico.

2 PAIS, L.P. Transposição Didática. In MACHADO, S. (Org.) Educação Matemática: uma introdução. São Paulo: PUC, 1999.

Assim, percebemos, na maioria das escolas, a opção pelo "abandono do ensino de geometria"[3] e a substituição do desenho geométrico pela educação artística, não ponderando a vinculação geometria-artes, perdendo-se a oportunidade de um trabalho interdisciplinar. No entanto, constatamos uma realidade oposta nos estabelecimentos de ensino da Rede Privada onde a geometria continuou e continua a ser ensinada. Podemos citar, como exemplo de Escolas Públicas que não vivenciaram essa realidade, as instituições militares[4] .

Todos esses fatos geraram uma situação quase caótica do ensino e da aprendizagem da geometria ao longo das últimas décadas. Tal situação é denunciada por alguns pesquisadores como Perez (1991) que, ao pesquisar as condições do ensino e da aprendizagem da Geometria no Ensino Fundamental e no Médio, alerta para a falta de metodologias, nesses níveis de ensino, o que ele analisa como um reflexo dos cursos de formação de professores com deficiências nessa área.

Lorenzato (1995) aponta duas evidências como possíveis causas para a omissão geométrica. Seriam elas: a falta de conhecimentos geométricos por parte dos professores e a exagerada importância que o livro didático ocupa no ambiente escolar.

Pais (1999) relata que a geometria limitou-se a um lugar bem obscuro no currículo escolar, motivado principalmente pelo movimento da matemática moderna o qual acabou determinando mudanças profundas tanto no processo de formação de professores e na redação de livros didáticos, quanto na valorização educativa do conteúdo matemático. Essa situação tão caótica no ensino da matemática veio contribuir para a consolidação da educação matemática como área de pesquisa.

Assim, preocupados com essa situação e influenciados pelas novas concepções acerca da aprendizagem, geradas da pesquisa da Psicologia Cognitiva e da difusão dos trabalhos de J. Piaget, L. S. Vigotski, G. Vergnaud entre outros, surge, em todo o mundo, discussões sobre as reais causas da exclusão ao saber geométrico, bem como produções teóricas e metodológicas que visam a resgatar o ensino da geometria.

3. Aprendendo e ensinando geometria

Quando nos referimos à geometria, falamos do espaço que nos cerca, bem como dos objetos presentes em todos os contextos. Enfim, de algo vivo que se apresenta a todo instante. Nesse sentido, questionamos o "diálogo" com a geometria feito apenas por meio de fórmulas e definições. A própria natureza do conhecimento geométrico é oposta a esse trabalho. Seu conhecimento é parte de nossas ações, de nosso olhar, de nossas experiências e de nossa observação. Logo, não poderemos falar de geometria para alguém, devemos deixar que os indivíduos/alunos sintam, vejam, observem, deduzam, validem e sistematizem a geometria presente à sua volta.

3 Termo utilizado por Pavanello (1989).

4 Há forte ligação entre a geometria e as diversas atividades de cunho militar, como a prática da orientação em campo de treinamento, os estudos relacionados a projéteis, à logística, entre outras.

> "A geometria é espaço ávido... aquele espaço no qual a criança vive, respira e se move. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar, conquistar e ordenar para viver, respirar e nele mover-se melhor." (Freudenthal apud Smole, 1996, p.105).

Devemos compreender a formação de conceitos geométricos, as metodologias mais condizentes e quais os caminhos para se elaborar um conceito geométrico. Nas seções precedentes, discutimos a supremacia da matemática formalista/matemática moderna, sua influência na geometria e as conseqüências nos cursos de formação de professores/salas de aulas. Com as discussões acerca da educação matemática, a reação começa a acontecer e diversos documentos comprovam essa tentativa, tais como as National Council of Teachers of Mathematics – NTCM e, no Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN.

O renascimento e a reformulação do ensino de geometria não é apenas uma questão didático-pedagógica, é também epistemológica e social. A geometria exige do aprendiz uma maneira específica de raciocinar, uma maneira de explorar e descobrir. Não é suficiente conhecer bem a aritmética, álgebra ou análise para conseguir resolver situações-problema em geometria. (Vergnaud apud Fainguelernt, 1999, p.50).

Ressaltamos, também, que a geometria desempenha papel integrador entre as diversas partes da matemática, além de ser um campo fértil para o exercício de aprender a fazer e aprender a pensar, motivos que devem ser usados na argumentação de sua defesa, tanto nos currículos como nos centros de pesquisas. Desse modo, estudos voltados para a discussão da aprendizagem geométrica e para a sugestão de metodologias que promovam essa aprendizagem surgem em vários pontos do mundo, como reação à situação instaurada.

No livro "Aprendendo e Ensinando Geometria[5]", podemos observar a iniciativa dos pesquisadores na busca do entendimento e na proposição de soluções para a questão. Uma construção teórica difundida no livro é a proposta dos Van Hiele[6] para o pensamento geométrico.

Nesse modelo, prevê-se uma hierarquia, uma progressão de níveis no desenvolvimento:1º) Reconhecimento; 2º) Análise; 3º) Abstração; 4º) Dedução; e 5º) Rigor. Afirma-se que a passagem de um nível para outro depende mais dos conteúdos e dos métodos de instrução do que da idade; ressaltando que nenhum método de ensino permite ao aluno saltar um nível, porém, em alguns métodos, acentua-se o progresso, do mesmo modo que se pode retardar ou até impedir a passagem de um nível para outro. Nesse sentido, observa-se, na criança, uma perspectiva estruturalista piagetiana na concepção do desenvolvimento da geometria. Como proposta metodológica, esses autores sugerem aos docentes algumas ações de modo que o aluno possa progredir de um nível para outro. São elas: *interrogação/informação; orientação dirigida; explicação; orientação livre* e *integração*.

5 LINDQUIST, M.M.; SHULTE, A.P. (org). Aprendendo e ensinando geometria. São Paulo, 1994.

6 Dina Van Hiele-Geldof e Pierre Van Hiele.

Atualmente, no campo do ensino e da aprendizagem da geometria, nos estudos liderados por Rina Hershkovitz e Abraham Arcavi no Weizmann Institute (Israel) e na Berkley University (EUA), podem-se constatar que:

> "As interações do aprendiz com o meio desempenham papel ativo no processo ensino-aprendizagem da geometria e estão baseadas na teoria da concepção do espaço pela criança, bem como nos aspectos psicológicos desses processos." (Arcavi apud Fainguelernt, 1999, p.54).

Segundo esses autores, nos processos de ensino e de aprendizagem da geometria, dois enfoques importantes devem ser considerados: o primeiro, o da geometria como uma ciência do espaço; e o segundo, o da geometria como uma estrutura lógica.

Esses aspectos estão ligados, uma vez que, para compreender a geometria como uma estrutura lógica, é preciso ter dominado alguns níveis da geometria como ciência do espaço.

Segundo Fischbein (apud Smole, 1996), é necessário que as atividades propostas possibilitem imaginar, explorar, criar, levantar hipóteses e argumentar, levando os aprendizes a vivenciarem a construção dos conceitos de geometria. Desse modo, é possível que se esclareçam idéias abstratas, facilitando a comunicação de idéias matemáticas.

As pesquisas em geometria vêm sendo amplamente estimuladas por novas idéias, procedentes de outras áreas, incluindo a Ciência da Computação (os fractais), identificando a importância de desenvolver uma educação visual adequada e uma análise das diferentes representações surgidas na solução de uma mesma situação proposta. Nessas pesquisas, o estudo da geometria é considerado fundamental para o desenvolvimento do pensamento espacial e do raciocínio estimulado pela visualização, necessitando, para isso, recorrer à intuição, à percepção e à representação que são fundamentais para a leitura do mundo e da matemática.

Para Vergnaud (apud Fainguelernt, 1999), o conceito de representação é essencial para analisar a formação de concepções e competências e, conseqüentemente, para analisar a formação e os processos de transmissão do conhecimento.

É fundamental para a elaboração de um conceito, partir da percepção e da intuição de dados concretos e experimentais; explorar as representações(linguagem natural, linguagem computacional, desenhos, esquemas, tabelas, álgebra) e as aplicações; e desenvolver o raciocínio lógico para, então, chegar aos processos de abstração e de generalização.

As diferentes representações são estímulos para que tanto o aluno quanto o professor usem a criatividade e a imaginação presentes na construção conceitual. Portanto, o conceito é construído nas diversas situações de aprendizagem mediada pelos instrumentos, através da manipulação do objeto geométrico nas suas diferentes representações.

Aprender um conceito geométrico é percebê-lo em diferentes situações e colocá-lo em ação numa situação em que se apresente, relacionando-o àqueles já internalizados pelo indivíduo. É percebê-lo em constante transformação, sendo modificado, melhorado à medida que o indivíduo, de posse de suas propriedades, lança-se na descoberta de outros conceitos.

Quanto ao conceito geométrico, é importante esclarecer algumas características:

• *é provisório*, não existe um conceito pronto, pois a cada experiência, a cada situação ele é modificado, ampliado;

• *está em processo de transformação,* a cada experiência, a cada novo conceito, o anterior é transformado;

• *pertence a uma rede conceitual,* é parte de uma ampla rede de conceitos que interliga todos os conceitos que conhecemos, uns em fase bem avançada de compreensão, outros, em fase inicial;

• *é muito mais do que consigo representar,* seja por uma definição escrita, pictórica ou verbal;

• *é elemento cultural,* existe no âmbito das relações sociais;

• *está estritamente ligado ao objeto e à representação,* bem como aos elementos matemáticos próprios da geometria, tais como: espaço, forma, medidas, grandezas, proporcionalidade, entre outros.

Para a apropriação efetiva dos conceitos geométricos, a estrutura do trabalho pedagógico deve ser reconstruída. Trata-se de fornecer aos alunos um conjunto de situações didáticas variadas em que ele terá a oportunidade de "dialogar" com o saber geométrico em diferentes representações e, a partir daí, com o auxílio da visualização, elaborar diferentes representações mentais. O que iniciará o processo de elaboração e reelaboração que culminará na assimilação do conceito.

Se o objetivo é "dialogar" o conceito "ângulo", deve-se apresentar ao aluno diferentes situações nas quais esse conceito se apresenta. Na abertura de uma porta, no deslocamento dos ponteiros do relógio, nos traços em que se organiza o estacionamento dos carros, nas dobraduras com papel, nos movimentos do corpo que se desloca para um lado e para outro, em situações de manuseio dos instrumentos de desenho (compasso, régua, transferidor), em situações com softwares. Tudo isso fornecerá uma variedade de representações do que seja "ângulo". Cada situação, com seus instrumentos específicos, implicará uma atividade mental diferenciada e uma exigência visual e manual diferentes que juntas fornecerão os vários registros de representação do conceito "ângulo", que possibilitarão a formação inicial do conceito, já que o conceito (este) estará sempre em constante "mutação".

O que acontece nas situações didáticas "padrão", observadas em sala de aula, é a apresentação, por parte do professor, de uma única representação do que seja o conceito de "ângulo". E, justamente, a que carrega mais elementos abstratos: as definições e as generalizações. Tal proposta não tem contribuído para a construção de conceitos geométricos de nossos alunos.

3.1 O papel do desenho no ensino e na aprendizagem da geometria

Quando se fala da importância da representação na formação de conceitos, deve-se considerar o desenho e seu papel na estrutura pedagógica vigente e os cuidados requeridos em seu uso. O desenho que o aluno vê no quadro de giz ou no livro representa um objeto geométrico, elaborado com base nas habilidades do professor ou dos recursos gráficos de uma editora, o que implica possíveis problemas de perspectiva e traço. No contexto escolar, o desenho é utilizado em várias disciplinas, mas em geometria seu uso é mais efetivo. Ele ilustra noções abstratas e gerais, funcionando como "signo" auxiliar na compreensão dos objetos.

Nas últimas décadas, o desenho foi esquecido, motivo pelo qual se observa uma postura não muito séria em relação aos desenhos, tanto no quadro de giz como nos livros didáticos, os quais, na maioria das vezes, carregam deficiências prejudiciais à visualização.

"O desenho faz com que o aluno adquira uma nova linguagem que amplia seu horizonte, exprime seus sentimentos e lhe permite expressar imagens que de alguma forma puderam chegar à sua consciência, ou seja, enquanto desenha, a criança pensa no objeto de sua imaginação como se estivesse falando do mesmo." (Vigotski apud Smole, 1996, p. 87).

Percebendo a importância do desenho nos processos de visualização e de representação é que devemos buscar práticas pedagógicas que o valorizem e respeitem sua função na visualização. Daí, a necessidade de mudança na prática pedagógica, permitindo uma vivência da geometria, baseada em uma educação visual, variedade de situações e da manipulação de objetos e de desenhos.

4. Considerações Finais

As diversas situações de aprendizagem e a manipulação de variados instrumentos auxiliam o aluno na passagem de uma representação a outra e assim, estimulam e enriquecem o processo de análise, de comparação, de conjectura e de conclusão que culmina no aprendizado.

Desse modo, faz-se necessário na prática educativa da geometria a criação de variadas situações de aprendizagem, utilizando diversos instrumentos mediadores proporcionando, inicialmente, a manipulação de materiais que privilegia a intuição e a experiência para, em seguida, a sistematização e generalização. Contribuindo, desse modo, para a passagem natural de uma geometria como ciência do espaço para uma geometria como estrutura lógica, aumentando consideravelmente, as oportunidades de aprendizagem.

5. Referências Bibliográficas

BERTONI, N. E. *Um novo enfoque para o saber matemático do professor*. In: jornanda de reflexão e capacitação sobre a matemática na educação básica de jovens e adultos. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental: p. 15.

CROWLEY, M. *O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico*. In: SHULTE, A.; LINDQUIST, M. (Org.). Aprendendo e ensinando geometria. São Paulo: Atual, 1994.

DAMM, R. F. *Registros de representação*. In: MACHADO, S. (Org.). Educação matemática: uma introdução. São Paulo: PUC, 1999.

FAINGUELERNT, E. K. *Educação matemática*: representação e construção em geometria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

LORENZATO, S. *Por que não ensinar geometria?* Educação matemática em Revista, n. 4, p. 4-13, 1995.

PAIS, L. P. *Transposição didática*. In: MACHADO, S. (Org.). Educação matemática: uma introdução. São Paulo: PUC, 1999.

_______. *Educação matemática:* uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PAVANELLO, R. M. *O abandono do ensino da geometria:* uma visão histórica. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, 1989.

________. *Formação de possibilidades cognitivas em noções geométricas*. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, 1995.

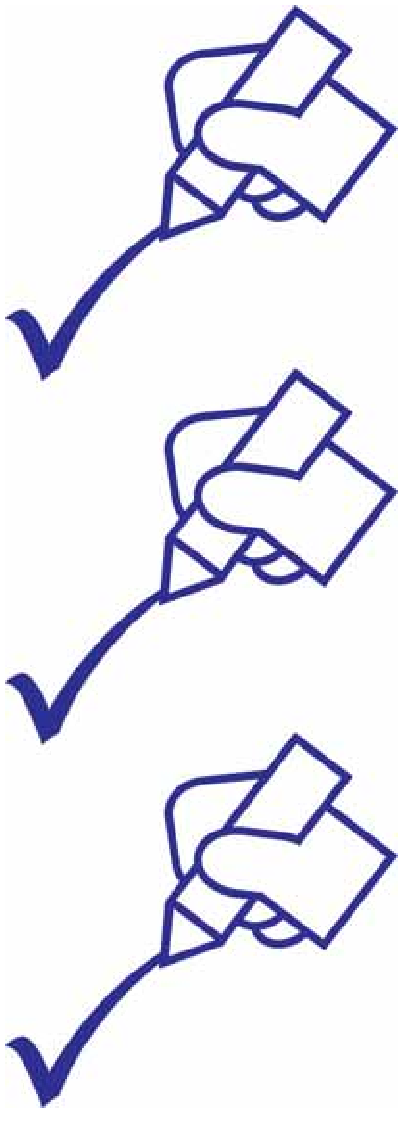
SMOLE, K. C. S. *A matemática na educação infantil:* a teoria das inteligências múltiplas na prática escolar. Porto Alegre: Artes Médicas, 1966.

Atividades

a) Reflita em que sentido a visão da aprendizagem da geometria dos Van Hiele é baseada na teoria piagetiana.

b) Busque no texto indicadores sobre a importância do desenho na aprendizagem da geometria. Reflita sobre como você pode melhor explorar o desenho espontâneo em suas aulas.

Solução das atividades

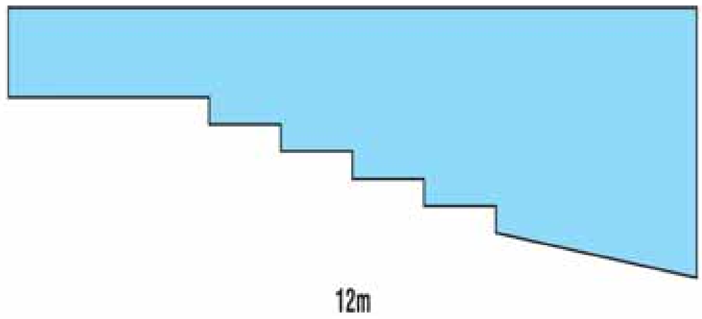


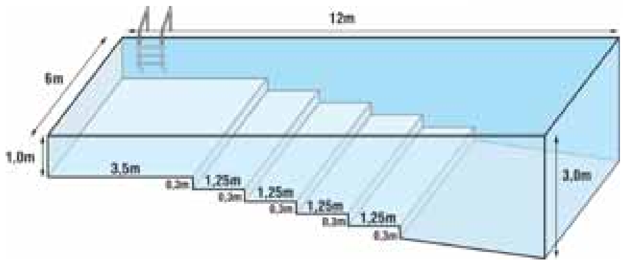
Solução das atividades

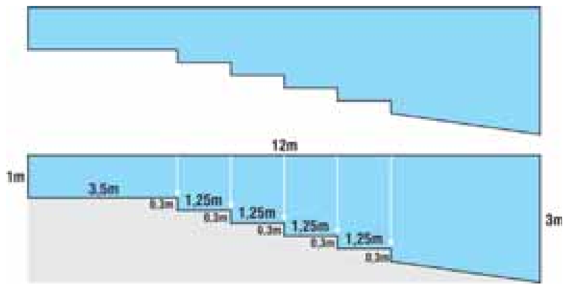
Atividade 1

As respostas são pessoais.

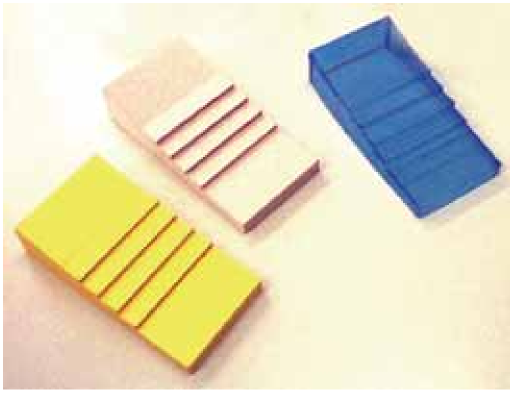
a) Para a piscina que nós pensamos, um esboço de desenho seria:







Maquete da piscina que planejamos:



b) Veja resposta da atividade 12: 116,85m^3. Em litros: 116.850 litros.

c) Para a piscina que nós pensamos, essa questão foi resolvida no texto, logo após a Atividade 11. Vimos que o volume de água estaria entre 57,6m^3 e 201,6m^3.

Atividade 2

a) Resposta pessoal. É importante que a figura desenhada seja fechada, só tenha faces planas poligonais que se encontram, duas a duas, nas arestas.

b) As respostas podem variar um pouco, já que os objetos não são formas matemáticas puras. Devem ser mencionados:

A arandela de vidro, com a vela dentro; a pirâmide invertida; o cesto de papel; o livro dentro do cesto; a caixa com tampa; os esquemas de casa. A casa grande e a casinha com orifício redondo são composições de poliedros, mas não são poliedros. A casa com porta e duas janelas, a menos de pequenos detalhes, está muito próxima de forma poliédrica.

Seguramente, não são formas poliédricas: os anéis, o toro (forma de pneu), a peça de encanamento, a telha, a concha, a vasilha arredondada, a casa tipo iglu, o tanque, a cúpula (parte de cima do abajur).

Atividade 3

a) Arandela, esquemas de casas, caixa com tampa. A menos de detalhes: casa com porta e duas janelas.

b) São bases:

Na arandela: a base e o topo (na verdade, deveriam ser fechados).

No esquema de casa: as duas faces pentagonais (só uma é visível).

Na casa com porta e duas janelas: a frente e a parte de trás.

Na caixa com tampa inclinada: os dois trapézios laterais.

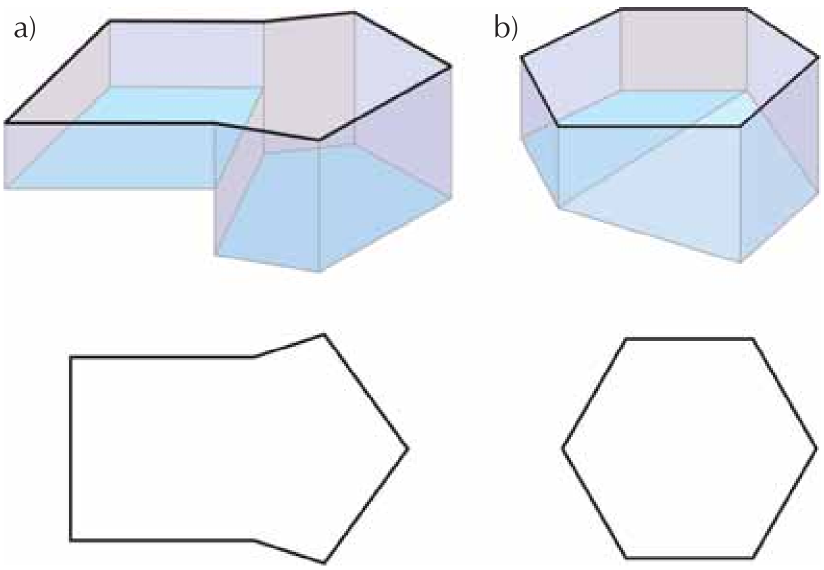
Atividade 4

a) Entre os convexos, o que está embaixo é prisma. Entre os côncavos, o que está embaixo é prisma. As faces laterais dos dois prismas são retângulos.

b) Nenhum deles tem forma prismática. O abajur pode ser decomposto em dois prismas (base e cúpula). Em ambos, duas faces paralelas quaisquer satisfazem o conceito de bases. As demais faces são retângulos.

Atividade 5

a) Resposta pessoal. Veja na figura exemplos de piscinas que têm forma de poliedro: todas as faces são polígonos planos e duas faces encontram-se exatamente em um segmento de reta.



b) Resposta pessoal. O exemplo a do item a) ***não*** tem a forma de prisma. Embora tenha duas faces paralelas idênticas, elas não servem como *bases* do prisma. Unindo os pontos de uma com os pontos correspondentes da outra não aparecem todas as demais faces do prisma. O exemplo b também não é prisma.

c) Resposta pessoal. A piscina a do item a) pode ser decomposta em dois prismas: um retangular e outro com base pentagonal

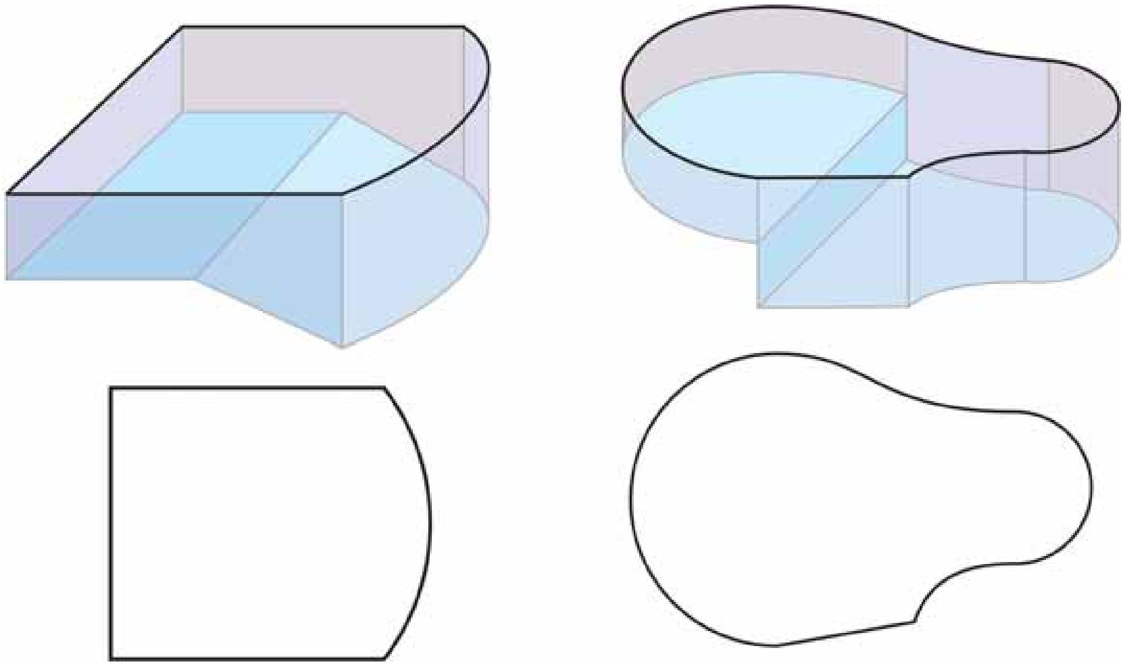
Atividade 6

a) Exemplo: Toro, anel, telha.

b) A cúpula.

Atividade 7

a) Resposta pessoal. Se a piscina que você imaginou tem alguma parede curva, então ela seria análoga a uma superfície curva.



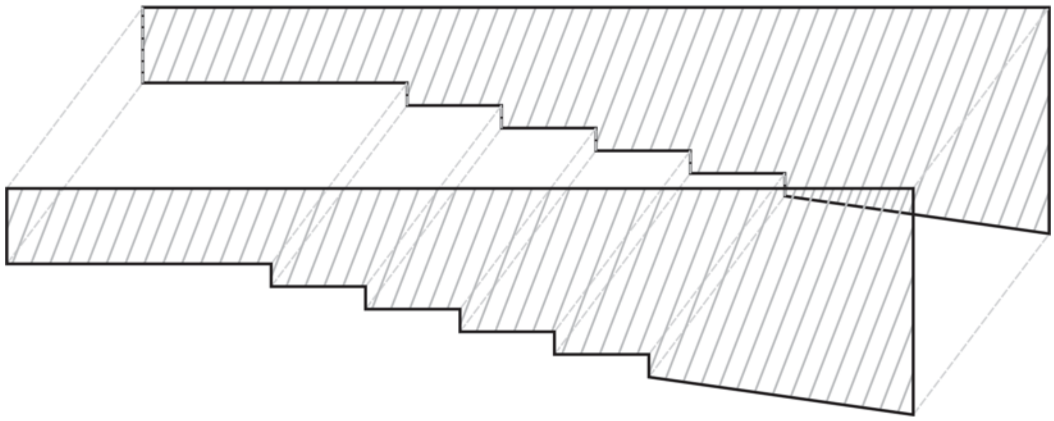
b) Resposta pessoal. A primeira piscina pode ser decomposta em um corpo curvo e um poliedro (na verdade um prisma); a segunda, não.

Atividade 8

Resposta para a) e b): Não. Explicações no Texto.

Atividade 9

a) Resposta pessoal. Em nossa piscina, a resposta é:



b) e c) SIM

d) Pode-se afirmar que tem a forma de um prisma.

e) 16

f) Vamos calcular, uma por uma, o revestimento das 15 paredes.

- Área das duas paredes em forma de retângulos (da parte mais rasa e da parte mais funda):

Área do primeiro: $(6 \times 1)m^2 = 6m^2$

Área do segundo: $(6 \times 3)m^2 = 18m^2$

Área dos dois: $24m^2$ *(2 faces)*

- Área das paredes verticais dos degraus. (Lembre-se de que a altura de cada degrau é igual a 30cm ou 0,30m):

Área vertical de cada um: $(6 \times 0{,}30)m^2 = 1{,}80m^2$

Área vertical de todos (5 degraus): $(5 \times 1{,}80)m^2 = 9m^2$ *(5 faces)*

- Área da primeira parte do piso (parte mais rasa):

É um retângulo 3,5 x 6. Sua área vale .... $21m^2$ *(1 face)*

- Área dos pisos dos quatro degraus de 1,25m de largura:

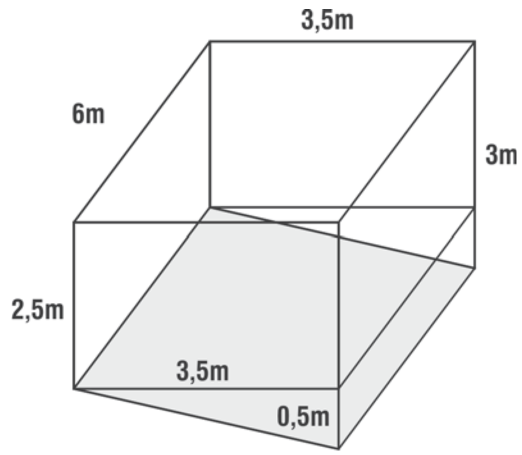
Área de cada um: $(6 \times 1{,}25)m^2 = 7{,}5m^2$

Área dos quatro: $(4 \times 7{,}5)m^2$ = ...$30m^2$ *(4 faces)*

- Área da última parte do piso:

Cuidado! Esta parte também é um retângulo com um dos lados igual a 6m. Mas o outro, quanto mede?...

O outro lado desse retângulo inclinado no fundo da piscina é hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos são conhecidos. Para achar a hipotenusa, o jeito é recorrer a Pitágoras!



Recado

Em um módulo mais à frente, você estudará melhor esse resultado tão usado em Matemática. Por enquanto, faça uso daquilo que você já sabe:

"Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos."

$h^2 = 3{,}5^2 + 0{,}5^2 = 12{,}25 + 0{,}25 = 12{,}5$

$h = \sqrt{(12{,}5)} \approx 3{,}5355$

Área dessa parte final do piso: $(6 \times 3{,}5355)m^2 = 21{,}21m^2$ (*1 face)*

- Área das paredes laterais mais compridas:

Cada uma pode ser decomposta em 5 retângulos e um trapézio.

Área do 1º retângulo (parte mais rasa) = $(3{,}5 \times 1)m^2$ =..... $3{,}5m^2$

Área do 2º retângulo: $(1{,}25 \times 1{,}30)m^2$ =...................... $1{,}625m^2$

Área do 3º retângulo: $(1{,}25 \times 1{,}60)m^2$ =...................... $2m^2$

Área do 4º retângulo: $(1{,}25 \times 1{,}90)m^2$ =...................... $2{,}375m^2$

Área do 5º retângulo: $(1{,}25 \times 2{,}20)m^2$ =...................... $2{,}75m^2$

Área do trapézio final:

$\frac{B + b}{2} \times h = \frac{3 + 2{,}5}{2} \times 3{,}5 =$ .... $9{,}625m^2$

Total de uma lateral.. $21{,}875m^2$

Total das duas laterais............................... ....$43{,}75m^2$ *(2 faces)*

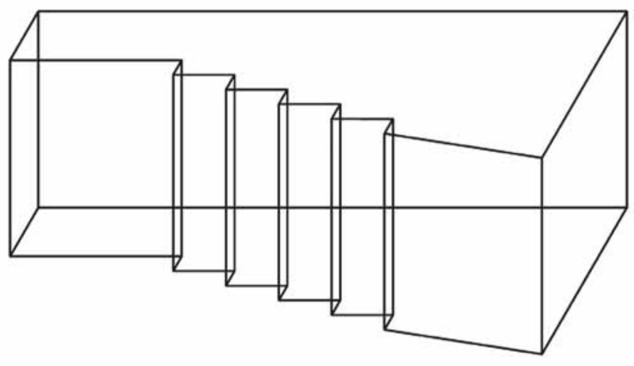
$24m^2 + 9m^2 + 21m^2 + 30m^2 + 21{,}21m^2 + 43{,}75m^2 = 148{,}96m^2$

Para revestir a piscina precisamos de $148{,}96m^2$ de azulejos.

Atividade 10

Respostas pessoais. Idéias no texto.

Atividade 11



Atividade 12

Pelo 1º caminho (área da base x altura), temos:

A base do prisma associado à piscina é uma de suas paredes laterais, conforme você viu na Atividade 11.

Área da parede lateral (calculada na Atividade 9) = $21,875m^2$.

Como a água ficará a 20cm da borda, a parte sem água corresponde a um retângulo de 12m x 0,20m, cuja área ($12 \times 0,20 = 2,40m^2$) deverá ser descontada da área da parede lateral:

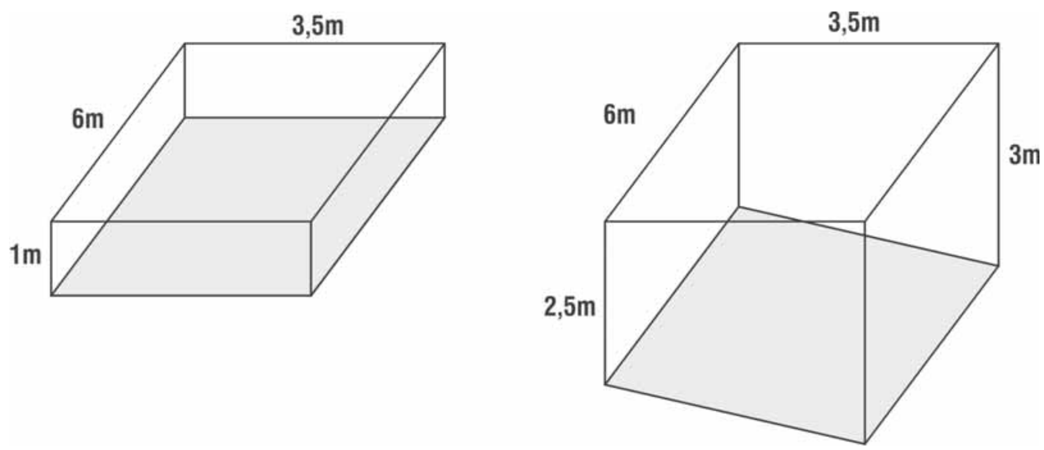
Área da parede lateral (descontada a borda de 20cm) = $21,875 - 2,40 = 19,475m^2$.

Altura do prisma = 6m

$V_{prisma} = A_{base} \times h = 19,475m^2 \times 6m = 116,85m^3$.

Para fazer pelo 2º caminho (decomposição em prismas mais simples), você deve olhar a decomposição da piscina em prismas, feita no item **Decomposição de poliedros e de prismas** (após a Atividade 10).

Você reconhecerá que temos 5 prismas de base retangular e um prisma de base trapezoidal. Veja o primeiro e o último.



Lembre-se

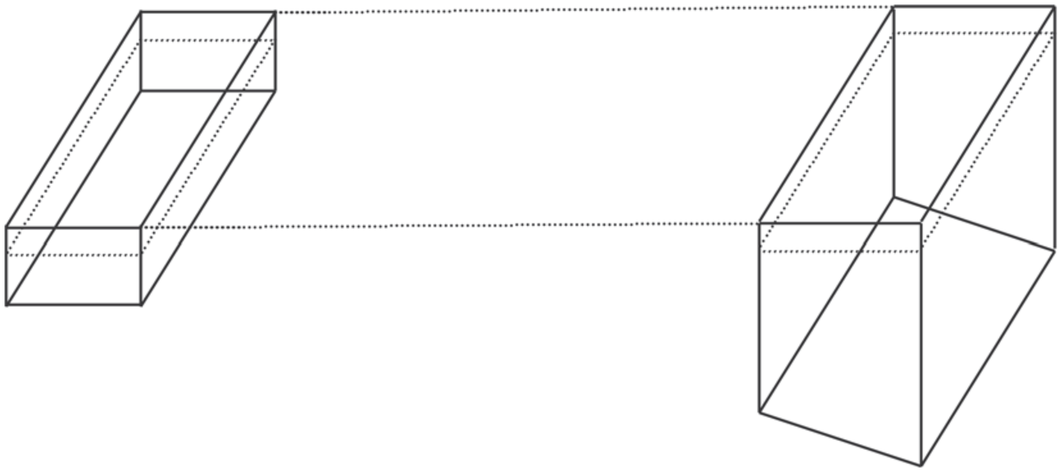
Bases dos prismas retangulares: duas faces quaisquer paralelas.

Bases do segundo prisma: apenas o trapézio (é o único que tem outra face idêntica a ele, e satisfaz as demais condições).

Altura dos prismas: 6m (largura da piscina).

Tomando como bases as faces frontais (voltadas para nós) a altura de todos os prismas é igual a 6m (largura da piscina).

Em uma das dimensões das bases, descontaremos 20cm (distância à borda):



Altura da parede frontal: 1m

Altura da água: 0,8m

Base maior do trapézio na piscina: 3m

Base maior do trapézio preenchido pela água: 2,80m

Base menor do trapézio na piscina: 2,5m

Base menor do trapézio preenchido pela água: 2,30m

Base do 1º prisma retangular: 3,5m x 0,80m ⟶ Área da base = 2,80m²

Altura = 6m

Volume do 1º prisma retangular = 2,8 x 6 = 16,8m³

Base do 2º bloco retangular: 1,25m x 1,10m ⟶ Área da base = 1,375m²

Altura = 6m

Volume do 2º prisma retangular = 1,375 x 6 = 8,25m³

Base do 3º bloco retangular: 1,25m x 1,40m ⟶ Área da base = 1,75m²

Altura = 6m

Volume do 3º prisma retangular = 1,75 x 6 = 10,5m³

Base do 4º bloco retangular: 1,25m x 1,70m ⟶ Área da base = 2,125m²

Altura = 6m

Volume do 4º prisma retangular = 2,125 x 6 = 12,75m^3

Base do 5º bloco retangular: 1,25m x 2m $\longrightarrow$ Área da base = 2,5m^2

Altura = 6m

Volume do 5º prisma retangular = 2,5 x 6 = 15m^3

Base do 6 º bloco: É um trapézio no qual: B= 2,8m; b= 2,3m; h= 3,5m

$$\longrightarrow \text{Área da base} = \frac{B+b}{2} \times h = \frac{2,8+2,3}{2} \times 3,5 = 2,55 \times 3,5 = 8,925\text{m}^2$$

Altura = 6m

Volume do prisma trapezoidal = 8,925 x 6 = 53,55m^3

Somando os volumes dos prismas parciais:

16,8m^3 + 8,25m^3 + 10,5m^3 + 12,75m^3 + 15m^3 + 53,55m^3 = 116,85m^3

Compare os resultados dos dois processos.

Lembre-se também dos dois valores (encontrados na Atividade 1) entre os quais estaria a capacidade de água da piscina: 57,6m^3 e 201,6m^3.

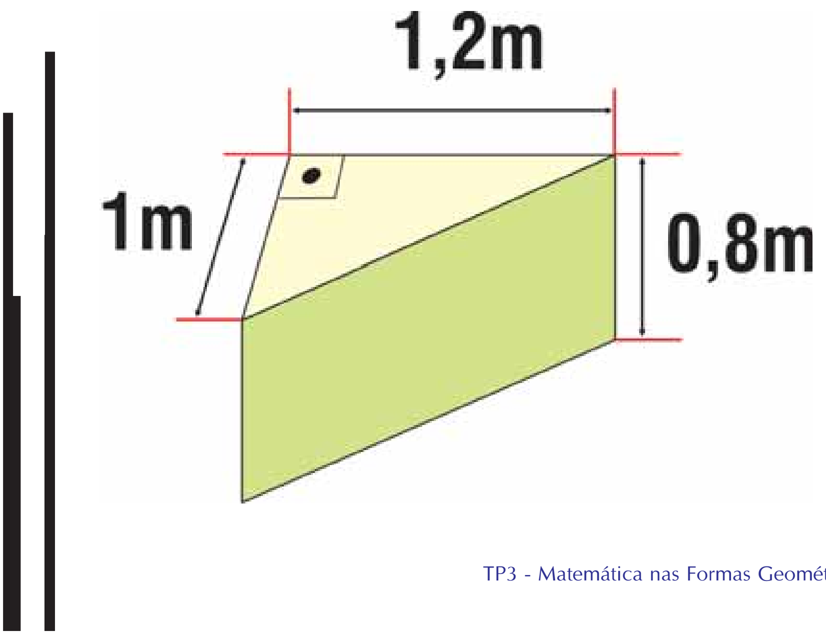
O valor real encontrado está mais perto de qual deles?

Atividade 13

Há vários modos de calcular. Eles dependem de como você visualiza o pedestal:

1º) Se você vê um prisma central retangular e outros dois prismas triangulares:
Volume do prisma central: 2 x 1 x 1,5=3m^3

Imagine cada saliência lateral tombada sobre uma face triangular (essas faces são triângulos retângulos, reparou?).



Volume do prisma triangular: (área da base) x (altura)

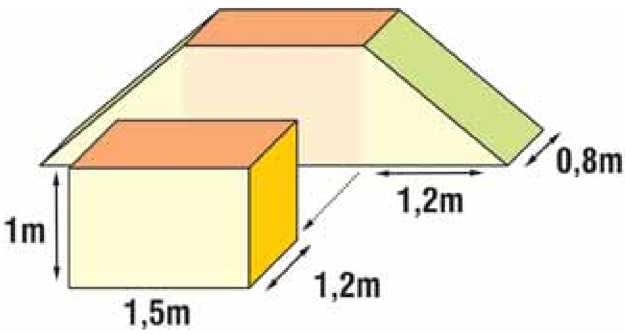
Volume do prisma triangular = 1/2 (1 x 1,20) x 0,80 = 0,48m^3

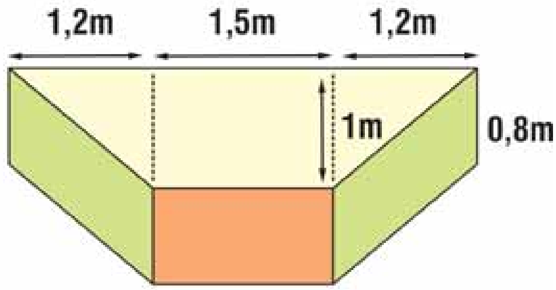
Volume de dois prismas triangulares = 0,96m^3

Somando os volumes: 3m^3 + 0,96m^3 = 3,96m^3

2º) Outro modo de visualizar a decomposição do pedestal em prismas:

Corte a parte frontal . A profundidade da face superior, que era de 2m, fica dividida em 0,80m na parte de trás e 1,20m na parte da frente. Veja como fica tombando (para a frente) o sólido que está atrás.





Volume: 1 x 1,5 x 1,2 = 1,80m^3

Volume: 2,7 x 0,80 = 2,16m^3

Volume total do pedestal: 1,80 + 2,16 = 3,96m^3

Atividade 14

Resposta pessoal. Podem ser mencionados:

- A ação envolve o raciocínio próprio do aluno, evitando que suas atitudes visem apenas a atender ao que o professor manda fazer. Na ação, a atividade mental do aluno aumenta.

- Somente agindo sobre uma dada realidade o aluno poderá mobilizar seus conceitos prévios, pô-los em prova, e disparar um processo de busca de novos conceitos, no caso dos já conhecidos não serem suficientes para resolver a situação.

- É por meio da ação, e não apenas do discurso e da expectativa de uma resposta automatizada, que podemos provocar no aluno o desenvolvimento conceitual.

Atividade 15

a) Resposta pessoal. Não se espera que todos os cursistas respondam do mesmo modo. O importante é que troquem opiniões, que cada um argumente sobre seu modo de pensar e que todos possam ver diferentes modos de encarar a questão.

b)Resposta pessoal. Respostas possíveis: para se poder reconhecer prismas em posições não convencionais; para se imaginar objetos girando no espaço e ocupando outras posições; para aumentar a capacidade de visualização.

Atividade 16

A atividade 8 tinha por objetivo fazer pensar melhor a respeito de uma opinião que todos parecem ter: que figuras geométricas de dimensão 1 estão sempre sobre uma reta e que figuras de dimensão 2 estão sobre um plano. Os comentários que vieram após ela mostraram que essas opiniões são erradas. A atividade, que parecia simples, desestabilizou um conhecimento antigo.

Na atividade 15b o prisma trabalhado, associado à forma de uma piscina, surgiu em uma posição nada convencional: as bases, em vez de serem o ponto de apoio do prisma em um plano horizontal e o seu topo, eram as paredes laterais da piscina. Desse modo, a primeira reação era dizer que não se tratava de um prisma, porque não se reconhecia uma base apoiada no plano horizontal, outra paralela a ela e as arestas laterais ligando as duas. Como o prisma apareceu em uma posição diversificada, exigiu mais análise para que se reconhecesse na figura as propriedades de um prisma.

Unidade 10

Semelhanças, revestimentos, preenchimentos

Nilza Eigenheer Bertoni

Iniciando a nossa conversa

Olá! Gostou das formas que povoam nosso universo? Nesta unidade, nosso tema central ainda gira em torno de formas planas e não planas.

O modo de desenvolvermos esse estudo você já conhece - é associado à exploração do espaço que nos cerca na natureza e nas obras construídas pelo homem. E muito voltado para o desenvolvimento da percepção visual, da experimentação, da manipulação e da inferência.

Nesta unidade, os fatos mais destacados serão a semelhança de figuras planas e espaciais, o revestimento de superfícies planas por meio de polígonos e o preenchimento do espaço por meio de poliedros.

Esta unidade constará de três seções.

Na seção 1, você encontrará uma nova situação-problema relacionada à construção de uma piscina, envolvendo as noções de semelhança e de revestimento.

Na seção 2, estudaremos alguns conceitos surgidos na seção 1, como semelhança, revestimentos e outros relacionados, entre eles preenchimento do espaço, poliedros regulares e semi-regulares.

Na seção 3, faremos sugestões para o desenvolvimento desses conceitos em sala de aula.

Definindo o nosso percurso

Ao longo desta unidade, esperamos que você possa:

1 – Com relação aos seus conhecimentos matemáticos:

Vivenciar o desdobramento da situação-problema da unidade anterior, desenvolvendo conteúdos matemáticos que embasam a elaboração de uma maquete e o revestimento da piscina, e outros relacionados, como:

- construção do conceito de semelhança;
- revestimento de superfícies planas por polígonos regulares;
- cálculo de volumes e áreas;
- preenchimento do espaço com poliedros.

Esses conhecimentos serão desenvolvidos nas seções 1 e 2.

2 – Com relação aos seus conhecimentos sobre Educação Matemática:

- rever a relação entre situações-problema e a construção de conhecimentos em ação, na seção 1;

- aprofundar a compreensão de Transposição Didática, no Texto de Referência.

3 – Com relação à sua atuação em sala de aula:

- Conhecer e produzir, com relação às formas geométricas, situações didáticas adequadas à série em que atua.

Esse objetivo será tratado na seção 3.

Seção 1

Resolução de situação-problema: polígonos regulares e semelhança aplicados ao revestimento e à maquete da piscina

Objetivo da seção

- Identificar semelhança como o principal conceito matemático envolvido na construção de uma maquete.
- Identificar polígonos regulares.
- Analisar polígonos regulares adequados para recobrir superfícies.

Integrando a matemática ao mundo real

Revestimentos e empilhamentos

Para fazer uma obra como uma ponte, um edifício ou uma torre, inicialmente o tamanho real da obra é reduzido para que um desenho da mesma caiba em uma folha de papel. Ou uma reprodução tridimensional da obra é feita, chamada maquete, também reduzindo-se suas dimensões. Tanto o desenho como a maquete conservam a forma da obra mas não as dimensões. Esse é o conceito de semelhança - conservação da forma mas não das medidas - que tem inúmeras aplicações em engenharia, arquitetura, e pequenas reformas, planejamento ou alterações de móveis que queremos fazer em nossas casas.

No desenho, há semelhança entre a figura desenhada e certa vista da obra - pode ser frontal, lateral, posterior. Na maquete, há semelhança de objetos tridimensionais: a maquete e a obra real. O desenho e a maquete são cópias que se mantêm fiéis à forma do objeto original, mas com as dimensões alteradas.

Mas há uma diferença que deve ser ressaltada, entre parecido e semelhante. Na linguagem comum, os dois termos são muitas vezes usados como sinônimos. Na Matemática, contudo, a palavra *semelhante* é usada com um significado muito preciso, que veremos nesta unidade.

Outro aspecto das obras de arquitetura, relacionado à Matemática, é o de padrões de recobrimento - também dito revestimento ou pavimentação - de uma superfície, que constitui uma arte antiga e bem desenvolvida.

Em geral, um recobrimento de uma região plana pode usar um conjunto de polígonos de formas diferentes, tal que a justaposição ou a repetição desse conjunto de polígonos cubra uma parte do plano sem deixar lacunas. Esse recobrimento também recebe os nomes de ladrilhamento ou mosaico. O tipo mais comum de ladrilhamento é o que usa peças iguais, isto é, um único tipo de peça, sempre com mesma forma e mesmo tamanho, permitindo um revestimento total da superfície, sem deixar lacunas. De modo ainda mais especial, pode-se usar na pavimentação apenas um único tipo de polígono *regular, ou seja, que tem lados iguais* e *ângulos iguais*.

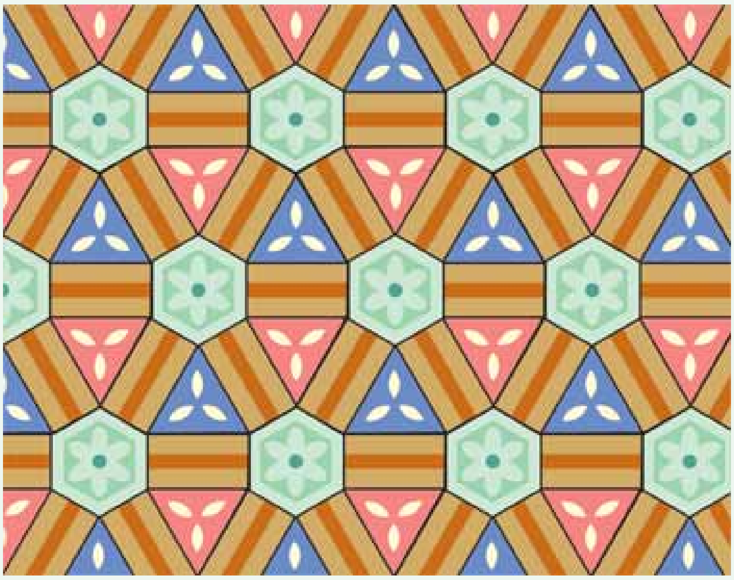


Ilustração 1 - Um padrão persa
Web: Tilings from Historical Sources

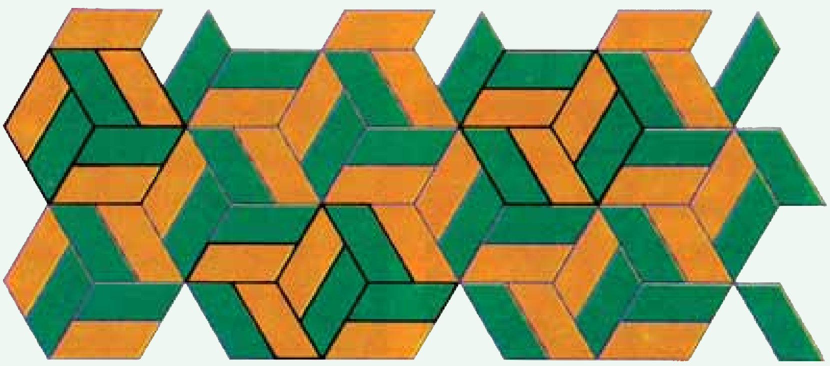


Ilustração 2 - Imenes, L.M. Geometria dos mosaicos.
Coleção Vivendo a Matemática. Editora Scipione

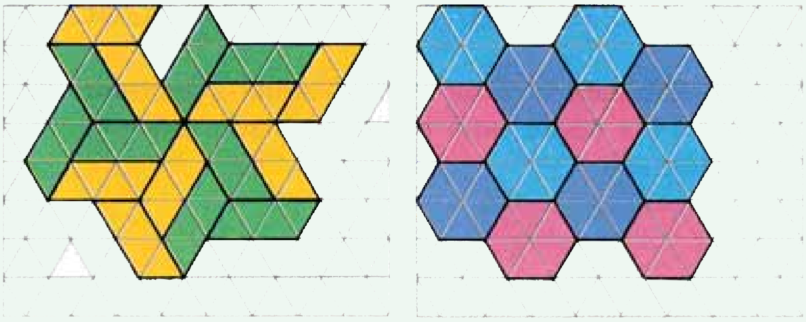
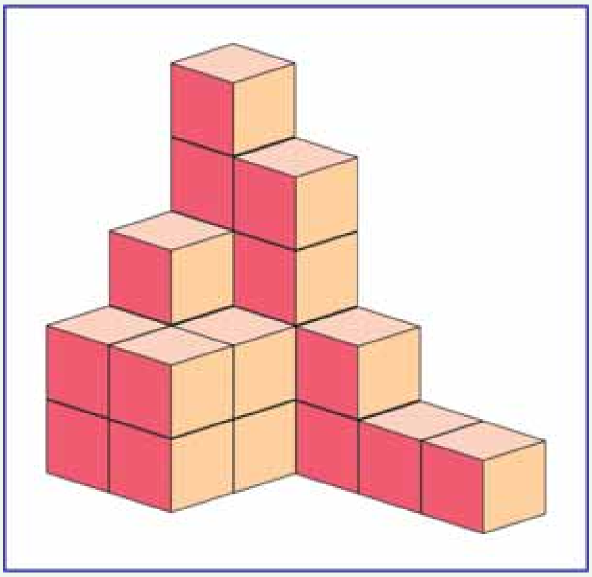


Ilustração 3 - Imenes, L.M. Geometria dos mosaicos.
Coleção Vivendo a Matemática. Editora Scipione

O problema análogo para o espaço tridimensional, isto é, o preenhimento desse espaço com poliedros, está mais ligado ao *empilhamento* de embalagens poliédricas de modo a não deixar lacunas (espaços vazios entre as embalagens). Aqui, a preocupação com um único tipo de poliedro é maior, porque um fabricante gosta de identificar seu produto com um único tipo de embalagem. Esse problema relaciona-se também à invenção de novos materiais - espumas, por exemplo. Esses materiais são constituídos pela repetição de uma estrutura geométrica oca, algo como poliedros justapostos. Os químicos e físicos estudam quais as estruturas adequadas para esses novos materiais.

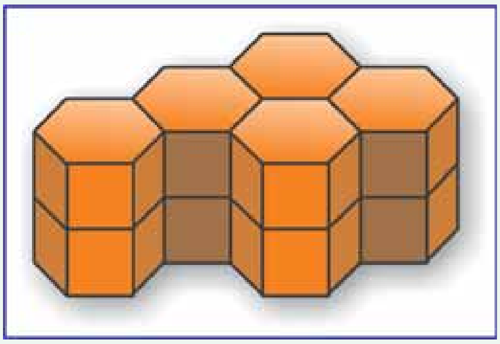
No caso do espaço, também procurou-se seu preenchimento com o uso de um mesmo tipo de poliedro *regular*. O estudo dos poliedros regulares, que são os cinco sólidos platônicos, aparece na coleção de livros denominada *Elementos de Euclides,* escrita há mais de 2.000 anos. Verificou-se que há um único modo de preencher o espaço usando-se sempre o mesmo tipo de poliedro *regular* - só servem os cubos.



Empilhamento de cubos produzindo preenchimento
de uma região do espaço.

Talvez por isso se tenha recorrido aos poliedros semi-regulares - conceito que você aprenderá nesta unidade. A classificação dos 13 poliedros semi-regulares data do tempo de Arquimedes (cerca de 250 a.C.) ou até antes.

De qualquer forma, seja para arquitetura, engenharia, arte ou acondicionamentos comerciais, o estudo de formas geométricas e, em particular, o dos poliedros revela-se um mundo amplo e atraente.



Empilhamento de prismas hexagonais (poliedros semiregulares) produzindo preenchimento de uma região do espaço.

Situação-problema: construindo a maquete e revestindo a piscina

Na realização do projeto da piscina, é necessário, em certo momento, a realização de uma maquete do modelo que se quer construir. Também é necessário pensar no revestimento interno da piscina, com azulejos.

Na unidade anterior, foi pedido que você fizesse uma maquete da piscina que havia projetado. Não sabemos quais conhecimentos geométricos você utilizou - provavelmente uma idéia intuitiva de escala, mudando os metros da piscina real para centímetros em sua maquete. Também acreditamos que sua maquete não apresentou uma deformação da forma da piscina real.

Na verdade, uma maquete bem feita requer certos conhecimentos matemáticos, em especial o de semelhança.

Além disso, será preciso pensar também no revestimento da piscina e no custo desse revestimento. O mais comum é usar ladrilhos quadrados ou retangulares para isso. Mas, suponhamos que você queira ser mais criativo. Usará algum tipo de polígono regular para revestir as paredes laterais e poderá usar outro para revestir o fundo. Uma pesquisa de preços revelou os seguintes produtos disponíveis no mercado:

- azulejos quadrados, com 30cm de lado, a R$12,20 o metro quadrado,

- azulejos na forma de triângulos eqüiláteros, com 40cm de lado, a R$12,30 o metro quadrado,

- azulejos na forma de hexágonos regulares, com 15cm de lado, a R$12,25 o metro quadrado (Hexágonos regulares: 6 lados iguais e 6 ângulos internos iguais.),

- azulejos na forma de octógonos regulares, com 20cm de lado, a R$11,90 o metro quadrado (Octógonos regulares: 8 lados iguais e 8 ângulos internos iguais.).

É preciso considerar ainda a questão do rejunte. Como tendem a escurecer ou estragar, é aconselhável diminuir as medidas das linhas de rejunte. O metro linear de rejunte acaba saindo a R$0,40.

A situação-problema desta seção é:

a) Planejar uma maquete precisa da piscina que você imaginou.

b) Planejar um revestimento interno da piscina com azulejos de um tipo único de polígonos regulares, de mesmo tamanho.

c) Calcular o preço do revestimento escolhido, e justificar sua escolha em termos econômicos e estéticos. (Não é necessário que você escolha a opção mais econômica. Contudo, você deve justificar sua opção estética e saber em quanto ela está aumentando seu gasto.)

Você deve estar percebendo que a questão principal a considerar, no planejamento da maquete, é a manutenção da forma da piscina - ou seja, das proporções - e a alteração de suas dimensões. Trata-se portanto de uma questão de semelhança.

Para ocorrer essa manutenção da forma, isto é, do aspecto geral da piscina, é preciso que a transformação da piscina real em uma maquete conserve os ângulos da piscina real e mude todas as distâncias reais segundo uma mesma razão, no caso chamada de escala.

Uma análise dos azulejos para o revestimento também deverá ser feita, em vários aspectos.

Mãos à obra! Inicie uma resolução da situação-problema, adaptada à piscina que você planejou. Se cansar, pare e faça a Atividade 1. Mas não se esqueça de voltar a atacar essa situação, até resolvê-la por completo.

Atividade 1

Verifique, na maquete de sua piscina que você fez na unidade anterior, se ela satisfaz as condições acima enunciadas. Para isso:

a) Explique quanto valem os ângulos (na piscina e na maquete) e verifique se são iguais.

b) Mostre quais as principais distâncias envolvidas na piscina e na maquete, e verifique se elas mantêm entre si a mesma razão.

Se ainda não fez, é hora de fazer os três itens da situação-problema.

Seção 2

Construção do conhecimento matemático em ação: revestimentos, preenchimentos e semelhanças

Objetivo da seção

- Identificar semelhança como o principal conceito matemático envolvido na construção de uma maquete.
- Caracterizar o conceito de semelhança em polígonos e poliedros.
- Analisar polígonos regulares adequados para revestir superfícies, identificando suas propriedades.
- Caracterizar poliedros regulares e semi-regulares.
- Identificar poliedros regulares e semi-regulares adequados para o preenchimento do espaço.

Um papo com vocês

Quando nós, os autores, reunimo-nos para criar essa proposta de capacitação de professores da 5^a a 8^a série, uma das primeiras decisões foi começar cada unidade destes módulos com uma situação-problema. Pouco a pouco, ao longo de reuniões, foi aparecendo o resto. Assim a seção 2, *Construção do conhecimento matemático em ação,* foi planejada para desenvolver conceitos envolvidos na situação-problema e outros naturalmente relacionados. A idéia era que, embora apresentando certa fragmentação, a seção formasse um todo coerente. A seção 3, você já sabe, trata de repensar tudo que foi visto em termos da sala de aula.

Isso ocorre também nesta unidade. A seção 1 introduziu uma situação-problema e, na seção 2, há itens interessantes de geometria relacionados a revestimento de superfícies e à semelhança, conceitos envolvidos diretamente na situação-problema. Articulado a revestimento de superfícies, trabalharemos com preenchimento do espaço, o que nos levará ao estudo de poliedros regulares e semi-regulares. Serão sempre conhecimentos a serem construídos em ações vinculadas à resolução de problemas do mundo real.

Revestir o chão e preencher o espaço

Os homens, ao longo da História, demonstraram grande interesse em recobrir superfícies com ladrilhos ou mosaicos decorados.

Quadrados, triângulos eqüiláteros e hexágonos regulares são polígonos regulares que podem ser justapostos e usados para preencher uma superfície, sem superposição e sem deixar buracos.

Você sabe que polígonos regulares são aqueles nos quais *todos os lados são iguais* e *todos os ângulos são iguais*. Usando ainda o seu conhecimento sobre *congruência* e *semelhança*, faça a atividade seguinte:

Atividade 2

Analise as afirmações e assinale V para verdadeiro e F para falso:

( ) Fixando-se o número de lados como n, podem-se construir infinitos polígonos distintos (não congruentes) com n lados.

( ) Para cada número natural n, existem polígonos com n lados que não são congruentes nem semelhantes .

( ) Fixando-se o número de lados como n, podem-se construir infinitos polígonos regulares distintos (não congruentes) com n lados.

( ) Para cada número natural n, existem polígonos regulares com n lados que não são congruentes nem semelhantes.

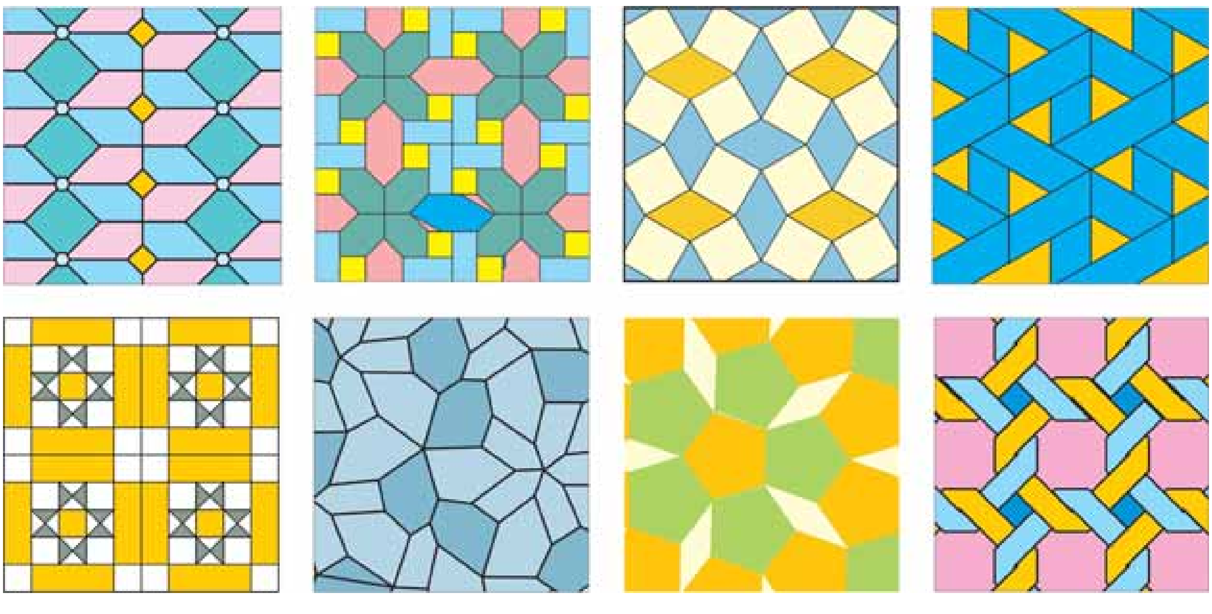
Atividade 3

a) Marque x em alguns triângulos não regulares e x' em alguns regulares.

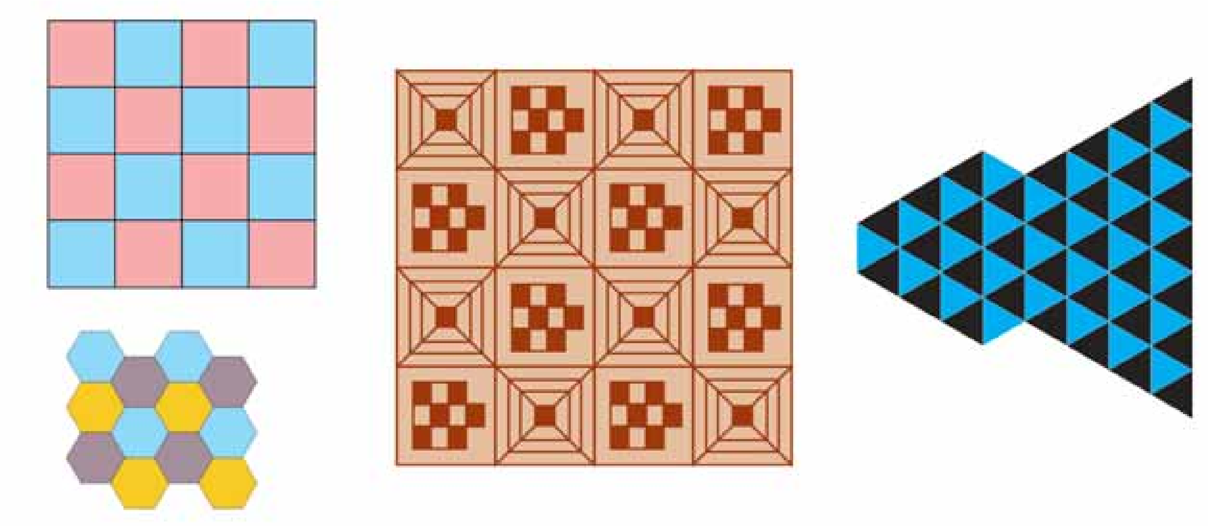
b) Marque y em alguns quadriláteros não regulares e y´ em alguns regulares.

c) Marque z em alguns pentágonos não regulares e z´ em alguns regulares.

d) Marque w em alguns hexágonos não regulares e w´ em alguns regulares.



Veja polígonos regulares de um só tipo revestindo o chão.



Atividade 4

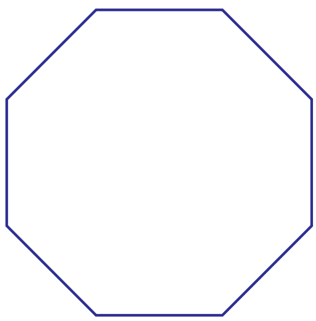
Assinale o ponto de encontro dos mosaicos da ilustração anterior e depois responda:

a) Quantos quadrados encontram-se em um ponto? Quanto vale o ângulo em cada um deles? Quanto vale a soma dos ângulos cujos vértices encontram-se em um ponto?

b) Quantos triângulos encontram-se em um ponto? Quanto vale o ângulo em cada um deles? Quanto vale a soma dos ângulos cujos vértices encontram-se em um ponto?

c) Quantos hexágonos encontram-se em um ponto? Quanto vale o ângulo em cada um deles? Quanto vale a soma dos ângulos cujos vértices encontram-se em um ponto? (Uma dica: Decomponha o hexágono regular em seis triângulos regulares, isto é, eqüiláteros, cujos ângulos internos valem 60°. A partir disso, conclua quanto vale cada ângulo interno do hexágono regular.)

d) É possível revestir uma superfície apenas com octógonos regulares idênticos? Apresente seus argumentos.



Você pôde observar que:

No caso de triângulos eqüiláteros (ou regulares), como o ângulo interno vale 60°, foi possível justapor seis deles, formando 360° em torno de um mesmo ponto. Por isso foi possível usá-los no preenchimento de superfícies.

No caso de quadrados, que são quadriláteros regulares, como o ângulo interno vale 90°, foi possível justapor quatro deles, formando 360° em torno de um mesmo ponto. Por isso foi possível o preenchimento de superfícies com eles.

No caso de hexágonos regulares, como o ângulo interno vale 120°, foi possível justapor três deles, formando 360° em torno de um mesmo ponto. Por isso foi possível o preenchimento de superfícies.

No caso de octógonos regulares, como o ângulo interno vale 135° (você conseguiu descobrir isso? Basta decompor o octógono em 8 triângulos isósceles com um vértice comum no centro do octógono), não é possível justapor alguns deles, de modo a formar 360° em torno de um mesmo ponto, pois uma soma de parcelas iguais a 135° não pode dar total 360°. Por isso não é possível usá-los para preenchimento de superfícies.

Sintetizando

Justapondo polígonos regulares idênticos, só poderemos preencher uma superfície, sem superposição e sem deixar buracos, se o ângulo interno desse polígono for um submúltiplo (ou divisor) de 360°.

Esse assunto nos lembra uma atividade proposta no final da sessão coletiva da Unidade 9. Perguntou-se se você poderia recobrir o plano usando, de cada vez, um só tipo de polígono regular. Agora você já sabe que, com quadrados, triângulos eqüiláteros e hexágonos regulares, isso é possível; mas com octógonos regulares não.

Perguntou-se ainda sobre a possibilidade de usar pentágonos e heptágonos (ambos regulares). Isso você pode resolver, calculando os ângulos internos de cada um e verificando se são divisores de 360 °. Mais adiante, veremos um processo geral para determinarmos o valor do ângulo interno de um polígono regular.

Revestimentos com polígonos não regulares

Será possível revestir uma superfície com polígonos idênticos e NÃO regulares?

Atividade 5

a) Desenhe um triângulo *qualquer*. É possível revestir uma superfície com cópias dele? Sugestão: recorte seu triângulo em papel grosso e use-o para desenhar vários contornos dele em papel comum. Recorte as cópias e tente justapor.

b) Desenhe um quadrilátero qualquer (bem fora dos padrões conhecidos). É possível revestir uma superfície com cópias dele? Sugestão: recorte seu quadrilátero em papel grosso e use-o para desenhar vários contornos dele em papel comum. Recorte as cópias e tente justapor.

Os nomes dos polígonos – Curiosidade

Saber os nomes dos polígonos facilita quando queremos nos referir a eles. Contudo, trata-se mais de uma curiosidade do que de um conhecimento relevante em geometria. *Poli* significa muitos em grego, e *gono* significa joelho, no sentido de dobra ou ângulo. Assim, decágono indica dez ângulos.

Triângulos	3 lados
Quadriláteros	4 lados
Pentágonos	5 lados
Hexágonos	6 lados
Heptágonos	7 lados
Octógonos	8 lados
Eneágonos	9 lados
Decágonos	10 lados
Undecágonos	11 lados
Dodecágonos	12 lados
Pentadecágonos	15 lados
Icoságonos	20 lados

Observação: Quadriláteros também são chamados de quadrângulos.

Agora veja como pode ficar seu revestimento, com um triângulo qualquer:

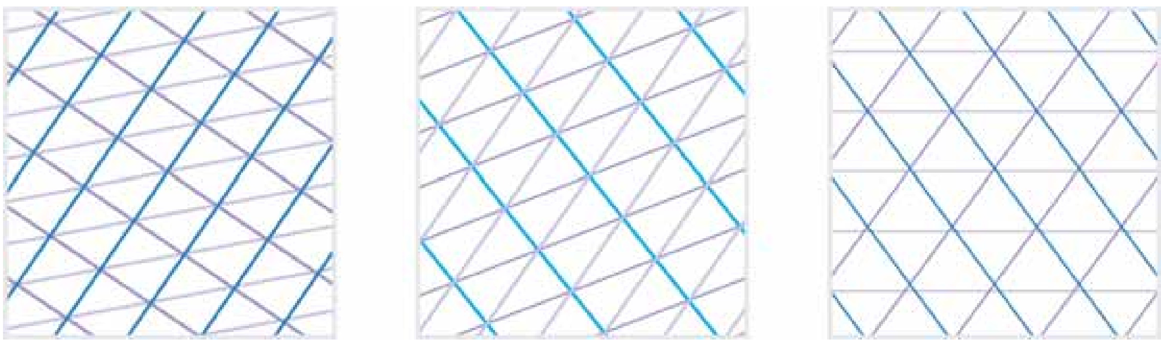


Ilustração 4 - Eric Weinsstein´s world of Mathematics. Triangle Tiling

Veja que também é possível ladrilhar com um quadrilátero qualquer.

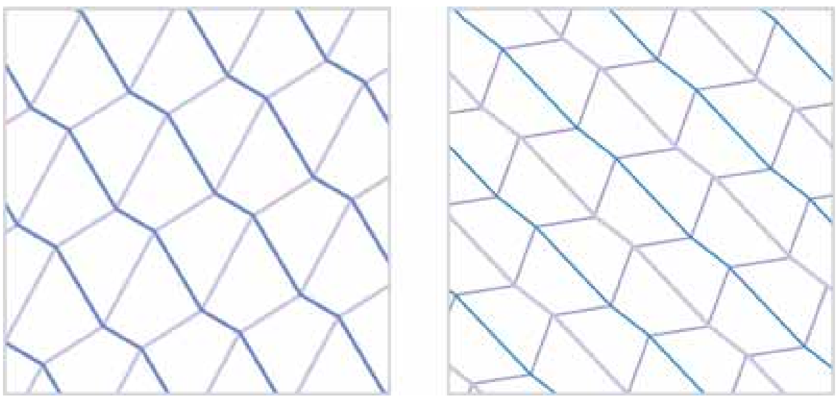
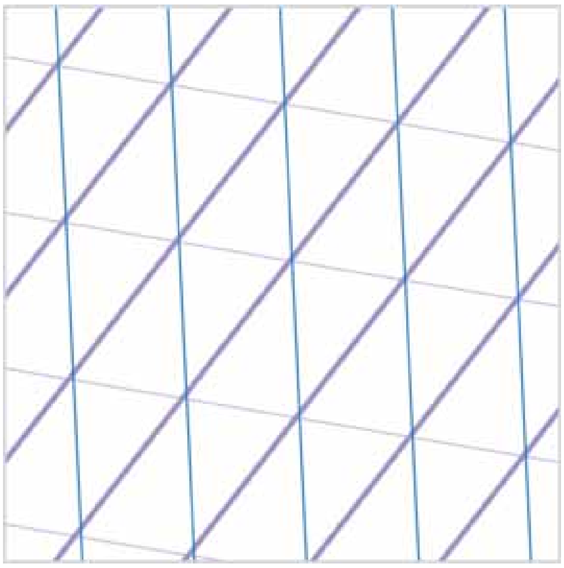


Ilustração 5 - Eric Weinsstein´s world of Mathematics. Quadrilateral Tiling

Os antigos costumavam observar construções e perceber fatos matemáticos. Vamos fazer algo parecido.

Percebendo propriedade dos triângulos

Olhe a ilustração do revestimento com um mesmo triângulo *não regular*. Fixe um ponto que seja encontro de linhas. Agora observe os ângulos em torno desse ponto. O ponto é vértice de 6 ângulos, percebeu? Esses 6 ângulos são dois a dois iguais. Vamos pintar de uma mesma cor os ângulos iguais.



Repare: em cada um desses pontos encontram-se os ângulos do triângulo, cada um repetido duas vezes. O que é possível concluir?

Em volta de cada ponto, a soma dos ângulos (360°) vale o dobro da soma dos ângulos do triângulo. Essa soma vale, portanto, 180°.

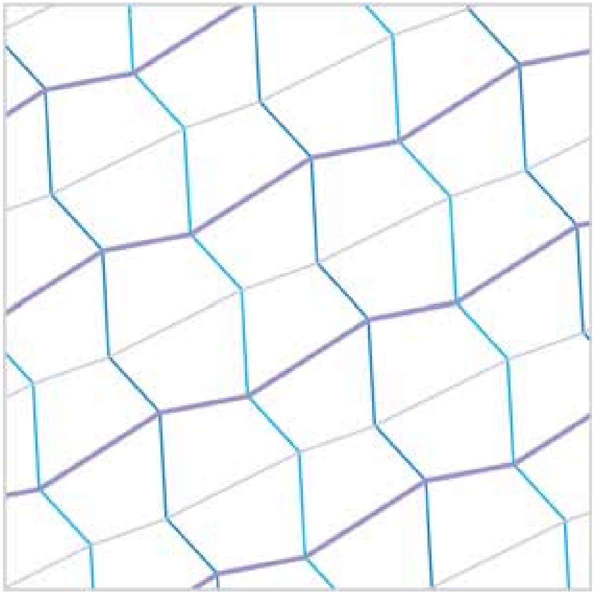
Ou seja:

A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°. (Portanto, num triângulo equilátero, cada ângulo vale 60°.)

Você conhece outros modos informais de justificar, ou inferir, que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180°?

Veja outros modos na seção 3, de Transposição Didática.

Faça o mesmo para o revestimento dos quadriláteros: fixe um ponto que seja encontro de linhas e pinte os ângulos em torno desse ponto, um de cada cor. Repare que o ponto é vértice de 4 ângulos, precisamente os quatro ângulos internos do quadrilátero. O que é possível concluir?



Em volta de cada ponto, a soma dos ângulos (360°) é igual à soma dos ângulos do quadrilátero. Essa soma vale, portanto, 360°. Conclui-se que qualquer quadrilátero pode preencher o plano.

Ou seja:

A soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é igual a 360^{o}. (Portanto, em um quadrilátero regular ou quadrado, cada ângulo vale 90°.)

Você viu, na Atividade 4, que , no revestimento ou ladrilhamento de superfícies, os ângulos internos dos polígonos desempenham um papel importante. Vamos formalizar esse conhecimento.

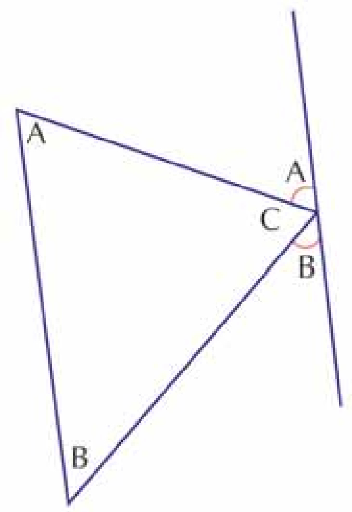
Soma dos ângulos internos de um triângulo

A soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180^{o}.

Uma evidência matemática simples desse fato é a seguinte:

Construindo-se, por um dos vértices do triângulo, uma reta paralela ao lado oposto, aparecerão, apoiados nela, os três ângulos do triângulo:

Por estarem do mesmo lado de uma reta e juntos preencherem esse lado, temos $A + B + C = 180^{o}$.

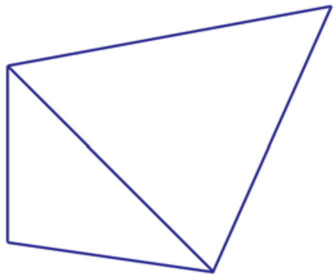


Soma dos ângulos internos de um quadrilátero

A soma dos ângulos internos de um quadrilátero vale 360^o.

Como ocorreu para triângulos, também há uma evidência matemática simples desse fato:

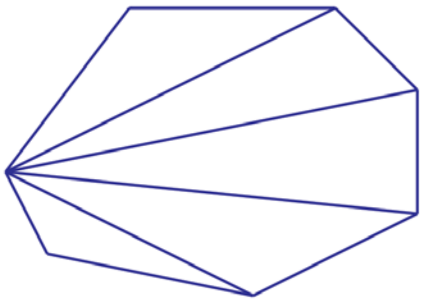
Trace uma das diagonais do quadrilátero, dividindo-o em dois triângulos:



Em cada triângulo, a soma dos ângulos internos é 180^o. No quadrilátero todo, essa soma dá 360^o.

Soma dos ângulos internos de um polígono de n lados

O mesmo argumento acima aplica-se para um polígono qualquer. Vamos exemplificar com um polígono de 7 lados. A partir de um vértice, traçamos todas as diagonais que partem dele.



São 7 vértices, um é o que estamos considerando, sobram 6, dois são consecutivos ao que estamos considerando e por isso não produzirão diagonais; ligamos o vértice considerado aos 4 vértices restantes.

Aparecem 4 diagonais e 5 triângulos.

Em cada triângulo, a soma dos ângulos internos é 180^o. No heptágono (7 lados), essa soma dá 5×180^o.

Observe:

Triângulo (3 lados) $\longrightarrow$ Soma dos ângulos internos vale 1×180^o

Quadrilátero (4 lados) $\longrightarrow$ Soma dos ângulos internos vale 2×180^o

Heptágono (7 lados) $\longrightarrow$ Soma dos ângulos internos vale 5×180^o

Atividade 6

Complete:

Em um n-ágono (n lados), a soma dos ângulos internos vale ________ $\times 180^o$

Atividade 7

Calcule a soma dos ângulos internos:

a) em um pentágono;

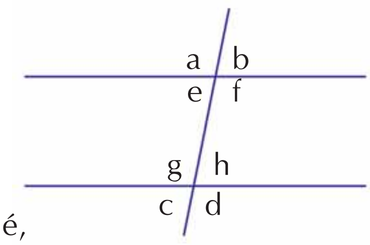
b) em um octógono;

c) em um decágono.

Só falta uma coisinha. Todos os resultados sobre valor do ângulo interno de um polígono regular saíram do fato de a soma dos ângulos de um triângulo valer 180°, e para justificar esse último fato nós dissemos que, ao traçar por um vértice uma paralela ao lado oposto, apareceriam os três ângulos do triângulo. Quem ou o que nos garante isso?

É um teorema fundamental da geometria plana, que diz o seguinte:

Se duas retas paralelas são cortadas por uma terceira reta (transversal), têm-se:



- os ângulos alternos internos são iguais: e=h; g=f
- os ângulos alternos externos são iguais: c=b; a=d
- os ângulos correspondentes são iguais: a=g; b=h; e=c; f=d
- os ângulos colaterais internos têm soma igual a 180° , isto é, são suplementares: e e g ; f e h , ou seja: $e + g = f + h = 180°$
- os ângulos colaterais externos são suplementares: a e c ; b e d

Na verdade, não é importante que você saiba todos esses nomes. O importante é que, frente a uma situação em que aparecem duas retas paralelas cortadas por uma terceira, você saiba reconhecer os ângulos iguais.

Atividade 8

Usando algum dos resultados do teorema mencionado, justifique que, no caso do triângulo e da paralela traçada, os ângulos apoiados na reta são iguais aos ângulos do triângulo.

Lembre-se:

A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é igual a $(n-2) \times 180°$.

Portanto, em um polígono regular de n lados, cada ângulo vale $\frac{(n-2) \times 180°}{n}$.

Para saber se podemos preencher uma superfície com um polígono regular de n lados, basta ver se o valor de seu ângulo interno é um submúltiplo de 360°.

Economia e preenchimento com polígonos

Lembra-se da questão do rejunte, que apareceu na situação-problema? O problema a seguir trata de uma situação parecida, envolvendo a relação entre o contorno de certas figuras e a área dessas figuras.

Imagine que um fabricante quer fazer uma tela de arame, toda formada por polígonos regulares.

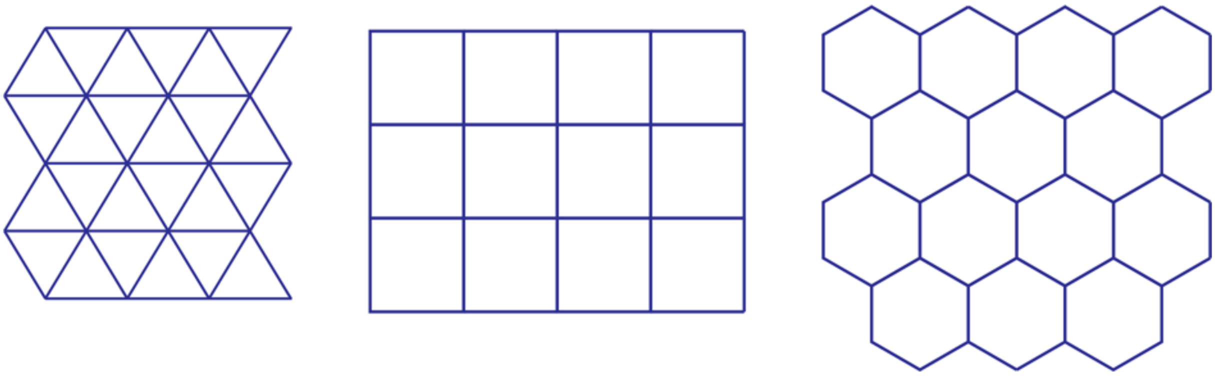


Ilustração 6 - Eric Weinsstein´s world of Mathematics. Tesselation

Ele está interessado no seguinte: em qual tela pode gastar menos arame e obter maior quantidade de tela? Em outras palavras: usando a mesma quantidade de arame, qual polígono tem maior área?

Tomando um mesmo pedaço de arame com comprimento a, ele construiu um triângulo de lado a/3; um quadrado de lado a/4 e um hexágono de lado a/6. Depois calculou a área de cada um e verificou que *a maior área era obtida no hexágono*. Esse é um resultado conhecido dos matemáticos há bastante tempo. Você saberia calculá-las?

Atividade 9

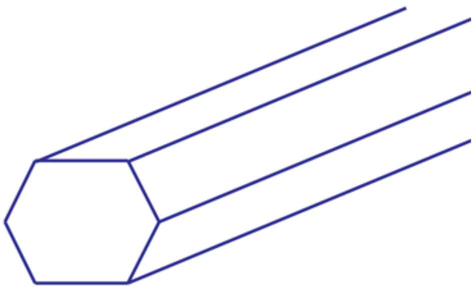
Calcule:

a) a área de um triângulo eqüilátero de lado a/3;

b) a área de um quadrado de lado a/4;

c) a área de um hexágono de lado a/6;

d) mostre que a maior área obtida é a do hexágono.



Costuma-se dizer que as abelhas conhecem, por intuição ou prática, esse resultado: ao fazerem os favos, elas os constróem na forma de prismas hexagonais. Dessa forma, usam a menor quantidade de cera para conseguir certo armazenamento de mel.

Preenchendo o espaço

Um problema análogo ao do preenchimento do plano com polígonos regulares é o de preencher o espaço com poliedros regulares, também chamados platônicos, porque Platão já os conhecia.

Poliedros regulares ou platônicos

Sabemos que, para se ter um polígono regular, todos os ângulos internos devem ter igual medida e todos os lados devem ter o mesmo comprimento. De modo análogo, no espaço, para se ter um poliedro regular, é necessário que as faces sejam polígonos regulares congruentes e os ângulos sólidos sejam congruentes. Ou seja:

Lembrete – Poliedros regulares

Dizemos que um poliedro é regular se:

- suas faces forem polígonos regulares congruentes;

- seus ângulos sólidos, determinados pelo encontro das faces em um vértice, forem congruentes.

Resulta daí que, em um poliedro regular:

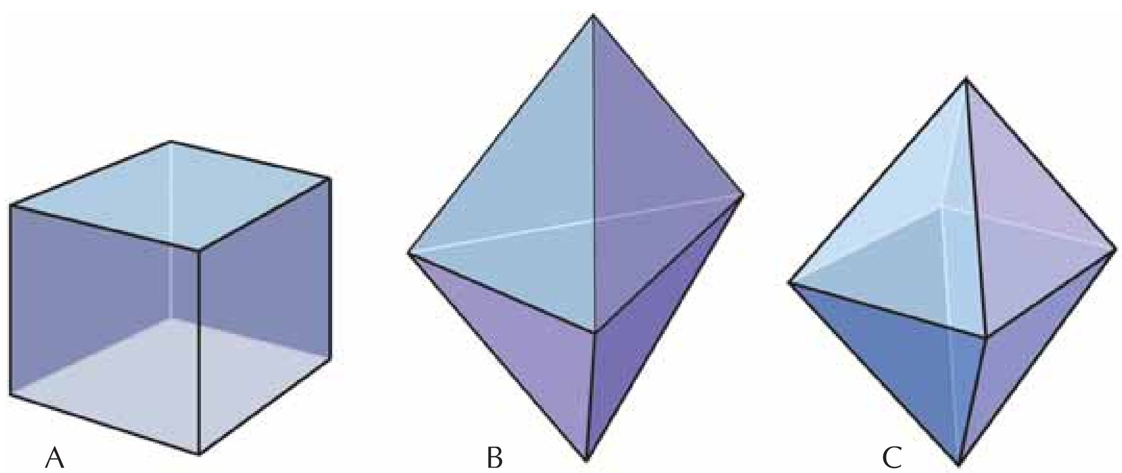
- em cada vértice do poliedro encontra-se um mesmo número de faces;

- as arestas são congruentes;

- os ângulos das faces são congruentes.

Atividade 10

Tendo em vista as propriedades que caracterizam poliedros regulares, decida quais dos poliedros A,B e C são regulares. Justifique sua resposta. As faces de B e de C são triângulos equilátieros.



Fonte: Geometry: an investigation approach, de P.G. O´Daffer e S.R.Clemens

Será que existem poliedros regulares com qualquer número de faces? Ou seja: será que, para cada número natural n, existe poliedro regular com n lados?

Talvez você saiba a resposta a essa pergunta. Nesse caso, você sabe justificar por quê?

Vamos propor uma atividade prática investigativa, nesse sentido:

Descobrindo quais são os poliedros regulares

Atenção!

Pegue tesoura, fita adesiva. À medida que for necessário, recorte algumas figuras do Anexo 1. Desenvolva toda a proposta que vem a seguir. Você verá que ela é adequada também para ser feita com seus alunos.

Vários livros mencionam quais são os poliedros regulares e apresentam as planificações correspondentes a cada um deles. O que faremos aqui é diferente: vamos tentar montar poliedros regulares a partir de polígonos regulares, e ver o que conseguimos.

Pensando que existem polígonos regulares com qualquer número de lados, a tarefa é assustadora, porque, se tivermos que trabalhar com todos eles, nossa tarefa vai precisar de um tempo infinito...

Todavia, você verá que as coisas são um pouco diferentes.

Lembre-se de que, nos poliedros regulares:

- as faces são polígonos regulares;

- em cada vértice do poliedro encontra-se um mesmo número de faces. (Os alunos também deverão saber isso.)

Apresentamos, a seguir, a atividade investigativa em dois passos.

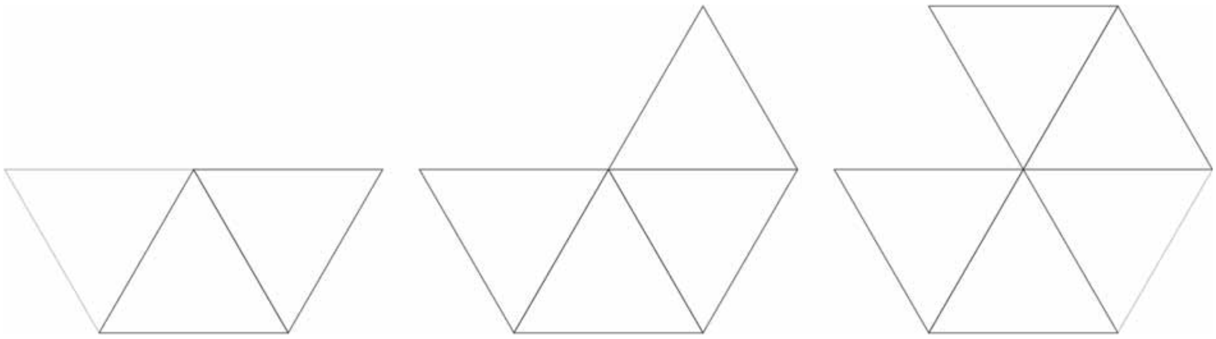
Atividade investigativa sobre os possíveis poliedros regulares

1º passo

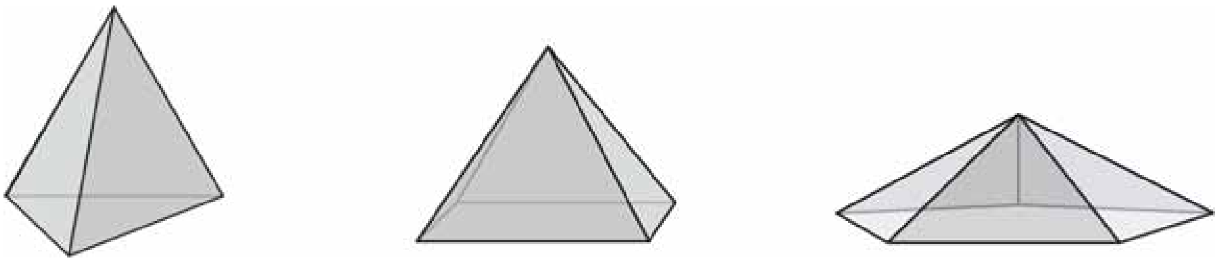
Juntando ângulos de polígonos regulares para ver quais podem ser faces de poliedros regulares

Inicialmente, você (e depois os alunos) devem ter as folhas do Anexo 1 coladas em cartolina. À medida que forem precisando, vocês recortarão as figuras necessárias. Primeiro passo: *tentar ver quais e quantos polígonos regulares você poderá juntar por um mesmo vértice, de modo a obter um ângulo sólido.*

a) Começando pelo triângulo eqüilátero (polígono regular de 3 lados):



No caso de 3, 4 e 5 triângulos eqüiláteros, será possível juntá-los e depois dobrar, montando um ângulo sólido.



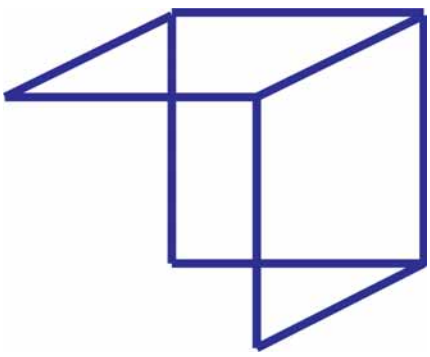
Se tomarem 6 triângulos, terão um ângulo de 360°, com o qual não poderá ser formado um ângulo sólido.

Resultado obtido

Se quisermos tentar montar poliedros cujas faces sejam triângulos eqüiláteros, só podemos tentar com 3, 4 ou 5 triângulos encontrando-se em cada vértice (formando os ângulos sólidos do poliedro). Mas ainda será necessário investigar se será possível completar o poliedro a partir desses ângulos sólidos.

b) Tentando juntar quadrados (polígono regular de 4 lados), de modo a obter um ângulo sólido:

Apenas 3 quadrados unidos por um mesmo vértice produzem um ângulo sólido (quatro já formam um ângulo de 360°).



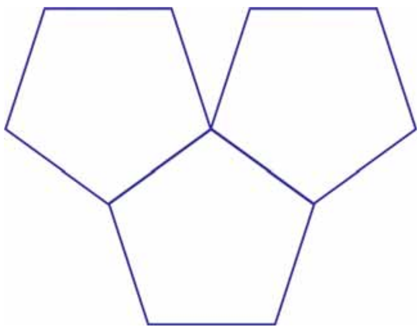
Resultado obtido

Se quisermos tentar montar poliedros com faces quadradas, só podemos fazê-lo com 3 quadrados encontrando-se em cada vértice. (Mas ainda será necessário ver se será possível completar o poliedro a partir desse ângulo sólido).

c) Explorando a união de pentágonos regulares (polígono regular de 5 lados) para fazer ângulos sólidos:

Você vai verificar que:

No caso de faces pentagonais, também só é possível três encontrarem-se em um vértice: soma total 324°.



Resultado obtido

Se quisermos tentar montar poliedros cujas faces sejam pentágonos regulares, só podemos unir 3 pentágonos por um mesmo vértice (e tentar depois completar o poliedro).

d) Unindo hexágonos regulares por um mesmo vértice para obter ângulos sólidos:

O ângulo interior do hexágono regular mede 120°. Unindo três deles por um mesmo vértice teremos um ângulo de 360° e portanto uma figura plana. Tente unir quatro deles por um mesmo vértice – você verá que quatro não produzirão ângulo sólidos.

Resultado obtido

Não existem poliedros regulares cujas faces sejam hexágonos regulares.

e) Unindo polígonos regulares com mais do que 6 lados:

Esses polígonos regulares não podem ser faces de um poliedro regular, pois seus ângulos internos medem mais do que 120°; como são necessárias pelo menos três faces para formar o ângulo sólido, a soma daria mais do que 360°.

Resultado obtido

Não existem poliedros regulares cujas faces sejam polígonos regulares com 7 ou mais lados.

Até aqui temos cinco possibilidades para começar a construção de um poliedro regular:

- as faces são triângulos eqüiláteros, 3 delas encontram-se em cada vértice do poliedro;
- as faces são triângulos eqüiláteros, 4 delas encontram-se em cada vértice do poliedro;
- as faces são triângulos eqüiláteros, 5 delas encontram-se em cada vértice do poliedro;
- as faces são quadrados, 3 delas encontram-se em cada vértice do poliedro;
- as faces são pentágonos, 3 delas encontram-se em cada vértice do poliedro.

Será que todas elas produzirão realmente um poliedro regular?

2º passo

Completando os poliedros regulares

A atividade consiste em tentar completar um poliedro regular, partindo:

- de cada um dos ângulos sólidos construídos com o triângulo eqüilátero;
- do ângulo sólido construído com 3 quadrados;
- do ângulo sólido construído com 3 pentágonos.

Isto é, os alunos tentarão fechar o poliedro, usando outras faces idênticas, de modo que os ângulos sólidos repitam o padrão do primeiro ângulo construído.

Para o primeiro ângulo sólido formado, com 3 triângulos eqüiláteros, a tarefa já está quase pronta: basta incluir um triângulo eqüilátero fechando o ângulo sólido, Todos os ângulos sólidos obtidos serão encontro de três faces, como o primeiro.

O poliedro terá 4 faces idênticas. Cada vértice é encontro de três delas. Teremos um tetraedro regular.

Recado

Prepare-se para mais uma atividade de recortar e juntar! Se você tem tendência a só querer ler e ver se entende (seguindo a aprendizagem tradicional) aproveite para mudar seus hábitos. Isso fará uma diferença enorme em sua aprendizagem. Mãos à obra: tesoura e fita adesiva, e veja como é bom entreter-se nesse tipo de atividade.

Atividade 11

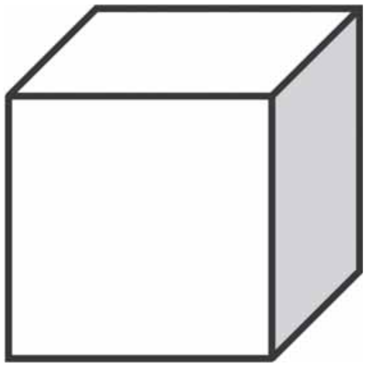
Recorte o restante dos triângulos eqüiláteros do Anexo 1.

a) Cole triângulos eqüiláteros de modo a unir 4 em um vértice. Prossiga do mesmo modo até conseguir fechar o poliedro. Quantas faces tem ele? Você sabe como se chama?

b) Cole triângulos eqüiláteros de modo a unir 5 em um vértice. Prossiga até conseguir fechar o poliedro. Quantas faces tem ele? Você sabe como se chama?

Vamos prosseguir com nossa tentativa de completar um poliedro regular.

c) Desta vez, vamos partir do ângulo sólido construído com 3 quadrados:



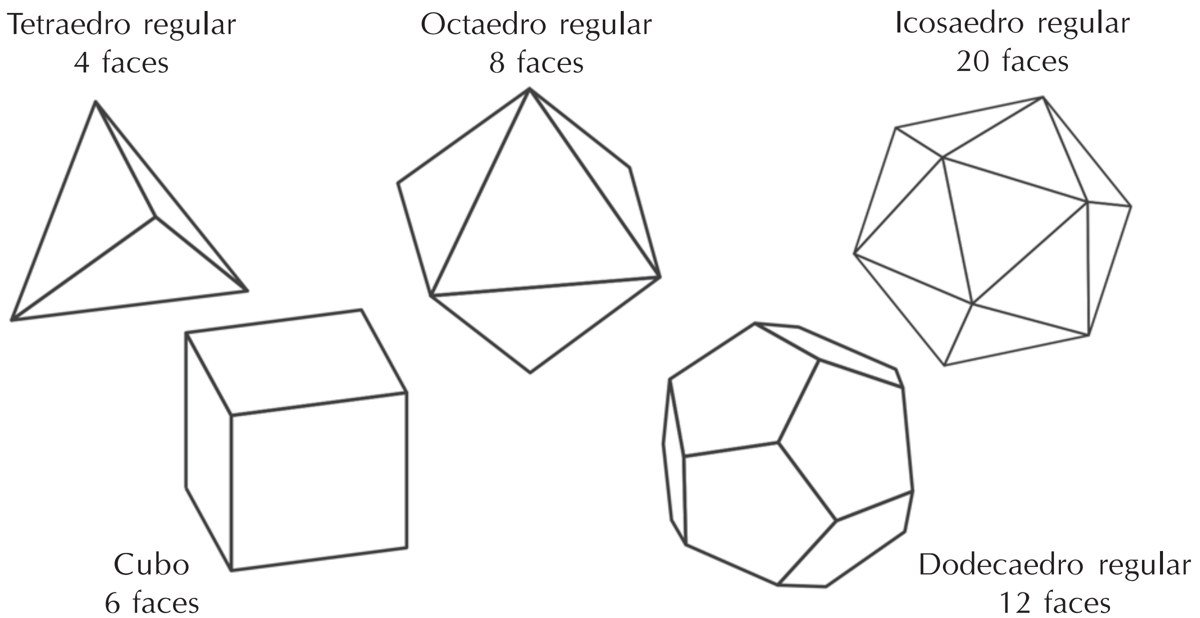
Vá colando outros quadrados no ângulo inicial, de modo que sempre três se encontrem em um vértice. Deu para imaginar o que você obterá? Se quiser, confira: é um cubo.

Ainda falta verificar qual poliedro regular poderemos obter a partir do ângulo sólido construído com 3 pentágonos. Volte para seu entretenimento com montagem de figuras, como indicado na Atividade 12.

Atividade 12

Cole pentágonos regulares de modo a unir 3 em cada vértice. Prossiga até conseguir fechar o poliedro. Quantas faces tem ele? Você sabe como se chama?

Veja, finalmente, o resultado de nossa investigação. Concluímos que só podem existir 5 poliedros regulares (os gregos já sabiam disso. Eram chamados *sólidos platônicos* - nome devido a Platão).



Articulando conhecimentos

Como sabemos, os cinco sólidos de Platão são poliedros regulares. Não têm arestas nem vértices reentrantes, sendo, portanto, *convexos*.

Mas é possível ampliar a definição de poliedros regulares, permitindo que tenham vértices reentrantes. Nesse caso, ao invés de exigir que todos os vértices sejam congruentes, exige-se que todos vértices salientes sejam congruentes e todos os vértices reentrantes sejam congruentes. Desse modo, poderemos falar de poliedros regulares *côncavos*, apresentados a seguir.

The four regular non-convex polyedra
Herman Serras

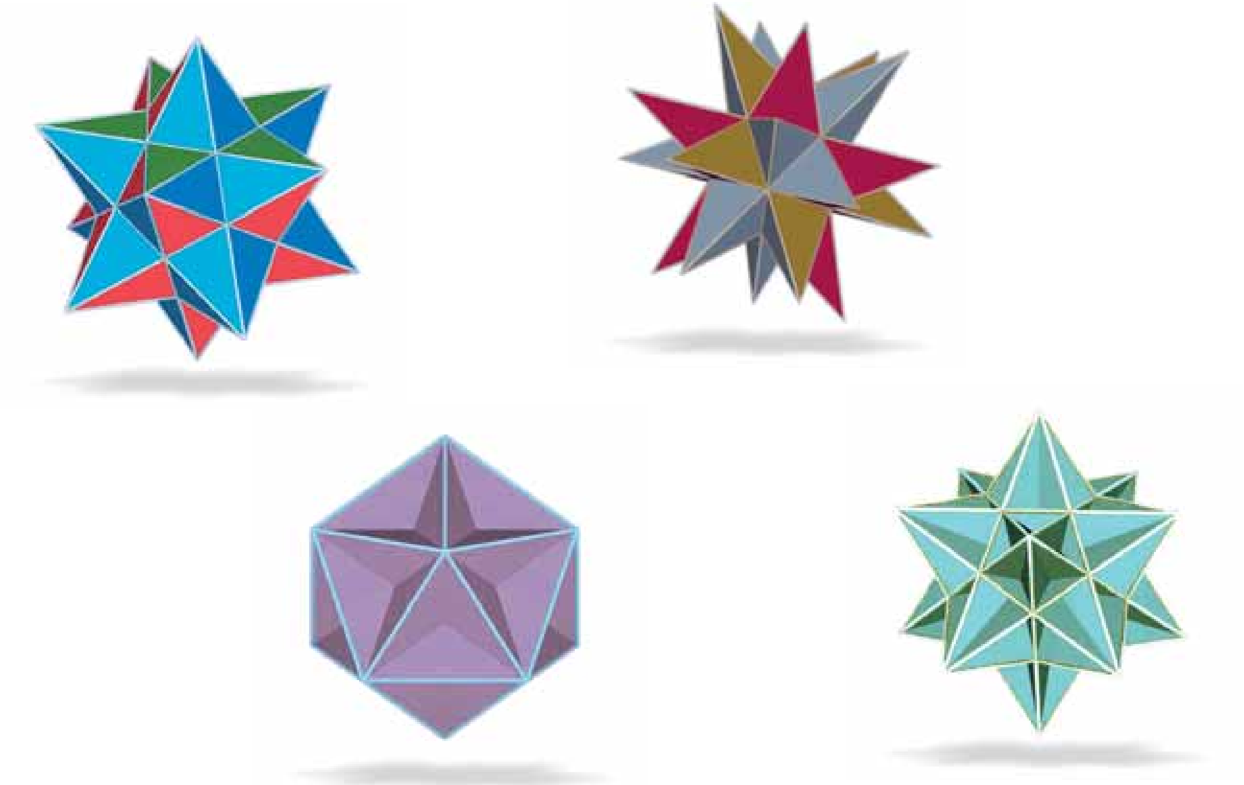


Ilustração 7

Também entre os corpos curvos existem os que são regulares, como a esfera, o toro, o elipsóide.

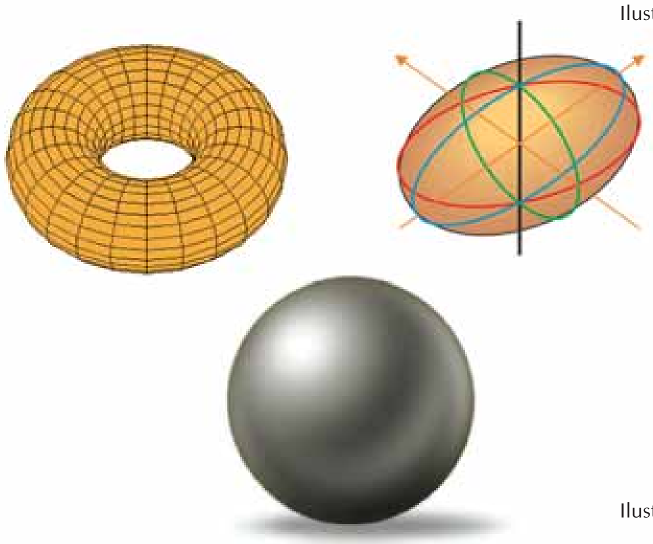
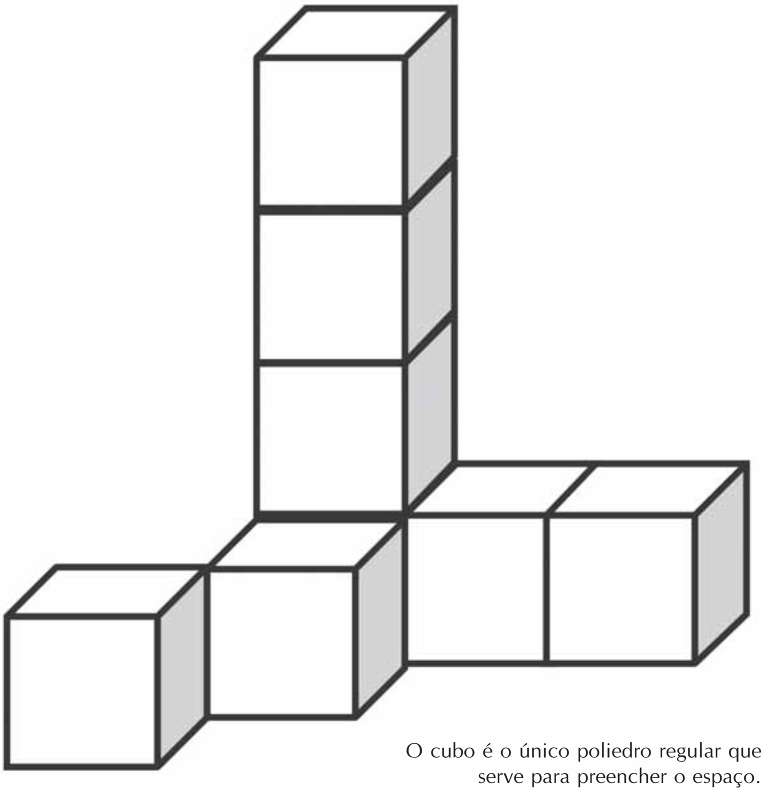


Ilustração 8

Economia e preenchimento com poliedros

No espaço, existe um problema análogo ao que mostramos no plano.

Se queremos preencher o espaço com poliedros idênticos, sem deixar buraco entre eles, qual será o que economiza mais em área externa? Pondo a questão do mesmo modo que foi colocada para o plano: gastando a mesma quantidade de papel, qual das figuras, entre as que preenchem o espaço, define um maior volume?



O cubo é o único poliedro regular que serve para preencher o espaço.

Veja que este é um problema de ordem prática: fábricas, como as de perfume, desejam fazer embalagens criativas e econômicas, e que possam ajustar-se quando empilhadas.

Uma idéia inicial é tentar com cada um dos cinco poliedros regulares.

Vemos logo que o cubo serve para isso (o bloco retangular também serviria, mas ele só é regular se for o cubo). Na verdade, o cubo é **o único poliedro regular que serve para preencher o espaço**. Embalagens na forma cúbica ou de blocos retangulares são bastante usadas. Elas podem ser acondicionadas em caixas ou empilhadas sem deixar espaço entre elas.

Entretanto, além do cubo, que é regular, existem mais quatro poliedros convexos**, não regulares,** mas *cujas faces são polígonos regulares* (não todas iguais entre si) que servem para preencher o espaço. Três deles são semi-regulares. Veja:

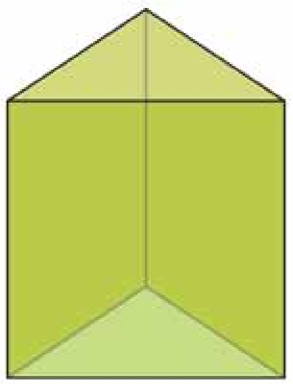
Poliedros semi-regulares

São poliedros nos quais toda face é um polígono regular, embora nem todas faces sejam do mesmo tipo. Todo vértice, contudo, é congruente a qualquer outro vértice, isto é, em torno de cada vértice, as faces que aparecem são as mesmas e apresentam-se na mesma ordem.

Os poliedros semi-regulares são também chamados arquimedianos, pois foram primeiramente descritos por Arquimedes. Existem 13 tipos desses poliedros.

Não vamos investigar nem mostrar quais são esses treze.

Entretanto, dentre esses treze, mostraremos quais são os três que servem para preencher o espaço:



As faces são quadrados ou triângulos eqüiláteros (todas polígonos regulares). Em cada vértice encontram- se dois quadrados e um triângulo.

Ilustração 9 - Prisma triangular semi-regular

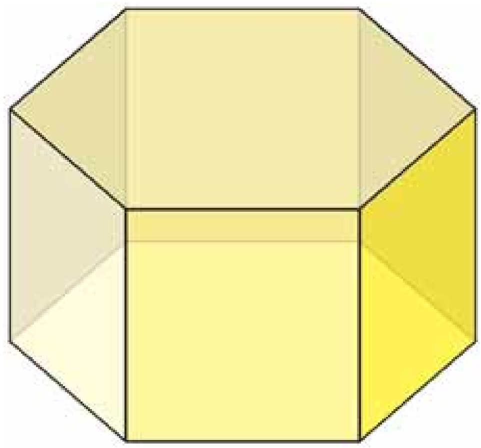


Ilustração 10 - Prisma hexagonal semi-regular

As faces são quadrados ou hexágonos regulares. Em cada vértice encontram-se dois quadrados e um hexágono.

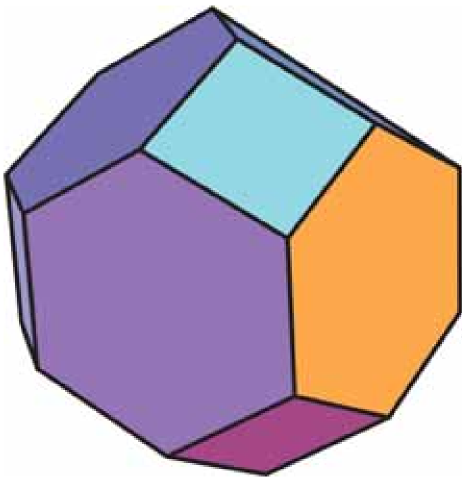


Ilustração 11 - Octaedro truncado

Parte-se de um octaedro, de onde se retiram 6 pirâmides de base quadrada, associadas a cada um dos seis vértices do octaedro. Obtém-se desse modo um poliedro com 14 faces, sendo seis faces quadradas e oito hexagonais. (Veja molde reduzido no Anexo 2).

Além dos quatro poliedros citados – um regular, ou platônico, e três semi-regulares, ou arquimedianos – temos mais um poliedro convexo que serve para preencher o espaço, denominado sólido de Johnson 26. Suas faces são polígonos regulares (quadrados e triângulos eqüiláteros), mas ele não é um poliedro semi-regular, pois seus ângulos sólidos não são congruentes: existem ângulos que são encontro de três faces e outros que são encontro de quatro faces. É um sólido formado por dois prismas triangulares unidos. Veja molde reduzido no Anexo 2.

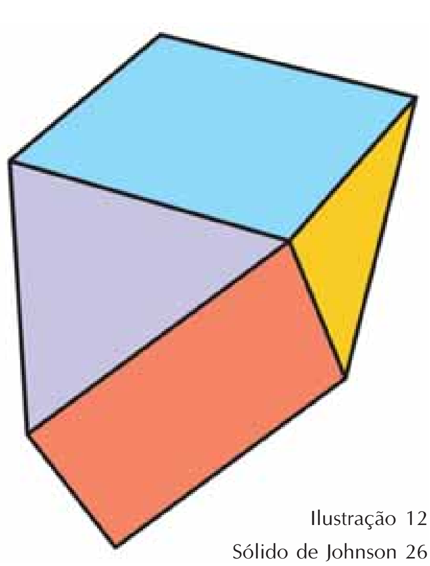


Ilustração 12
Sólido de Johnson 26

Há mais de cem anos, Lord Kelvin, matemático e físico, mostrou que o octaedro truncado era o poliedro que melhor satisfazia a condição de preencher o espaço de modo econômico. Todavia, veja, no texto a seguir, que novos conhecimentos matemáticos estão sempre surgindo.

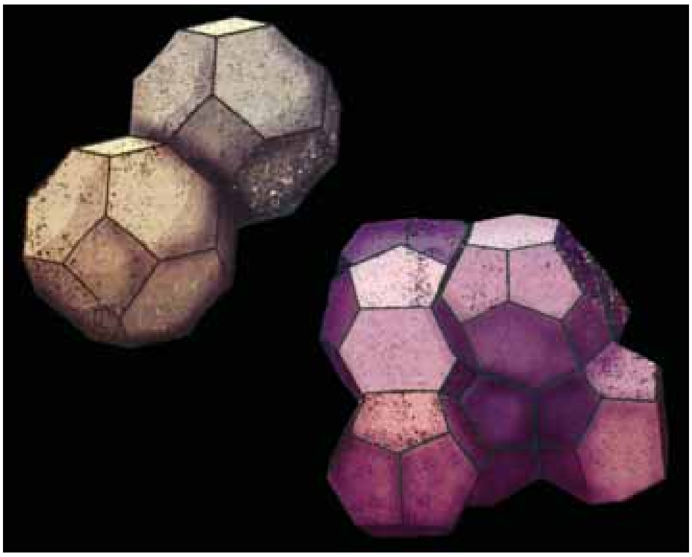


Ilustração 13 - Fonte: Revista Ciência Hoje/volume 18/número 105.

"O problema de superfícies mínimas discutido aqui foi reexaminado ao longo do tempo por muitos físicos e matemáticos ilustres, mas parecia difícil melhorar a construção sugerida por Kelvin há mais de cem anos. Recentemente foi encontrado um novo tipo de figura espacial, que preenche o espaço e tem superfície quase 0,3% menor que a de Kelvin".

(Poliedros parcimoniosos, de Marcelo A. F. Gomes, em Ciência Hoje, volume 18, nº 105)

Veja acima o preenchimento do espaço com os octaedros truncados de Kelvin e com as novas figuras espaciais.

Saindo dos revestimentos e preenchimentos, vamos estudar agora o outro conceito envolvido na situação-problema da piscina: o de semelhança.

Semelhança

Ampliações ou reduções de figuras planas produzem figuras semelhantes às originais, porque elas conservam a forma embora alterem as dimensões.

O conceito de semelhança tem relação com o conceito de congruência. Figuras congruentes são réplicas exatas uma da outra (ainda que uma possa ter sido feita no verso do papel - só virando-a vemos que é idêntica à outra). Elas têm a mesma forma e o mesmo tamanho.

Figuras semelhantes têm a mesma forma mas não precisam ter o mesmo tamanho. Olhando-as, é usual dizermos que são proporcionais, em linguagem comum.

Mas será que só a proporcionalidade das dimensões basta para termos figuras semelhantes?

Atividade 13

Pegue 5 varetinhas de tamanhos diferentes e mais outras 5, cada uma igual ao dobro do tamanho das primeiras varetas. Forme dois pentágonos, unindo pelas pontas as 5 varetas do primeiro conjunto e as 5 do segundo (você pode montar os pentágonos sobre uma mesa).

Os pentágonos serão necessariamente semelhantes?

No caso de figuras semelhantes, há vários conceitos matemáticos envolvidos: correspondência, igualdade de ângulos, proporcionalidade e razão de semelhança. Veja a definição:

Dois polígonos são semelhantes se existe uma correspondência um a um entre os lados e ângulos do primeiro polígono e os lados e ângulos do segundo, tal que:

- os ângulos correspondentes são congruentes;

- os lados correspondentes têm medidas proporcionais.

No caso dos pentágonos, para que sejam semelhantes devemos ter uma correspondência entre os lados e ângulos de ambos de modo que:

- os lados correspondentes sejam proporcionais;

- os ângulos correspondentes sejam congruentes.

Você deve ter visto, ao manipular as varetinhas da Atividade 13, que, tomando-se os lados de um pentágono como o dobro dos lados de um outro, poderemos construir pentágonos semelhantes e outros que não são semelhantes.

A razão entre a medida de um lado em um dos polígonos e a do lado correspondente a ele no outro polígono (razão essa que, em polígonos semelhantes, é a mesma para todos os lados) é chamada razão de semelhança.

Se duas figuras são semelhantes, podem ser colocadas uma sobre a outra de modo que seus lados sejam paralelos.

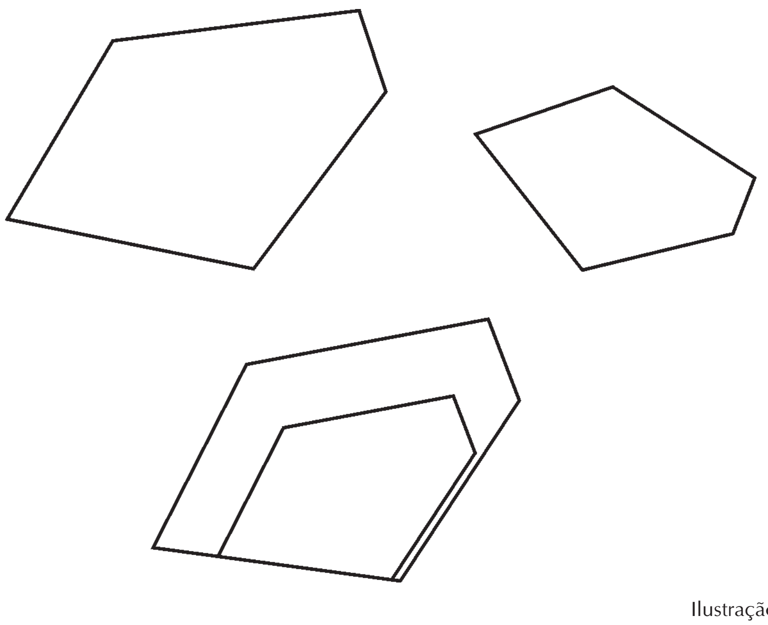


Ilustração 14
Figuras diretamente semelhantes
mathworld.wolfram.com

Em certos casos, para haver paralelismo na sobreposição, é necessário virar uma das figuras para o outro lado do papel.

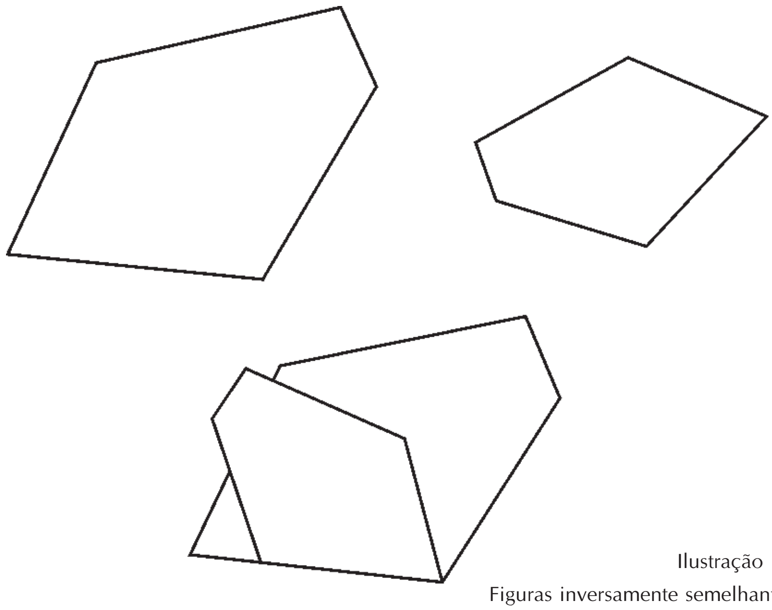
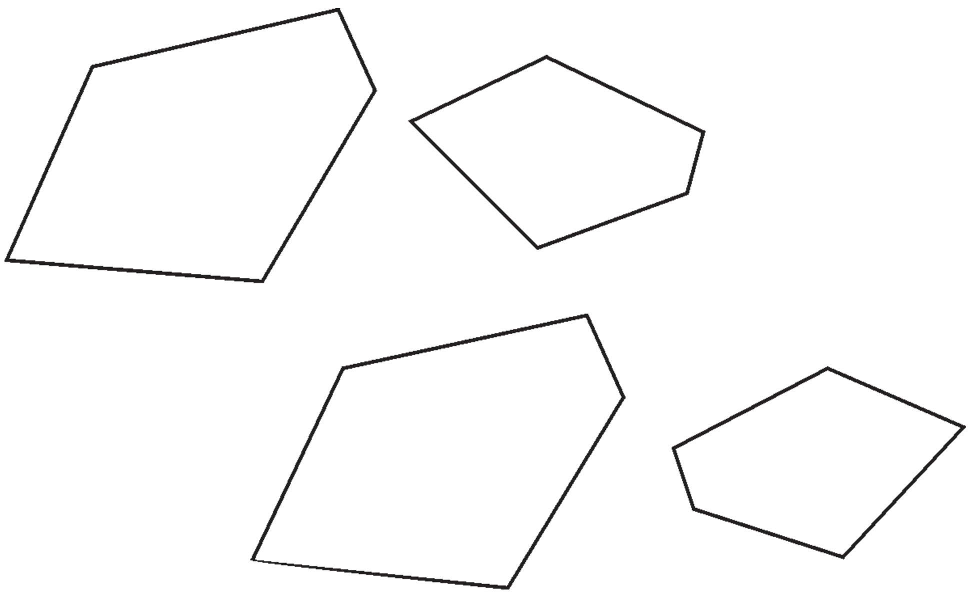


Ilustração 15
Figuras inversamente semelhantes
mathworld.wolfram.com

No primeiro caso, dizemos que as figuras são diretamente semelhantes: os ângulos correspondentes, além de serem iguais, aparecem, um após o outro, no mesmo sentido de rotação.

No segundo caso, dizemos que as figuras são inversamente semelhantes: os ângulos correspondentes são iguais, mas em uma delas eles aparecem em um certo sentido de rotação; na outra, em sentido inverso.



E dois poliedros, quando são semelhantes? Podemos definir:

Dois poliedros são semelhantes se existe uma correspondência um a um entre as faces e os ângulos sólidos do primeiro poliedro e as faces e ângulos sólidos do segundo, de modo que:

- os ângulos sólidos correspondentes são congruentes;

- as faces correspondentes são polígonos semelhantes.

Ou, em outra definição equivalente à anterior:

Dois poliedros são semelhantes se existe uma correspondência 1 a 1 entre faces e vértices do primeiro poliedro e faces e vértices do segundo, de modo que:

- as faces correspondentes são polígonos semelhantes;

- os vértices correspondentes são encontros de faces correspondentes, na mesma ordem.

Voltando ao caso da maquete da piscina:

Atividade 14

Verifique, segundo a última definição dada, se sua maquete e a piscina real que você planejou na unidade anterior são semelhantes. Para isso:

a) Mostre quais são as faces da piscina, e verifique se elas são semelhantes às faces da maquete.

b) Verifique se os vértices correspondentes, na piscina e na maquete, são encontros de faces respectivamente semelhantes, na mesma ordem.

Resumindo

Nesta seção, você conheceu ou recordou os seguintes conteúdos matemáticos:

• Se uma reta transversal encontra duas paralelas, temos a igualdade dos ângulos alternos internos, alternos externos e correspondentes; são suplementares os ângulos colaterais internos e colaterais externos.

• A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180°.

• A soma dos ângulos internos de um polígono com n lados é igual a $(n-2) \times 180^\circ$.

• Polígonos regulares são os que têm lados e ângulos iguais (congruentes).

• Poliedros regulares são aqueles em que as faces são polígonos regulares idênticos e os ângulos sólidos são idênticos (congruentes).

• A noção geral de semelhança.

• Polígonos semelhantes são aqueles que têm os ângulos idênticos e os lados proporcionais (estabelecida certa correspondência entre esses elementos).

• Poliedros semelhantes são aqueles que, estabelecida certa correspondência entre faces e vértices dos dois poliedros, as faces de um são polígonos semelhantes às do outro e os ângulos sólidos de um são congruentes aos do outro.

Seção 3

Transposição didática: revestimentos, preenchimentos, semelhanças e poliedros

Objetivo da seção

Ao longo desta seção, esperamos que você possa conhecer e produzir situações didáticas, envolvendo os conceitos e possibilidades de revestimento do plano, preenchimento do espaço, poliedros e semelhança, adequadas à série em que atua.

O estudo da geometria possibilita um campo rico e atraente de manipulações de desenhos e montagens com papel, madeira ou outros materiais; construções interessantes, formas artísticas. Tudo isso deve ser explorado e estimulado, sem perder de vista, contudo, que há conhecimentos matemáticos interessantes implícitos em cada uma dessas produções, que devem ser pensados e desenvolvidos junto aos alunos.

Nesta seção, vamos apresentar algumas dessas construções possíveis de serem feitas pelos alunos e, em várias delas, desenvolveremos conhecimentos matemáticos envolvidos.

1. Maquetes

Em geral, os alunos gostam de fazer maquetes, sejam de quadras esportivas, prédios etc. Deixe-os livres para escolherem o modelo, mas aproveite para chamar atenção de que elas só serão réplicas fidedignas (apenas com as dimensões alteradas) se algumas propriedades forem observadas.

A realização de uma boa maquete depende de:

a) o estabelecimento de certa correspondência entre as linhas e ângulos da obra real e as linhas e ângulos da maquete, conservando-se a seqüência e o sentido em que surgem;

b) a *proporcionalidade* entre as medidas de comprimento reais e as correspondentes da maquete;

c) a *igualdade* ou *congruência* dos ângulos correspondentes na obra real e na maquete.

Para obterem a proporcionalidade, deverão definir uma razão de semelhança, ou escala, e isso depende das medidas da obra real e do tamanho em que querem fazer a maquete. Por exemplo, se a maior medida linear no modelo real é 50m, e desejam fazer a maquete com a maior medida igual a 25cm, então poderão calcular a razão entre essas medidas: $\frac{50\text{m}}{25\text{cm}} = \frac{5000\text{cm}}{25\text{cm}} = 200$

Isso significa que toda medida de comprimento da realidade aparece reduzida 200 vezes na maquete. É necessário, portanto, partir de medidas bem feitas na obra real. Incentive os alunos a fazerem pesquisas sobre as medidas lineares e dos ângulos na obra que querem reproduzir em maquete. Em uma quadra de esportes, por exemplo, essas medidas são pré-definidas, sendo necessário pesquisá-las na internet ou em publicações.

Lembre-se também de que esse assunto já começou a ser explorado na situação-problema da segunda unidade do TP 1.

Conhecimento matemático implícito

Na verdade, o que está implícito na construção da maquete é o conceito de *semelhança*.

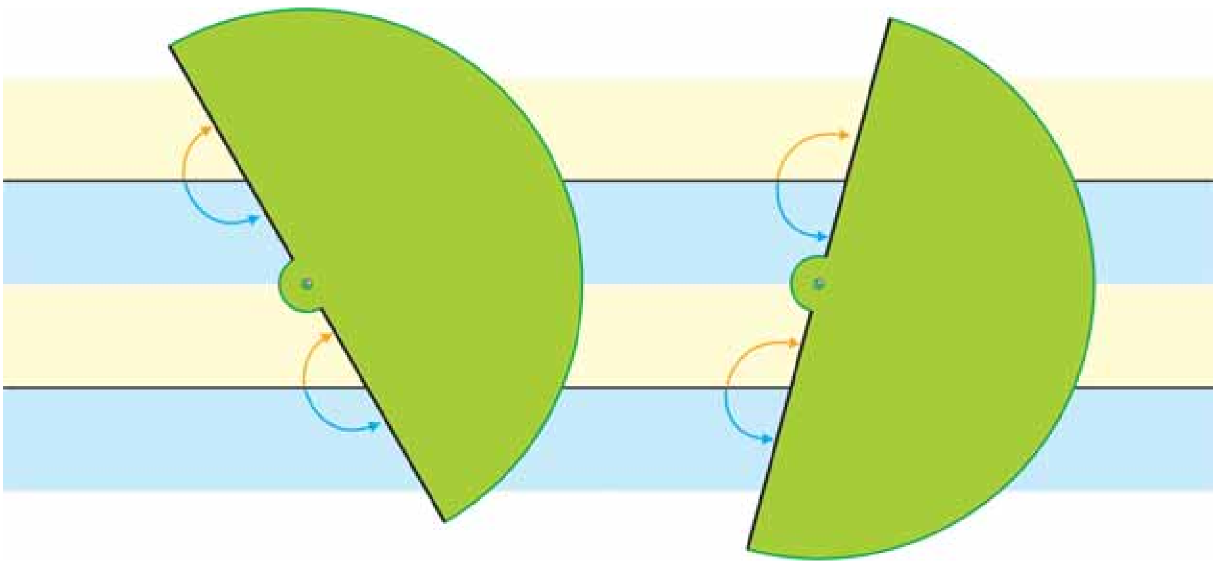
Compare as condições exigidas na construção da maquete e as condições que definem semelhança de figuras espaciais, como poliedros.

2. Materiais didáticos e comprovações práticas

a) Modelos com duas paralelas fixas e uma transversal móvel – em prancheta ou no computador.

No caso de termos duas paralelas cortadas por uma transversal, a igualdade de certos ângulos pode ser melhor visualizada com certos modelos concretos. Apresentaremos três modelos, cada um com uma finalidade.

1º modelo: Prancheta com duas retas horizontais, colorida conforme o modelo. Semicírculo móvel preso pelo centro, em cor neutra.



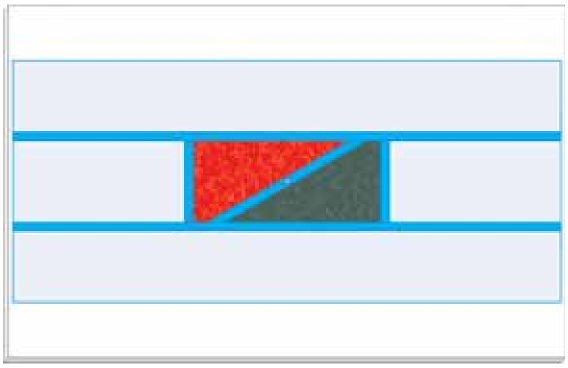
Repare que se vê claramente a igualdade dos ângulos amarelos e dos ângulos azuis formados de um lado da transversal (ângulos correspondentes).

Girando-se o semicírculo, a medida dos ângulos altera-se, mas os ângulos correspondentes permanecem iguais.

Conhecimento matemático implícito

O que está implícito na construção do modelo é a igualdade dos ângulos correspondentes quando se tem duas paralelas cortadas por uma transversal (resultado demonstrado em teorema da geometria plana).

2º modelo: Círculo entre duas pranchetas ou folhas de papel cartão, preso pelo centro na prancheta detrás. As pranchetas são brancas, coladas uma na outra ao redor do círculo, que pode ser girado entre elas. Recortar um retângulo da prancheta da frente. Fazer duas retas horizontais nas bordas do retângulo, pintadas na mesma cor que o diâmetro do círculo. Dividir o círculo em dois semicírculos e colorir cada metade de uma cor.

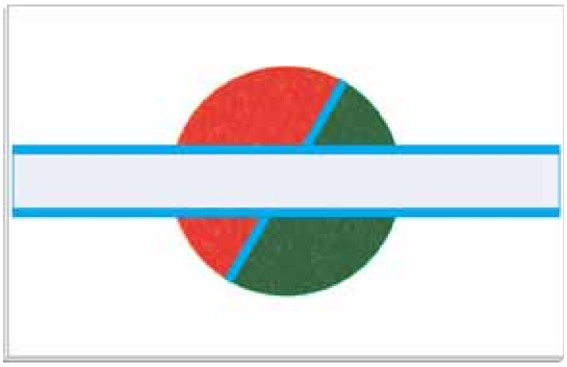

Prancheta com retângulo vazado, superposta ao círculo girante

Repare que se vê claramente a igualdade dos ângulos alternos internos. Girando-se o círculo, a medida dos ângulos altera-se, mas os ângulos alternos internos permanecem iguais.

Conhecimento matemático implícito

O que está implícito na construção do modelo é a igualdade dos ângulos alternos internos quando se tem duas paralelas cortadas por uma transversal (resultado demonstrado em teorema da geometria plana).

3º modelo: Círculo fixado no ponto central da prancheta de baixo. Por cima vai outra prancheta, mais estreita, cujas bordas horizontais representam as duas retas paralelas. Dividir o círculo em dois semicírculos e colorir conforme modelo (cor mais forte próximo ao diâmetro, clareando progressivamente). O diâmetro do círculo representa a reta transversal (que fica invisível entre as duas paralelas). As pranchetas são brancas.


Prancheta estreita superposta ao círculo girante

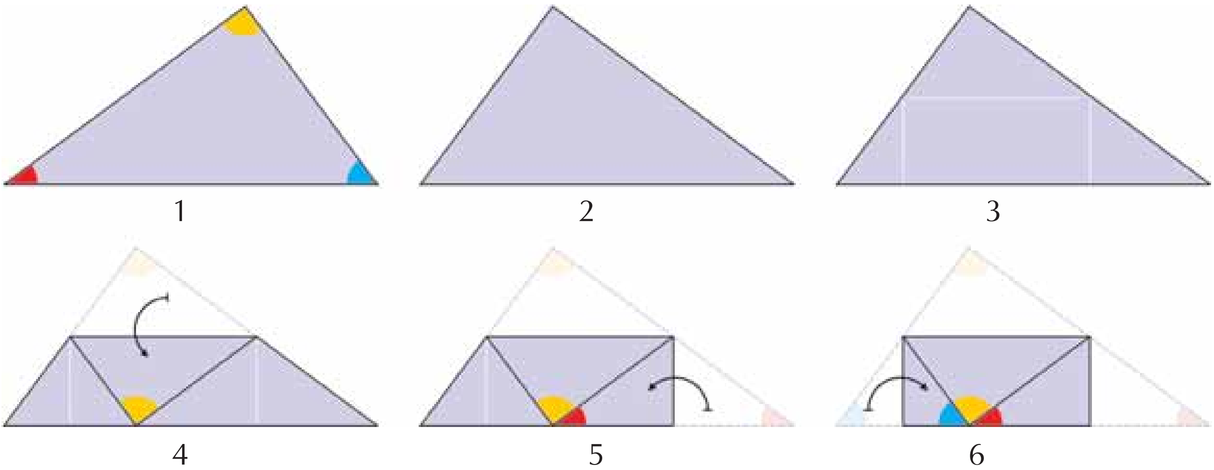
Conhecimento matemático implícito

A igualdade dos ângulos alternos externos quando se tem duas paralelas cortadas por uma transversal (resultado demonstrado em teorema da geometria plana).

b) Material para verificação da soma dos ângulos internos de um triângulo.

Recorte um triângulo qualquer. Pinte os seus três vértices, um de cada cor. Depois vire o triângulo do outro lado e deixe sem pintar. Fixe uma base e marque cuidadosamente o ponto médio dos outros dois lados. Trace uma linha leve unindo esses pontos médios, e dobre-a. Se houver boa precisão, o vértice oposto à base tocará a base, após a dobra.

Em seguida dobre os outros dois vértices laterais, até atingirem o vértice que já tocou a base. Veja que os três vértices estão juntos e formam 180°.



Conhecimento matemático implícito

Há vários conhecimentos implícitos.

1º) O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e vale metade dele.

2º) Dobrando-se por este segmento, fazendo o vértice superior tocar a base, aparecem dois triângulos laterais isóceles

3. Explorando os poliedros regulares

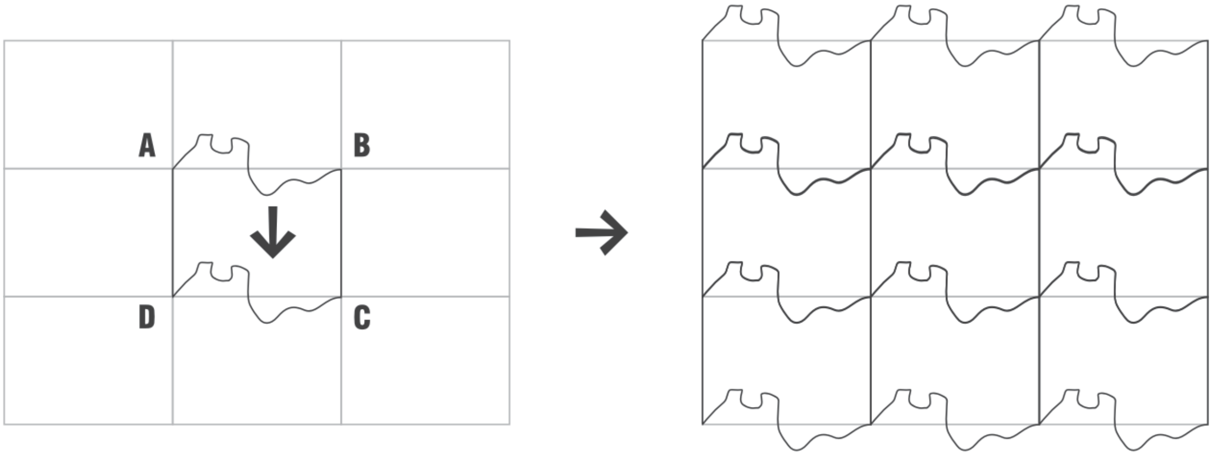
Na seção 2, você fez uma atividade que permitiu saber quais eram os poliedros regulares. A montagem dos poliedros regulares é uma atividade interessante para os alunos. No Anexo 2, apresentamos as planificações correspondentes a cada um deles. Entretanto, antes de montá-los, uma investigação exploratória, como a que você fez na seção 2, pode levar a vários conhecimentos que não ocorreriam na mera montagem dos modelos. Reveja como a atividade foi feita.

Explorando recobrimentos artísticos – as sugestões de Escher

Quando se fala em recobrimentos do plano, é impossível deixar de mencionar M.C. Escher, um artista gráfico holandês, do século passado, que usou esses recobrimentos em obras artísticas muito originais.

Ele usava uma estrutura básica que era uma grade de polígonos idênticos justapostos, nem sempre regulares. Uma de suas técnicas consistia em pequenas modificações feitas nesses polígonos, como se pode ver nos exemplos que seguem.

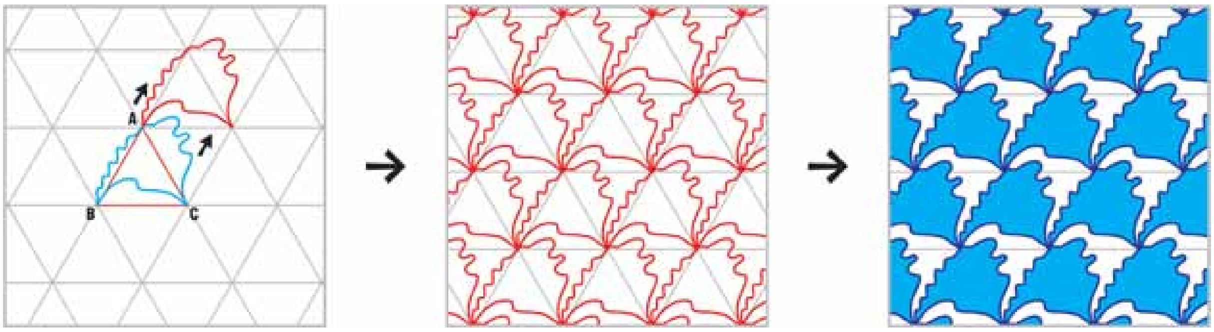
No primeiro, a estrutura básica é uma grade de retângulos, em que o lado superior é redesenhado como um segmento de curva, que é copiado no lado inferior. A mesma alteração repete-se em todos os retângulos da grade.



Nessa grade modificada, ele desenhava motivos repetidos de grande efeito.

Na grade abaixo, que consiste em triângulos eqüiláteros, as modificações devem ser feitas apenas nos triângulos na posição mais comum, com base horizontal e o terceiro vértice em cima. Os triângulos invertidos sofrerão modificações apenas como conseqüências das feitas nos triângulos diretos.

Veja que os três lados de cada triângulo foram alterados de modo distinto, e isso se repete em todos os demais triângulos. Apenas pelo uso de um contorno mais acentuado e duas cores na pintura, foi conseguido um efeito decorativo, que esconde totalmente a rede inicial de triângulos.



Veja outra modificação introduzida em grade formada de triângulos equiláteros.

Como dissemos, na grade modificada, Escher desenhava figuras como as do próximo exemplo.

Ilustração 16

Observe como foi feito:

A grade é de triângulos equiláteros em diagonal (sem lados horizontais). Trabalhe em um conjunto de 6 triângulos, formando um hexágono.

Copie o desenho de um dos triângulos e faça o mesmo desenho, de modo simétrico, no triângulo vizinho. Repita o desenho obtido nesses dois triângulos nos outros dois pares de triângulos que compõem o hexágono.

Para terminar, lembramos que a arte de Escher encontrou muitos seguidores. No Anexo 3, você tem o molde da face de um tetraedro decorado por algum deles. Copie quatro faces, cole e dobre. Quem sabe você entra para essa turma?

Resumindo

Nesta seção, você encontrou:

- *Idéias para o trabalho em sala de aula:*

  a) Observações sobre a construção de uma maquete e a escolha de escala apropriada.

  b) Artefatos para a verificação de propriedades matemáticas – pranchetas para visualização da igualdade de ângulos no caso de duas paralelas cortadas por uma secante; recorte e dobradura para a visualização da soma dos ângulos internos de um triângulo.

  c) Construção dos poliedros regulares e inferência de que há apenas cinco deles.

  d) Uso da arte de Escher no recobrimento de superfícies planas e de poliedros. Observação, em ação, de translações, simetrias e rotações.

- *Considerações sobre o trabalho em sala de aula, do ponto de vista de Educação Matemática.*

  - O conhecimento cristalizado em certos artefatos e procedimentos.

Leituras sugeridas

IMENES, L.M. *Geometria dos mosaicos*. Coleção vivendo a matemática. São Paulo: Scipione, 1992.

O livro é de leitura rápida e muito ilustrado. Mostra aspectos interessantes de mosaicos (ou recobrimento do plano). Há muitas situações e produções geométricas adequadas para a sala de aula, que, certamente, despertarão muito interesse entre os alunos.

MACHADO, N.J. *Os poliedros de Platão e os dedos da mão*. Coleção vivendo a matemática. São Paulo: Scipione, 1990.

O livro, de cerca de 50 páginas e bem ilustrado, reforça conceitos explorados nesta unidade, como o de poliedros e polígonos regulares. Apresenta um modo interessante e bem fundamentado para a construção do pentágono regular, a partir do ângulo externo.

MACHADO, N.J. *Semelhança não é mera coincidência*. Coleção vivendo a matemática. São Paulo: Scipione, 1990.

O livro pertence à mesma coleção dos dois anteriores e tem as mesmas características: leitura rápida e agradável, muitas ilustrações. Apresenta interessantes aspectos do conceito de semelhança, trabalhado nesta unidade.

Bibliografia

BARBOSA. R. M. *Descobrindo padrões em mosaicos*. São Paulo: Atual, 1993.

GOMES, M.A.F. *Poliedros Parcimoniosos*. In: Ciência Hoje, v. 18, n. 105, p. 20-21. Rio de Janeiro: SBPC, 1994.

O´DAFLER, P.G. e CLEMENS, S.R. *Geometry:* an investigative approach, *2*. ed. Menlo Park: Addison Wesley, 1977.

ROUCHÉ, E. e COMBEROUSS, Ch. De. *Traité de Géométrie*. Paris: Gauthier-Villars, 1954.

SITES UTILIZADOS:

<http://library.thinkquest.org/16661/escher/tesselations.1.html>

<http://library.thinkquest.org/1661/index2.html?tqskip1=1&tqtime=0824>

<http://mathcentral.uregina.ca/RR/database/RR.09.96/archamb1.html>

<http://garnet.acns.fsu.edu/~jflake/math/GeomSp/GSTess.html>

Texto de referência

Teoria das situações didáticas

Cristiano Alberto Muniz

O ponto de partida da aprendizagem matemática no programa de matemática do GESTAR é a resolução de situações-problema, colocando a questão da «situação» como foco importante na discussão acerca do processo de ensino. Como visto ao longo das seções de cada unidade dos Cadernos de Teoria e Prática, há uma forte preocupação dos seus autores com o contexto no qual se realiza a produção matemática. Resolver situação desprovida de uma significação mais ampla daquela da escola não pode ter o mesmo sentido e valor quando o aluno está mergulhado numa situação de alta relevância sociocultural. Isso faz com que seja importante para o professor considerar o contexto no qual se aloca a situação proposta ao aluno para sua produção matemática.

Segundo a Teoria das Situações do matemático e didata francês Guy Brousseau[1] da Universidade de Bordeaux, dois contextos diferentes devem ser considerados no que se refere à aprendizagem matemática. Num Texto de Referência anteriormente trabalhado por nós, falávamos e refletíamos sobre o conhecimento matemático em ação, quando discutimos sobre as regras que definem as ações do aluno na geração do conhecimento matemático. Para Brousseau, o contexto de ação é determinante na constituição do processo de produção do conhecimento, pois o contexto é um critério importante sobre os saberes que o aluno pode ou não mobilizar para sua ação cognitiva. Os critérios de validação de ação do pensamento dos alunos advém sobretudo da situação à qual ele está submetido, da representação que o aluno possui desta situação, e, em especial, do conjunto de regras que estruturam as relações nesse contexto.

A Teoria das Situações define dois contextos, as **situações a-didádicas** e as **situações didáticas**. Estar numa ou noutra situação define a natureza do processo de produção de conhecimento matemático. Essa diferenciação deve ser levada em conta pelo professor enquanto mediador desse processo de aprendizagem matemática. Fazer uma conta diante de professor não é a mesma coisa de fazer uma conta diante de um pipoqueiro. As influências dos personagens presentes nas cenas, as regras existentes nas relações entre o aluno e os demais participantes da situação, a natureza do conhecimento presente na situação, os critérios de validação de cada situação, a forma de avaliação da capacidade do aluno em fazer matemática em cada uma delas, faz grande e importante diferença na postura do aluno, tanto em relação ao objeto de conhecimento matemático, quanto dos procedimentos de fazer matemática.

Situação A-Didática como o objetivo da educação matemática

A grande meta da educação matemática é o desenvolvimento de habilidades e competências para que o aluno resolva as situações presentes no espaço exterior da escola, quando o professor é personagem ausente, onde não há ninguém a controlar as formas

1 Teve sua tese e suas idéias centrais que forma sua teoria sobre a didática matemática, publicada na obra **Théorie des Situations Didactiques,** La pensée sauvage, éditions, Grenoble, 1998**.**

de produção de soluções das situações-problema por ele vivenciadas. Tudo aquilo que o professor propõe e faz tem de ter como meta o preparo do aluno para a vida e para o exercício de sua cidadania, o que não é possível se nos limitarmos a aprender a resolver os problemas propostos pelo livro didático. A escola, a didática e os professores serão mais competentes na medida que a proposta pedagógica se aproxime do contexto real, sem criar um mundo à parte cujo conhecimento o aluno não saiba transferir para contextos mais amplos e mais complexos como são os da vida real.

Na situação a-didática o sujeito é livre, ele se vê e se sente livre, tendo como critério de validação e correção de sua produção suas próprias estruturas e conhecimento. Ele, nesta situação, não se sente controlado pelo professor, e não está preocupado em produzir para o outros, mas para resolver uma situação-problema que a ele pertence.

Situação didática como estratégia de ensino

Trata-se da situação onde a produção é controlada pelo professor via um contrato didático. O aluno produz de forma não livre, sendo balizada por um conjunto de regras que definem um **contrato didático**. Esse contrato é constituído por um conjunto de regras implícitas ou explícitas que definem o papel do aluno, como do professor, no processo de produção de conhecimento. Assim, o contrato didático, base da constituição da situação didática, diz respeito a esse conjunto de regras que rege a totalidade do funcionamento da prática pedagógica. As regras do contrato, que definem o que se pode e não se pode, o que se deve e o que não se deve, o que é desejável e não desejável no processo da construção do saber, acabam por definir as ações realizadas pelos alunos no processo de aprendizagem. Ações que não estariam presentes na situação a-didática são aqui presentes, pois é necessário cumprir com o contrato didático. Na mesma linha de raciocínio, ações presentes na situação didática estão ausentes nas situações a-didáticas pois o aluno não se vê sob a tutela do professor e subjugado às regras de um contrato que só tem validade no espaço e no tempo da escola.

Assim, as ações matemáticas realizadas dentro ou fora da escola começam a se distanciarem de maneira significativa, onde a produção nas situações a-didáticas são mais naturais e espontâneas, enquanto que na escola a produção visa sobretudo a cumprir o professor, cumprir o contrato, ter sucesso na escola e dela se afastar.

Dialética entre situação a-didática e situação didática[2]

A concepção moderna de ensino demanda do professor provocar no aluno adaptações desejáveis, por uma escolha judiciosa, aos problemas por ele propostos. Estes problemas, escolhidos de maneira que o aluno os possa aceitar, devem fazê-lo agir, falar, refletir, evoluir em seu próprio movimento. Entre o momento onde o aluno aceita o problema como seu e aquele onde ele produz sua resposta, o professor se recusa a interferir como propositor de conhecimentos que ele quer ver aparecer. O aluno sabe bem que o problema foi escolhido para fazer com que ele adquira um conhecimento novo, mas ele deve

2 Tradução livre das pp 59-60 do livro **Théorie des Situations Didactiques**.

saber também que este conhecimento é inteiramente justificado por uma lógica interna da situação e que ele pode construi-la sem apelar a razões didáticas. Não somente ele pode, mas ele deve também, pois ele não terá verdadeiramente adquirido este conhecimento a não ser que seja capaz de colocá-lo em ação, ele próprio, em situações que se encontre fora de todo contexto de ensino e na ausência de toda e qualquer indicação intencional. Uma tal situação é chamada de situação a-didática.

Assim, podemos dizer que o que define uma situação ser didática ou a-didática não é a sua localização geográfica, mas sim o conjunto de regras que rege, momentaneamente e circunstancialmente, a natureza de produção matemática. Quando fora da escola, em casa, por exemplo, ao estudar ou fazer os deveres de casa, a produção pode ser definida pelas regras do contrato, mesmo na pseudo ausência do professor, pois a produção destina-se, finalmente, ao sucesso escolar. É quando o aluno rejeita a ajuda e/ou participação de terceiros na produção matemática, alegando «Não, você não sabe como ele quer que se faça!». Assim, o engajamento na atividade matemática pelo aluno não é desprovida de um sentido maior: faça-se a atividade matemática para satisfazer um contrato rigidamente controlado pela escola. A capacidade de «fazer matemática» do aluno é sinalizada pela sua capacidade em cumprir com as regras do contrato: «De que vale você resolver o problema com cálculo mental, se não sabe escrever como o fez na prova. Fica com zero do mesmo jeito».

Se pode haver situação didática fora do espaço escolar, longe da presença física do professor, pode ser (e é o mais desejável) que haja situação a-didática dentro da sala de aula e diante do professor. É o momento quando o aluno está a resolver uma situação-problema que já assumiu como sua propriedade, e se lança a estratégias e procedimentos próprios, a mobilizar algoritmos mais espontâneos, preocupado com o cumprimento de um contrato didático. Esses momentos são de riqueza e importância vital no processo pedagógico, pois somente nesses processos o professor pode identificar a real capacidade do aluno de «fazer matemática».

O papel do professor é buscar garantir, cada vez mais, a presença de situações a-didáticas nas situações didáticas, ou seja, que os alunos se sintam gradativamente mais livres de produzirem, testarem, reverem e fazer evoluir seus conceitos e teoremas em ação. Somente nesse contexto podemos conceber um real espaço de matematização na escola e no favorecimento do desenvolvimento do potencial matemático de nossos alunos. A escola e o professor falham quando o processo fica simplesmente o contexto didático pelo didático, onde o aluno desenvolve a capacidade de responder às regras do contrato, aprendendo a ser um «bom aluno», o que não significa de forma alguma em ter capacidade de mobilizar os saberes escolares na sua ação enquanto cidadão. Assim afirma Brousseau:

> «O professor deve sem cessar ajudar o aluno a se liberar, desde que possível, a situação de todos os seus artifícios didáticos para lhe deixar o conhecimento pessoal e objetivo»(p. 60)

O que vem, então, a ser didática?

A didática busca, nesta perspectiva da Teoria das Situações, não ser uma prescritora de técnicas e metodologias de transmissão do saber científico. O papel da ciência e da prática da didática é de buscar descrever e de compreender esse complexo sistema de construção de conhecimento entre o espaço da situação didática e da situação a-didática, a partir do qual o professor possa constituir um contrato de conotação provisória, fluída e frágil. Somente essa característica de fragilidade do contexto permite ao aluno uma breve liberação das regras do contrato para assumir as ações desenvolvidas na situação didática como esquema de ação a ser mobilizado em contextos mais amplos e significativos.

A noção de devolução proposta por Brousseau

Partindo da idéia de que é papel do professor selecionar e oferecer ao aluno a «boa situação» que favoreça a aprendizagem, isso faz com que, de início, antes de ser propriedade do aluno, a situação seja produto do professor. É o professor que, conhecendo os objetivos educacionais, busca nas situações a-didáticas uma situação adequada e adapta a situação para o contexto didático. Mas, para que a aprendizagem se efetive, a situação tem de ser propriedade, espaço de pensamento do aluno e não do professor. Isso requer uma transferência de propriedade psicológica da situação do professor para o aluno. É necessário instaurar um processo onde o aluno sinta que o problema é seu e que sinta alto desejo e necessidade de resolvê-lo. Esse processo de transferência de propriedade é chamado de **devolução.** Enquanto a devolução não se processa, o aluno não começa a pensar na situação e não produz matemática. Mas, na nossa concepção, a devolução é um processo de mão dupla: se em um sentido o professor transfere a situação ao aluno, seduzindo-o pela problemática, no outro sentido, o aluno deve transferir o processo de resolução ao professor, fazendo compreender que o processo foi construído na busca da construção de uma solução. Acreditamos que a mediação pedagógica só será completa quando a devolução se realizar nessa perspectiva de mão dupla. As regras de realização da devolução nos dois sentidos devem estar explicitadas no contrato didático estipulado entre as partes. Tanto o processo de assimilação da situação pelo aluno, quanto a responsabilidade de comunicar o processo de resolução formam uma coluna vertebral da mediação pedagógica.

A didática como um jogo: as regras que definem a aprendizagem num contexto didático

Segundo Brousseau (p. 60-61), o contrato didático é a regra do jogo e a estratégia da situação didática. É o meio que o professor tem de colocar em cena a situação. Mas a evolução da situação modifica o contrato que permite então a obtenção de novas situações. Da mesma maneira, o conhecimento é aquilo que se expressa pelas regras da situação a-didática e pelas estratégias. A evolução destas estratégias requer produções de conhecimento que permitem à sua vez a concepção de novas situações a-didáticas.

O contrato didático não é um contrato geral. Ele depende estritamente dos conhecimentos em jogo. Na didática moderna, o ensino é a devolução ao aluno de uma situação a-didática, correta, a aprendizagem é uma adaptação a esta situação. Veremos que podemos conceber essas situações como jogos formais e que esta concepção favorece a compreensão e a teorização das situações de ensino.

O que leva a estabelecer uma relação do fazer matemático na situação com o jogo é o fato de haver uma convergência conceitual entre as duas atividades:

• Um conjunto de relações que coloca em cena a existência de um jogador que sente prazer na realização da atividade.

• A organização da atividade num sistema de regras.

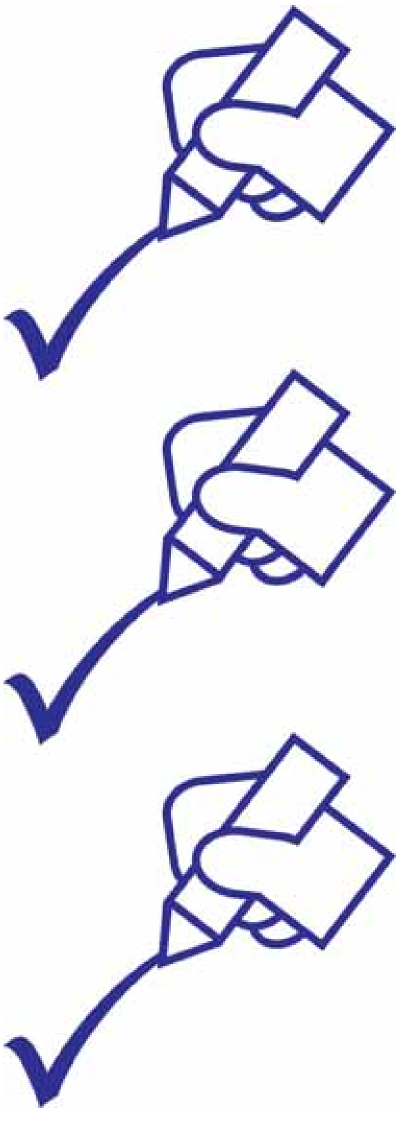
• A existência de «instrumentos do jogo».

• As estratégias e táticas. Isso refere-se ao desenvolvimento de procedimentos.

• A possibilidade de tomada de posição, de opções, de escolhas possíveis entre mais de uma possibilidade, por não se tratar de trajetória de caminho único.

Muitas são as maneiras de conceber a construção do conhecimento como um tipo de jogo. Numa primeira aproximação entre jogo e fazer matemática é a relação do indivíduo com o objeto de conhecimento, num jogo solitário, e em segundo, num jogo coletivo, sustentado pela necessidade de comunicação, argumentação e provas.

Solução das atividades



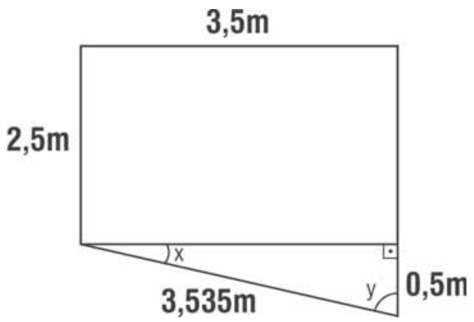
Solução das atividades

Atividade 1

Resposta pessoal. No caso da piscina que nós projetamos:

a) Com exceção de dois, todos os ângulos que aparecem na piscina e na maquete valem 90°. Basta verificar a igualdade daqueles dois.

Os ângulos que não são retos aparecem na última parte da lateral maior da nossa piscina:



Para fazer nossa maquete, deveríamos investigar, com o uso da matemática, quanto valeriam na piscina real os ângulos indicados, e manter os mesmos valores na maquete.

Um modo de fazer isso seria usando trigonometria. Podemos determinar qual o cosseno do ângulo x e, tendo o valor do cosseno, achamos o valor de x.

A trigonometria é um recurso bem útil em Matemática.

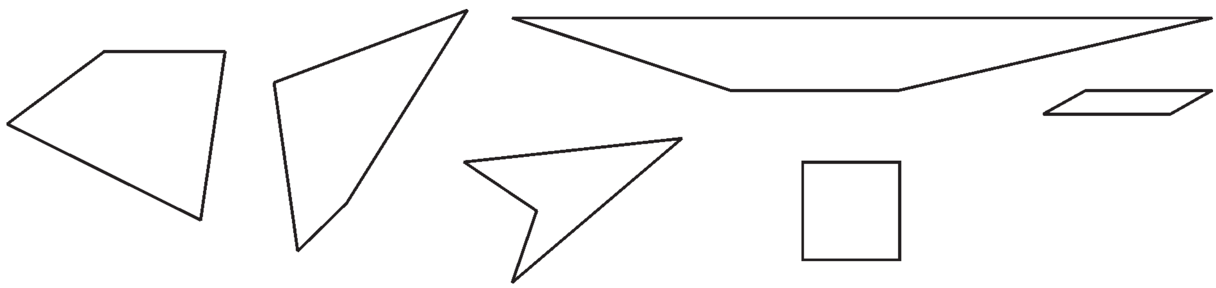
Todavia, para fazermos os ângulos da maquete iguais aos da piscina, basta entender um pouco de triângulos retângulos. Nessas figuras, *se houver proporcionalidade dos lados, então os ângulos já serão iguais* (o que não ocorre para qualquer polígono).

b) Para fazer nossa maquete, dividimos todas as medidas por 100. O triângulo retângulo, na maquete, ficou com medidas 3,5cm; 0,5cm e 3,535cm, que são proporcionais aos lados do triângulo que aparece na piscina real. Portanto os ângulos x e y da piscina real serão iguais aos correspondentes na maquete - entre pares de *triângulos, a proporcionalidade dos lados correspondentes acarreta a igualdade dos ângulos correspondentes*.

Atividade 2

(V) Fixando-se o número de lados como n, podem-se construir infinitos polígonos distintos (não congruentes) com n lados.

Por exemplo, para 4 lados, há uma infinidade de variações possíveis:



(V) Para cada número natural n, existem polígonos com n lados que não são congruentes nem semelhantes.

Basta ver nos exemplos acima (n=4). Os polígonos não são congruentes nem semelhantes.

(V) Fixando-se o número de lados como n, podem-se construir infinitos polígonos regulares distintos (não congruentes) com n lados.

Justificativa: lembrando o valor da soma dos ângulos internos de um polígono de n lados, para obter o valor do ângulo interno de um polígono regular com n lados, devemos dividir o valor dessa soma por n. Veja:

Número de lados	**Soma dos ângulos internos**	**Valor de cada ângulo (polígono regular)**
3	180°	60°
4	360°	90°
5	540°	108°
6	720°	120°

Desse modo vemos que:

- um triângulo eqüilátero (ou regular) tem os ângulos internos iguais a 60°;

- um quadrilátero regular (quadrado) tem os ângulos internos iguais a 90°;

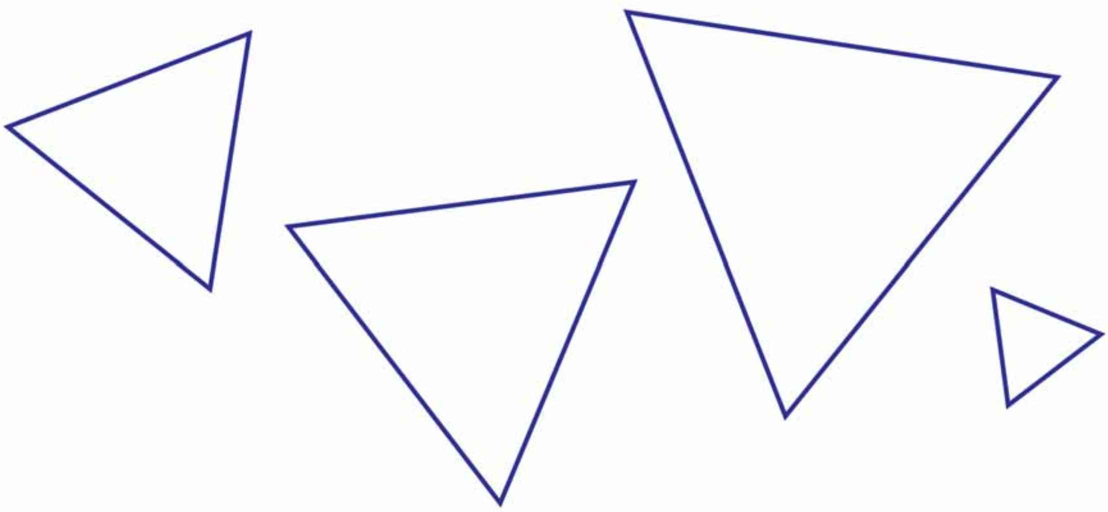
- um pentágono regular tem os ângulos internos iguais a 108°;

- um hexágono regular tem os ângulos internos iguais a 120°.

Mantendo o ângulo e variando o tamanho do lado, temos infinitos polígonos regulares não congruentes com n lados, todos semelhantes entre si.

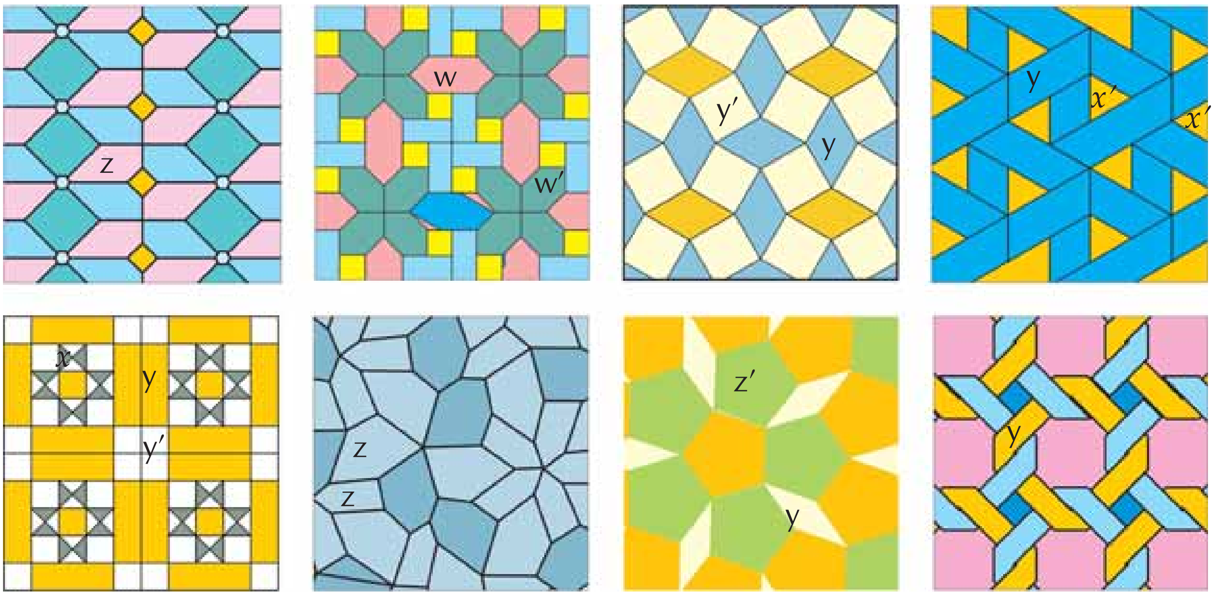
(F) Para cada número natural n, existem polígonos regulares com n lados que não são congruentes nem semelhantes.

Justificativa: os polígonos regulares que podemos construir com n lados são semelhantes entre si, como no exemplo abaixo, dos triângulos.



Atividade 3

Resposta pessoal. Por exemplo, você pode ter marcado:



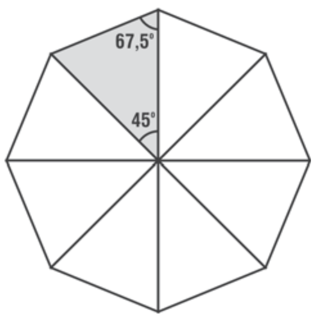
Atividade 4

a) 4; 90°; soma 360°.

b) 6; 60°; soma 360°.

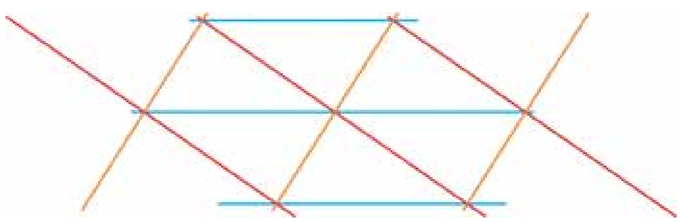
c) 3; 120°; soma 360°.

d) Não. Argumentos pessoais, como o que se segue: dividindo-se o octógono regular em oito triângulos congruentes, vemos que serão isósceles e possuem um ângulo (com vértice no centro do octógono) valendo 45°, obtido da divisão de 360° por 8. Os outros dois ângulos de cada triângulo valem juntos (180°– 45°)/2, portanto cada um vale 67,5°. O ângulo interno do octógono, formado por dois lados consecutivos vale o dobro, portanto, 135°. Essa medida não é divisor de 360°.

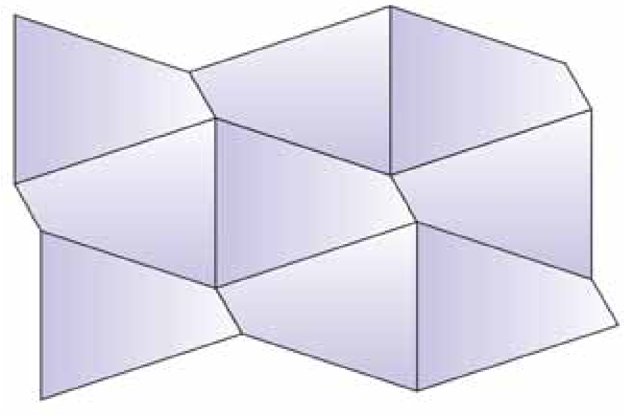


Atividade 5

a) sim



b) sim



Atividade 6

Em um n-ágono (n lados), a soma dos ângulos internos vale (n – 2) x 180°.

Atividade 7

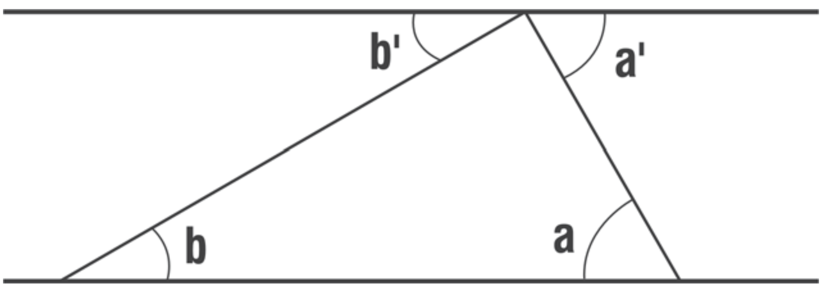
Calcule a soma dos ângulos internos:

a) em um pentágono: $(5 - 2) \times 180^o = 3 \times 180^o = 540^o$

b) em um octógono: $(8 - 2) \times 180^o = 6 \times 180^o = 1080^o$

c) em um decágono: $(10 - 2) \times 180^o = 8 \times 180^o = 1440^o$

Atividade 8

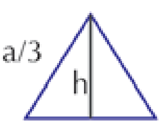


a´ = a por serem alternos internos

b´ = b por serem alternos internos

Atividade 9

a) Área de um triângulo eqüilátero de lado a/3:

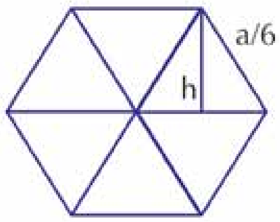


$$h^2 + (a/6)^2 = (a/3)^2 \rightarrow h = \sqrt{(a/3)^2 - (a/6)^2} \rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Área}_{\text{triângulo}} = \frac{\text{base x altura}}{2} = \frac{a/3 \times a\sqrt{3}/6}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}/18}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{36}$$

b) Área de um quadrado de lado a/4: $a^2/16$

c) Área de um hexágono de lado a/6:



$$h^2 + (a/12)^2 = (a/6)^2 \rightarrow h = \sqrt{(a/6)^2 - (a/12)^2} \rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{12}$$

$$\text{Área}_{\text{triângulo}} = \frac{\text{base x altura}}{2} = \frac{a/6 \times a\sqrt{3}/12}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}/72}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{144}$$

$$\text{Área}_{\text{hexágono}} = 6 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{144} = \frac{a^2\sqrt{3}}{24}$$

Precisamos usar o Teorema de Pitágoras, que só estudaremos em outro módulo.

Lembre-se que isso pode ser feito com seus alunos: você informa o que diz esse teorema, usando-o como uma *ferramenta,* e mais tarde volta a ele, tratando-o como um *objeto de conhecimento* - veja o texto de Referência da Unidade 6 do TP 2, “A flexibilização da aprendizagem matemática- Representação e Teoria de Quadros”; em especial o item “Teoria da Dialética Objeto-Ferramenta: Jogos de Quadros” de Regine Douady.

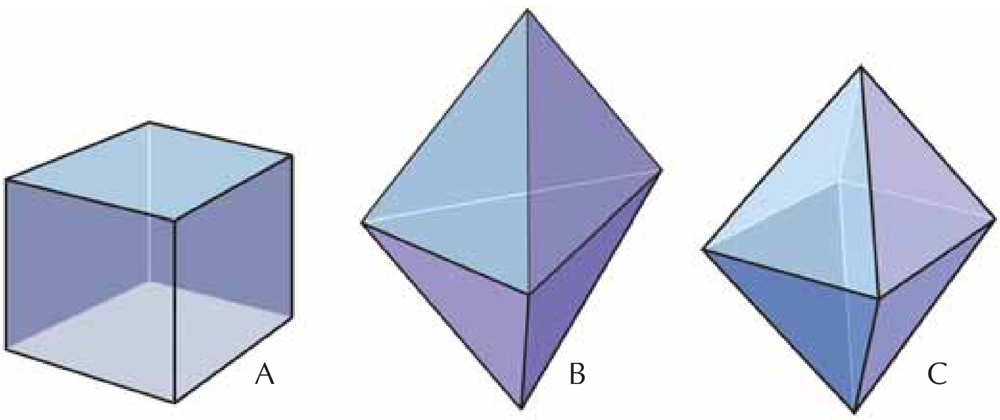
d) Compare as áreas obtidas:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{36} \quad ; \quad \frac{a^2}{16} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{27{,}7} \quad ; \quad \frac{a^2\sqrt{3}}{24}$$

Como os numeradores são iguais, ao menor denominador corresponde a maior fração (quanto se divide por um número menor, obtem-se um resultado maior).

O maior valor é $a^2\sqrt{3}/24$.

Atividade 10



Apenas o primeiro e o terceiro poliedro são regulares, por terem, cada um deles, faces idênticas e ângulos sólidos idênticos. No segundo poliedro, as faces são idênticas mas os ângulos sólidos, não: alguns deles são encontro de 3 faces, outros, de 4.

Atividade 11

a) 8 faces. Octaedro regular.

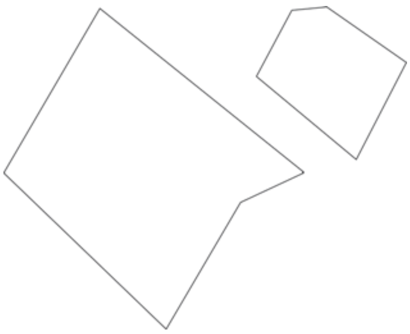
b) 20 faces. Icosaedro regular.

Atividade 12

12 faces. Dodecaedro regular.

Atividade 13

Não. Poderiam aparecer, por exemplo, os pentágonos seguintes:



Atividade 14

a) Resposta pessoal. No caso da nossa piscina, vamos considerar a correspondência natural:

Lateral mais funda na piscina (A) com lateral mais funda na maquete (A´).

Lateral mais rasa na piscina (B) com lateral mais rasa na maquete (B´).

Lateral mais comprida na piscina (C) com lateral mais comprida na maquete (C´).

1ª parte do fundo da piscina (D) com 1ª parte do fundo da maquete (D´) etc.

Todas as faces são retângulos, com exceção da lateral mais comprida.

As faces retangulares correspondentes têm medidas proporcionais (razão 1 para 100) e ângulos congruentes (todos retos), logo são polígonos semelhantes.

A lateral mais comprida pode ser decomposta em 5 retângulos e 1 trapézio, tanto na piscina quanto na maquete. Os retângulos correspondentes são semelhantes por terem lados proporcionais e ângulos congruentes.

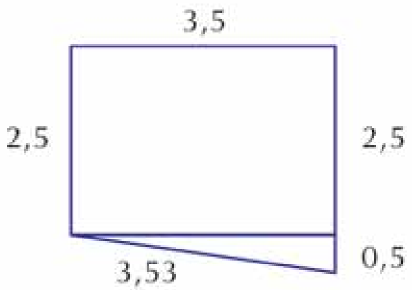
Na unidade anterior (TP3, Unidade 9), na Atividade 9, calculamos o lado inferior do trapézio que fica ao final da piscina, usando o Teorema de Pitágoras:

"Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos".

$$h^2 = 3{,}5^2 + 0{,}5^2 = 12{,}25 + 0{,}25 = 12{,}5$$
$$h = \sqrt{(12{,}5)} \approx 3{,}5355\text{m}$$

Fazendo um cálculo análogo para o lado correspondente na maquete, teríamos, em centímetros:

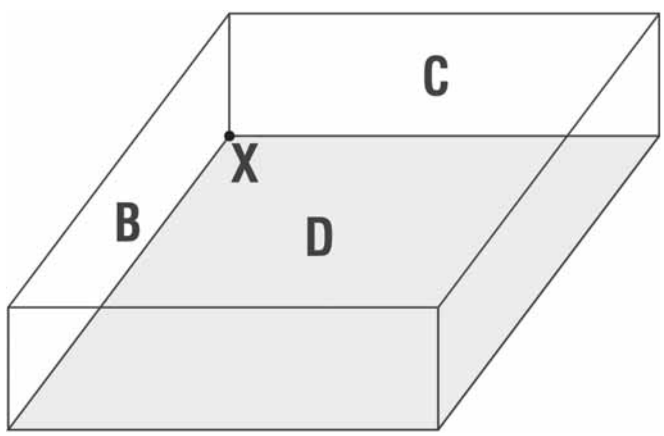
$$h^2 = 3{,}5^2 + 0{,}5^2 = 12{,}25 + 0{,}25 = 12{,}5$$
$$h = \sqrt{(12{,}5)} \approx 3{,}5355\text{cm}$$



Como as demais medidas também são proporcionais, os trapézios ao final das laterais mais compridas da piscina e da maquete são semelhantes.

b) Falta verificar se os vértices correspondentes, na piscina e na maquete, são encontros de faces respectivamente semelhantes, na mesma ordem.

Por exemplo, veja o que ocorre no ponto X:

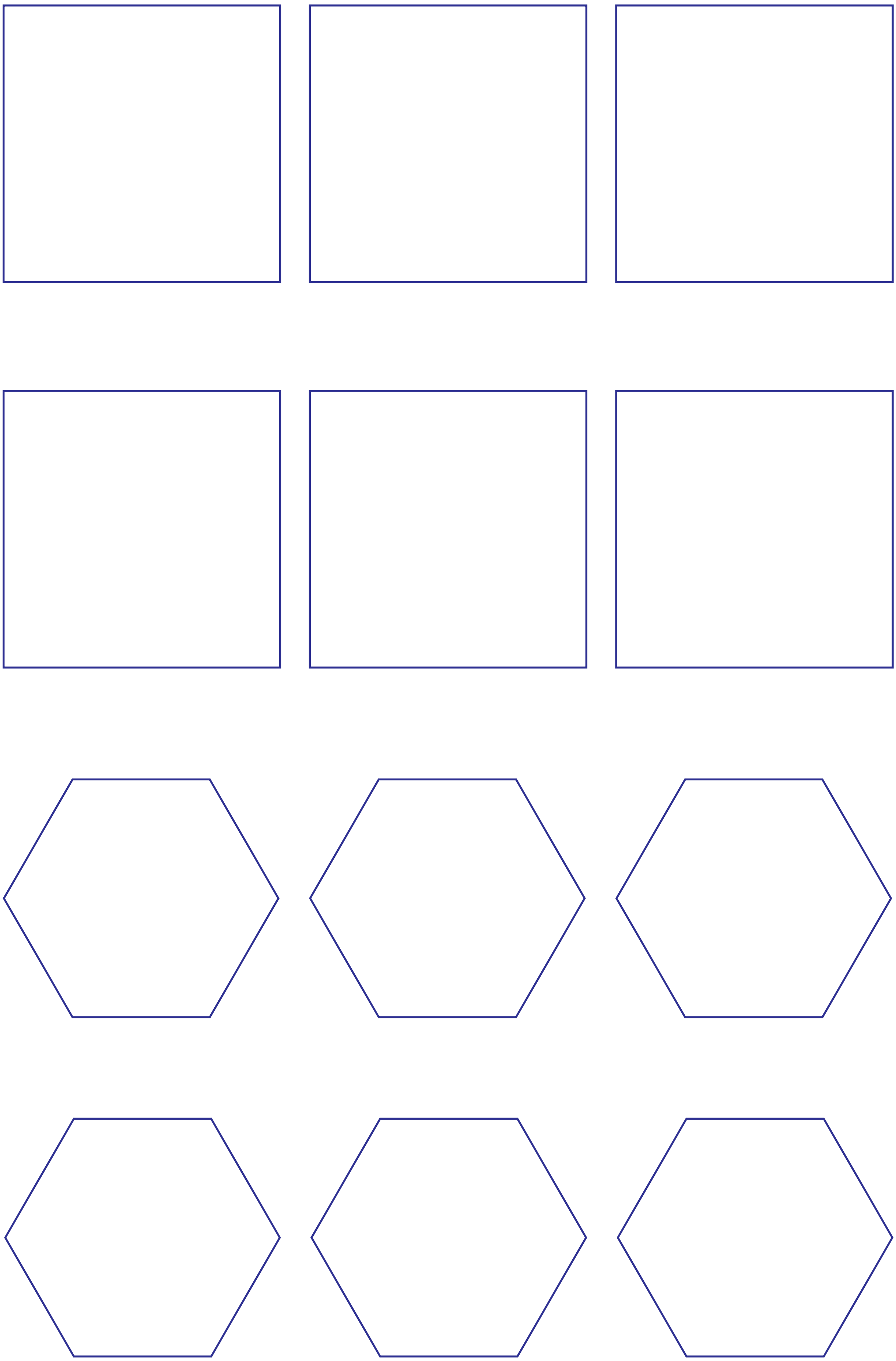


O ponto X é encontro das faces B, C e D. Devemos olhar na maquete se o ponto correspondente X´ é o encontro das faces B´, C´e D´. Verificamos que isso ocorre e fazemos o mesmo para os demais vértices.

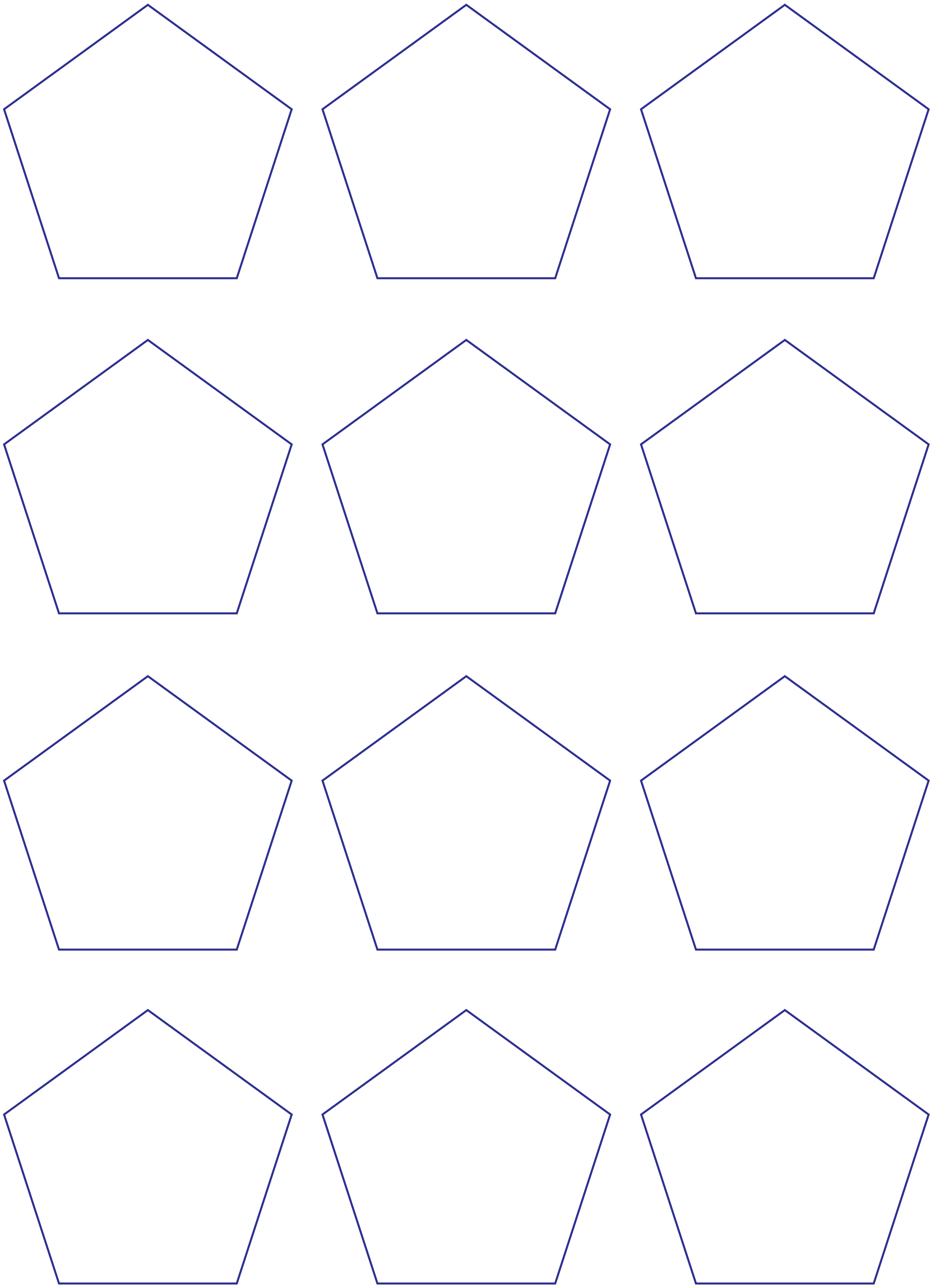
Concluímos que a maquete e a piscina são formas poliédricas semelhantes.

ANEXO

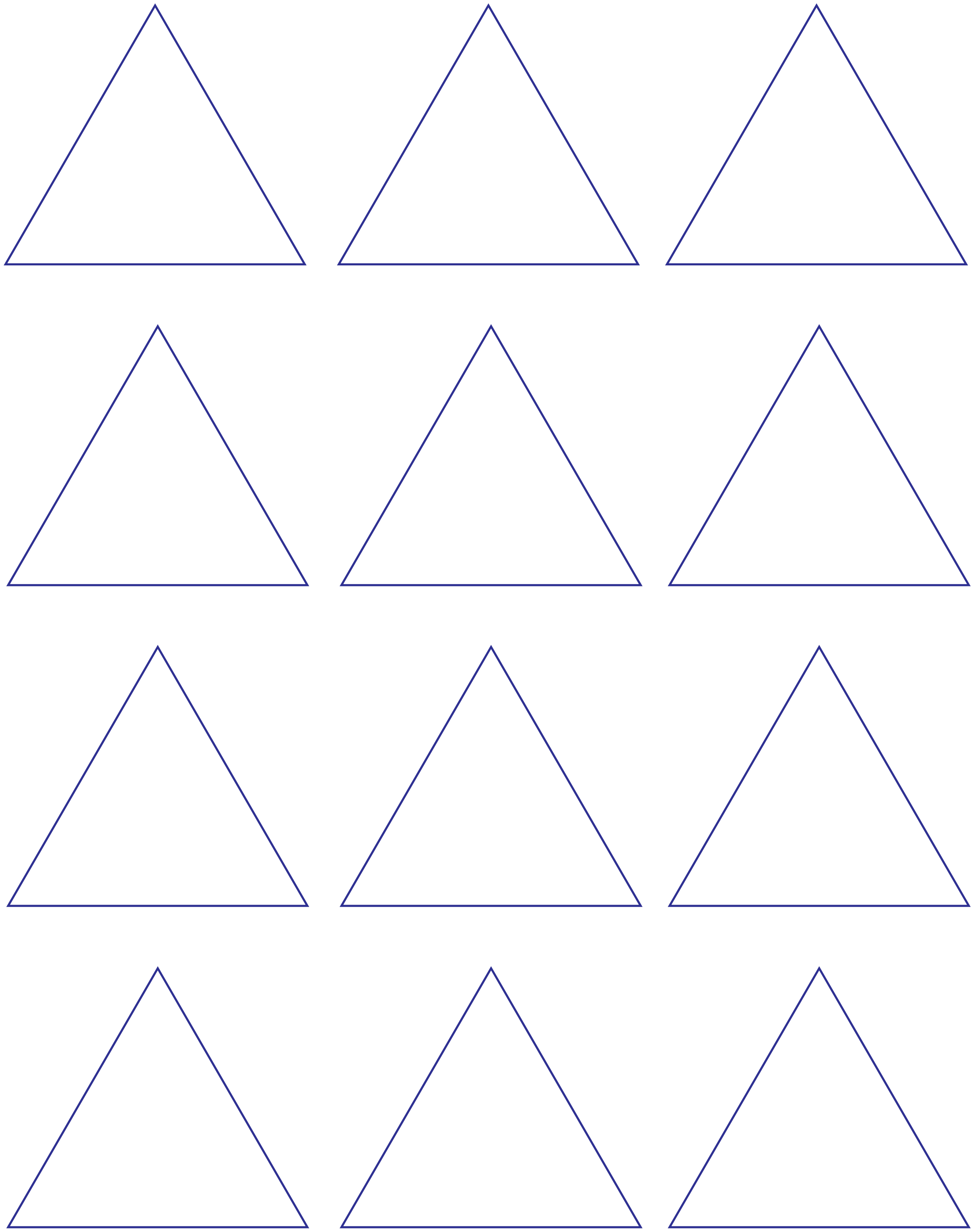
Anexo 1



Anexo 1 (continuação)

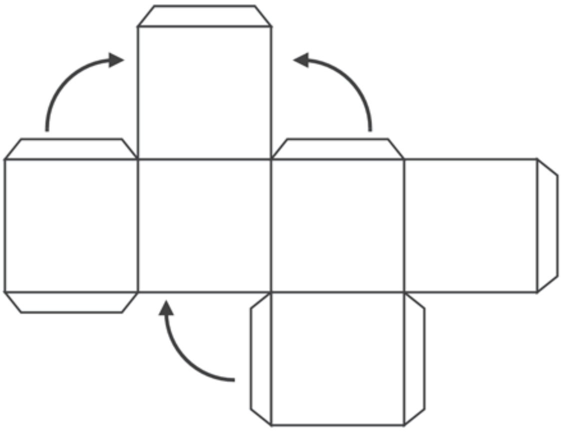


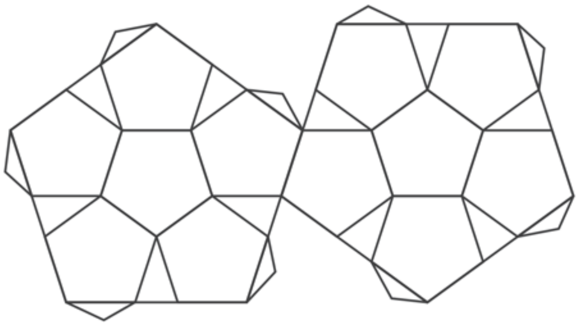
Anexo 1 (continuação)

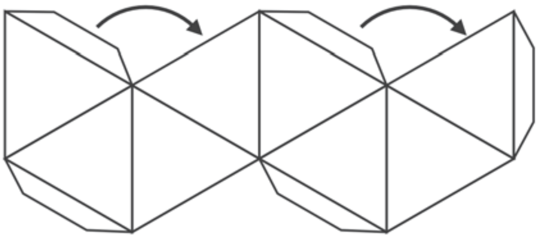


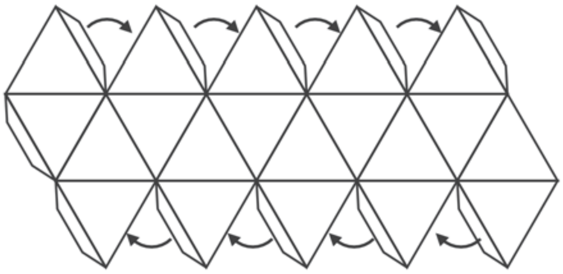
Anexo 2 - Planificações

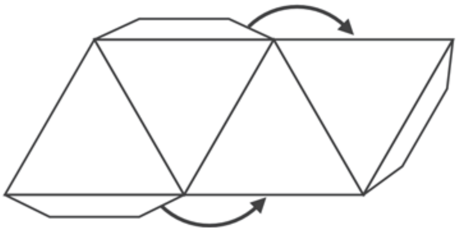
Planificações dos poliedros platônicos



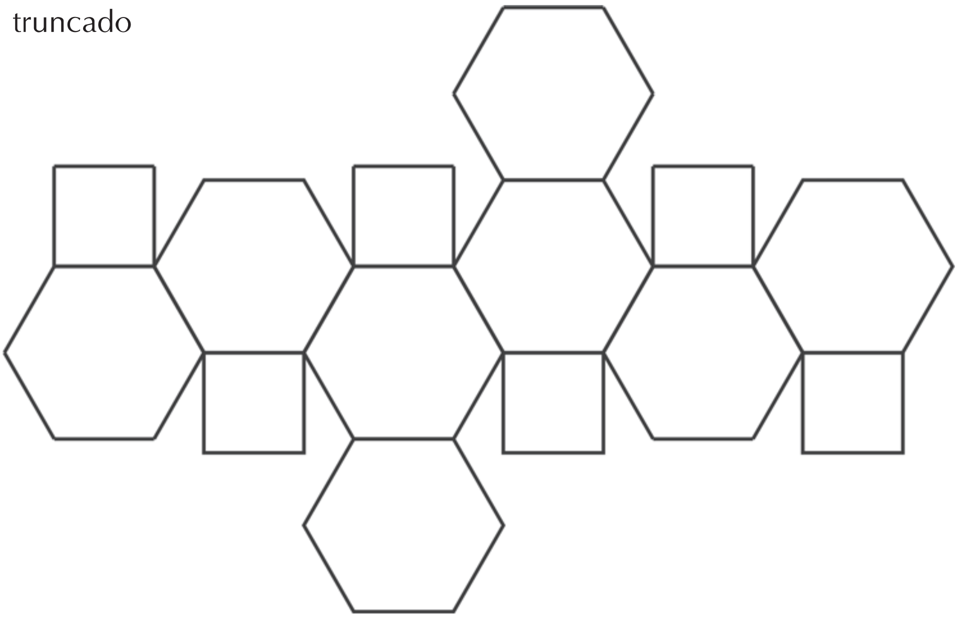






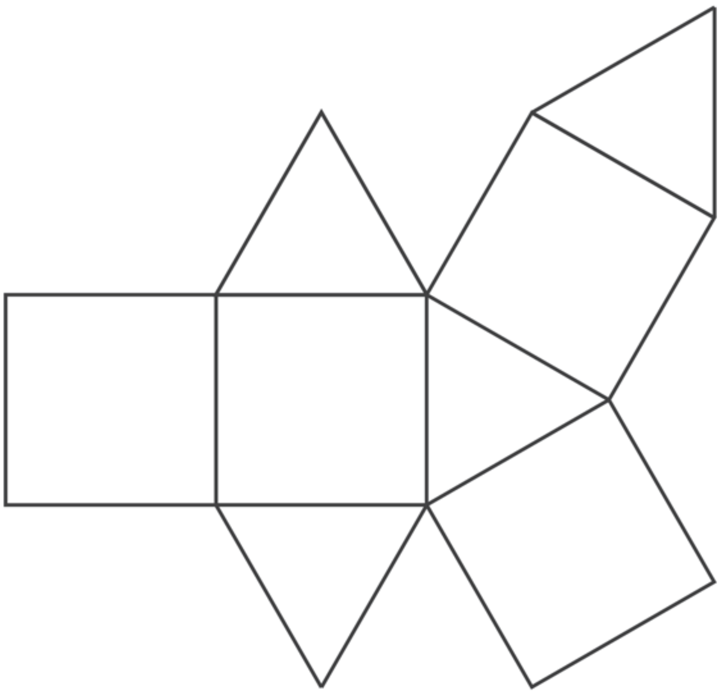


Octaedro truncado

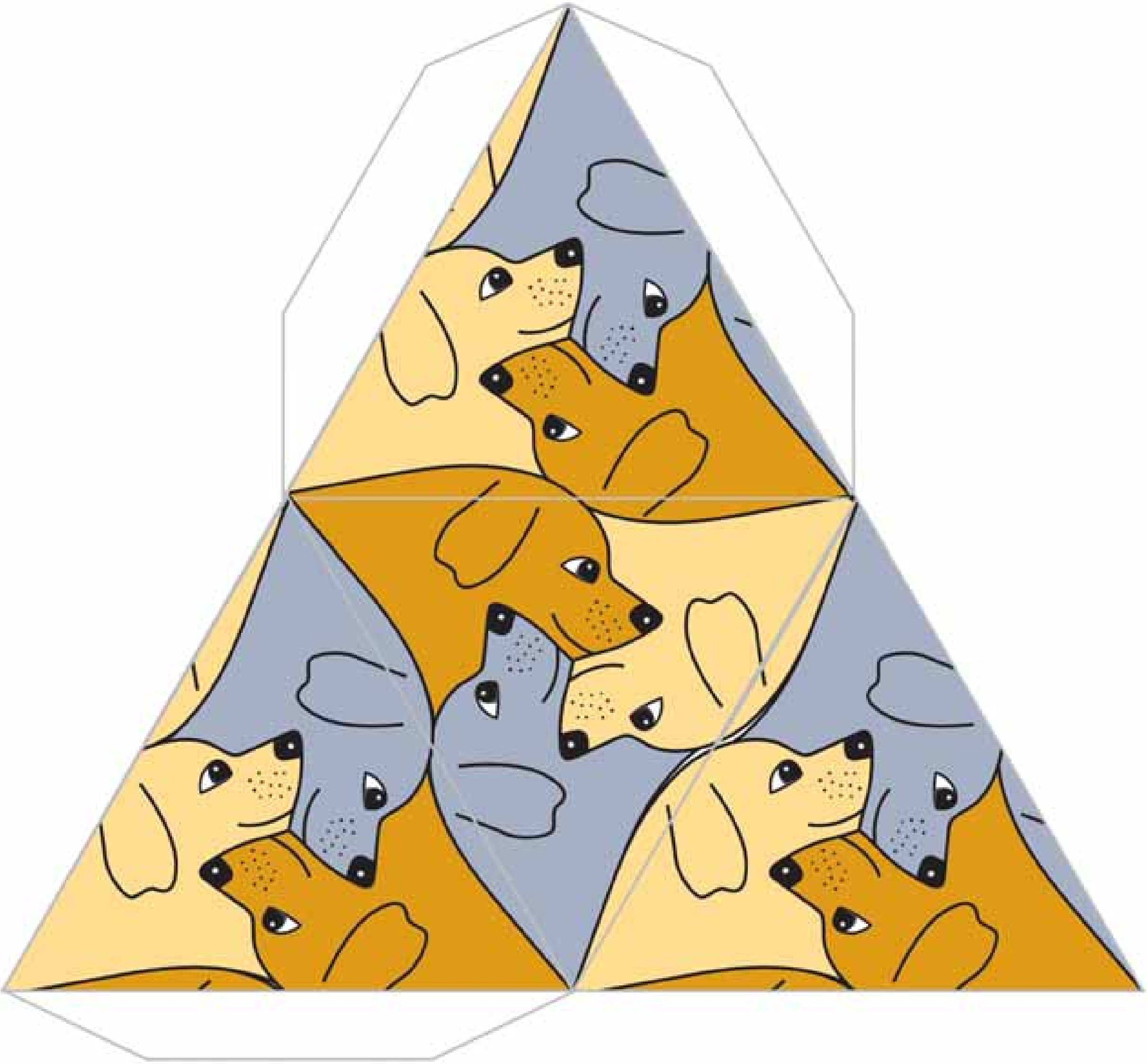


Anexo 2 - Planificações (continuação)

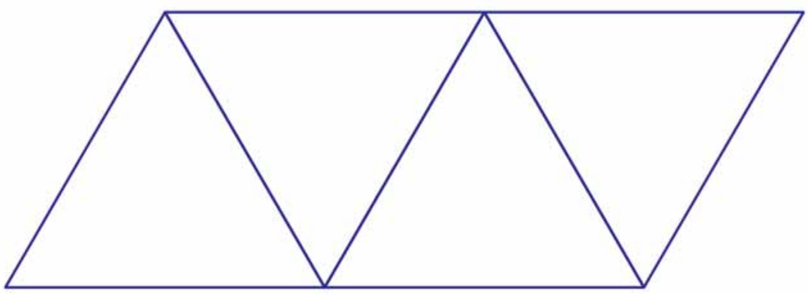
Sólido de Johnson 26



Anexo 3



http://ccins.camosun.bc.ca/~jbutton/jpolytess.htm



Unidade 11

Usando o conceito de variáveis para discutir ecologia

Ana Lúcia Braz Dias

Iniciando a nossa conversa

Mais uma vez nos encontramos para pensar juntos sobre aquilo que ensinamos. Desta vez vamos examinar um conceito muito usado. Tão usado que, às vezes, nem prestamos muita atenção a ele, o que é verdadeiramente e para o que serve. Trata-se do conceito de variável.

Elas aparecem nas pesquisas, nos jornais, nos livros didáticos. Às vezes estão bem aparentes, como nas páginas de álgebra. Às vezes podemos não notar que as estamos utilizando. Vamos ver como andam nossos conhecimentos sobre variáveis?

Esta unidade está organizada em três seções:

1. Resolução de uma situação-problema
Na situação-problema desta unidade você fará uma pesquisa, do tipo enquete. Formulará um questinário para averiguar o nível de consciência ecológica de algumas pessoas e se elas agem de forma ecologicamente correta. Depois você examinará como essas variáveis se relacionam.

2. Conhecimento matemático em ação
Nesta seção, você verá como, partindo da pesquisa que você fez na seção 1, trataremos do conceito de variáveis e de funções.

3 - Transposição Didática
Esta seção discute problemas relacionados ao ensino-aprendizagem de conceitos vistos nas seções 1 e 2 e sugere ações relacionadas para a sala de aula.

Como as outras unidades, esta também conterá um Texto de Referência sobre Educação Matemática, que abordará o tema “A História da Matemática no seu Ensino”.

Definindo o nosso percurso

Ao longo desta unidade, esperamos que você possa:

1 – Com relação ao seu conhecimento de conteúdos matemáticos:

- utilizar variáveis para generalizar padrões aritméticos;

- representar um conjunto de pontos no plano cartesiano;

- representar uma relação entre duas variáveis no plano cartesiano;

- interpretar gráficos cartesianos;

- identificar relações funcionais entre duas variáveis;

- identificar o conceito de variável em situações reais;

- determinar a relação entre duas variáveis em contextos reais.

Isto será feito nas seções 1 e 2.

2 – Com relação aos seus conhecimentos sobre educação matemática:

- pensar em usos da história da Matemática no ensino.

- repensar a avaliação em educação matemática.

- identificar aspectos da produção escrita da Matemática pelo aluno.

Isto será feito em pequenos textos ao longo da seção 2 e no Texto de Referência.

3 – Com relação à sua atuação em sala de aula:

- elaborar atividades nas quais seus alunos possam descobrir padrões numéricos e usar variáveis para generalizar os padrões encontrados.

- proporcionar a seus alunos experiências com gráficos de funções de diferentes aspectos.

- formular situações, contextualizadas no mundo real e que sejam interessantes a seus alunos, em que haja variáveis que se inter-relacionam.

Isto será feito principalmente na seção 3.

Seção 1

Resolução de situação-problema: uma ferramenta para generalizar padrões

Objetivo da seção

- Identificar o conceito de variável em uma situação real;
- Determinar a relação entre duas variáveis em contextos reais.

Integrando a matemática ao mundo real

Variáveis, uma ferramenta de linguagem para a generalização

Você já notou que o ser humano está sempre procurando compreender o mundo que o cerca? Está sempre investigando fenômenos naturais e sociais. Tentando entender como as coisas funcionam e se relacionam umas com as outras.

Em jornais e revistas se encontram freqüentemente relatos de pesquisas sobre coisas que afetam diretamente suas vidas.

As chamadas variáveis de pesquisa são as mesmas variáveis que a gente estuda em Matemática? O princípio geral é o mesmo. Nós é que às vezes fechamos nossa matemática em si mesma e limitamos seu uso ao contexto dela própria.

O jornal traz, na coluna sobre o tempo, a variação na umidade relativa do ar.

Uma revista traz um teste que classifica sua atitude perante o trabalho em "iniciativa", "cooperação", "indiferença", "desmotivação" ou "revolta".

Se você não reconhece nesses contextos o uso do conceito de variável, não se precipite. Vamos continuar nossa conversa e ao final da unidade vamos ver se você concorda que as variáveis podem ser mais que os velhos "x" e "y".

O conceito de variável em Matemática serve para generalizar os elementos de um conjunto. Quando temos um conjunto e queremos dizer que poderemos falar de qualquer um dos elementos daquele conjunto, criamos um símbolo ou uma expressão para designá-los.

Por exemplo, quando notamos que a igualdade

$$1 + 2 = 2 + 1$$

é verdadeira porque a soma de dois números reais é a mesma sem importar a ordem em que eles são considerados, criamos variáveis para dizer isso de forma geral, que valha para todos os números reais:

"Se a e b são números reais, $a + b = b + a$"

Mas essa idéia de criar relações gerais não se restringe a relações entre números. As ferramentas de generalização são usadas igualmente para expressar relações entre grandezas diversas.

Situação problema

Consciência Ecológica e Comportamento Ecológico

Conforme pesquisa realizada em 1992, os cidadãos da Alemanha consideram a problemática do meio ambiente como a questão mais importante da atualidade. A consciência ecológica e a disposição de se comportar adequadamente parecem ter alcançado um elevado grau de aceitação. Todavia, observando-as mais de perto, surgem dúvidas. A satisfação que se sente pela elevada consciência ecológica fica anuviada quando se olha para a garagem do vizinho, onde há três dias se acrescentou aos dois automóveis da família, de apenas três pessoas, um terceiro carro, para a filha que acaba de tirar a carteira de motorista. E o que se diz da facilidade, muitas vezes observada, com que as pessoas livram a casa de bichinhos importunos mas inofensivos, como formigas, usando produtos químicos?

Naturalmente coletam-se jornais e vidro para serem reciclados. Para muitos, porém, este comportamento parece ter essencialmente um caráter apenas simbólico. Esses cidadãos cumprem o objetivo de mostrar a si mesmos que sua conduta harmoniza-se com a consciência ecológica adotada, talvez um pouco manchada com a compra do terceiro carro para a família. Abre-se aqui uma fenda entre a consciência ecológica e o comportamento ecológico.

Quais seriam os fatores que levam a este hiato? Parece que um deles é o custo do comportamento ecológico. Quando o comportamento ecológico custa pouco dinheiro, tempo e energia, a correlação entre consciência ecológica e comportamento ecológico é elevada. Mas quando surge um conflito entre a meta de se comportar de acordo com o meio ambiente e a meta de economizar dinheiro, tempo e energia, nesses casos a consciência ecológica perde a batalha.

Adaptado de Dörner, D. (1995). "Transformação da consciência ecológica?", em Deutschland: Revista de Política, Cultura, Economia e Ciência.

O texto acima, apesar de não trazer números, nos leva a crer que diferentes pessoas têm diferentes graus de conscientização a respeito da ecologia, e de certa forma faz uma quantificação do grau de consciência ecológica dos cidadãos alemães.

A questão em torno da qual se desenvolve o texto é:

Será que todo mundo que tem um grau de consciência ecológica elevado age de acordo com o que ela dita?

Ou seja,

Será que todo mundo que tem um grau de consciência ecológica elevado tem comportamentos ecológicos?

Se aplicarmos o conceito de variável a estas perguntas, podemos reformulá-las assim:

Como é que as variáveis "grau de consciência ecológica de um indivíduo" e "grau de comportamento ecológico" se relacionam?

É natural que as pessoas tenham diferentes graus de conscientização a respeito da ecologia. Algumas lêem bastante sobre o assunto e desta forma, ou através da própria vivência ou tradição, sabem dos efeitos daninhos que certas atitudes humanas podem ter sobre o ecossistema. Outros parecem nunca ter atentado para estes fatos.

Atividade 1

a) Crie um pequeno questionário para aferir o grau de consciência ecológica de um grupo de indivíduos (por exemplo, seus alunos, ou seus colegas professores).

b) Estabeleça um critério que permita classificar os respondentes do questionário em:

A (altamente conscientizado)

B (bastante conscientizado)

R (regularmente conscientizado)

P (pouco conscientizado)

N (nada conscientizado)

Atividade 2

a) Crie também um questionário para identificar o grau de comportamento ecológico do mesmo grupo de pessoas, ou seja, para descobrir se elas agem de forma ecologicamente correta.

b) Crie um sistema de classificação das respostas, que pode ser uma escala como a sugerida na atividade 1.

c) Que valores poderá assumir sua variável "grau de comportamento ecológico"?

Atividade 3

Peça para 10 pessoas responderem a seus questionários. Depois, use o critério que você inventou na atividade 1 para atribuir a cada indivíduo um dos graus de consciência e um dos graus de comportamento ecológico. O grau de consciência ecológica de cada pessoa poderá ser: A, B, R, P ou N. O grau de comportamento ecológico assumirá os valores que você criou na atividade 2.

Coloque o resultado de sua pesquisa na tabela 1.

Indivíduo	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Grau de consciência ecológica										
Grau de comportamento ecológico										

Tabela 1

Atividade 4

Vejamos como as variáveis "grau de consciência ecológica de um indivíduo" e "grau de comportamento ecológico" se relacionam na sua pesquisa.

Olhando os dados que você colocou na tabela 1, responda.

a) Quando a variável "grau de consciência ecológica" assumiu o valor A, que valores assumiu a variável "grau de comportamento ecológico"?

b) Quando a variável "grau de consciência ecológica" assumiu o valor B, que valores assumiu a variável "grau de comportamento ecológico"?

c) Quando a variável "grau de consciência ecológica" assumiu o valor R, que valores assumiu a variável "grau de comportamento ecológico"?

d) Quando a variável "grau de consciência ecológica" assumiu o valor P, que valores assumiu a variável "grau de comportamento ecológico"?

e) Quando a variável "grau de consciência ecológica" assumiu o valor N, que valores assumiu a variável "grau de comportamento ecológico"?

Atividade 5

Represente a relação que você descreveu na atividade 4 como um conjunto de pares ordenados, da seguinte forma: grau de consciência ecológica, grau de comportamento ecológico.

Coloque cada par ordenado que você encontrou em sua pesquisa no conjunto! Não esqueça de nenhum. (Você deve ter encontrado 10 pares ordenados, um para cada pessoa entrevistada. Cada par ordenado representará o resultado encontrado para uma determinada pessoa.)

Atividade 6

A relação que você encontrou entre as duas variáveis é uma função? Ou seja, você pode dizer que o grau de comportamento ecológico é função do grau de consciência ecológica? Lembre-se de que, para ser uma função, devemos ter, a cada valor da variável grau de consciência ecológica, um e apenas um valor da variável grau de comportamento ecológico.

Atividade 7

Para explicar a relação surpreendente que o autor encontrou entre o grau de consciência ecológica e o grau de comportamento ecológico dos alemães, o autor introduziu outra variável na questão. Você consegue identificar qual é ela?

Seção 2

Construção do conhecimento matemático em ação: Variáveis

Objetivo da seção

Ao longo desta seção, você deverá ser capaz de:

- Utilizar variáveis para generalizar padrões aritméticos;
- Representar uma relação entre duas variáveis no plano cartesiano;
- Interpretar gráficos cartesianos;
- Identificar relações funcionais entre duas variáveis.

O que caracteriza uma variável?

Na seção 1 você nos viu falar sobre as variáveis "grau de consciência ecológica" e "grau de comportamento ecológico". Mas elas são mesmo variáveis? Variáveis não têm que ser letrinhas?

Toda variável é um símbolo que escolhemos para generalizar um conjunto de valores. Esse símbolo pode ser uma letra, uma palavra, ou até uma expressão, como fizemos na situação-problema sobre consciência ecológica.

É claro que, em Matemática, costumamos muito mais freqüentemente utilizar variáveis simbolizadas apenas por uma letra. É mais simples e rápido, ocupa menos espaço... Por outro lado, pode fazer que uma página de livro de Matemática fique cheia de letrinhas cujo significado não visualizamos imediatamente. Isso assusta alguns alunos!

Outra característica das variáveis é que elas têm que ter bem especificados os valores que podem assumir.

Na situação-problema sobre consciência ecológica, a variável "grau de consciência ecológica" pôde assumir os valores A, B, R, P e N. Quando as respostas aos questionários fossem classificadas, ninguém poderia ter um grau de consciência ecológica diferente desses valores que estipulamos. Este era o domínio de nossa variável.

Observe que os valores das variáveis não precisam necessariamente ser números. No exemplo acima esses valores foram também letras (A, B, R, P e N).

O domínio de uma variável é o conjunto de valores que ela pode assumir.

O que caracteriza uma variável?

- Um símbolo.
- Um domínio – o conjunto de valores que ela pode assumir.

Atividade 8

Crie variáveis para representar:

a) qualquer uma das cores do arco-íris;

b) o gênero dos participantes de uma pesquisa;

c) um número natural entre 0 e 9, inclusive 0 e 9;

d) qualquer número que possa ser escrito em forma de fração;

e) qualquer um dos possíveis restos obtidos em uma divisão de um número natural por 5.

Não se esqueça de especificar o domínio da variável em cada caso!

Generalizando padrões

Vamos fazer a seguinte brincadeira:

- escolha um número;
- adicione 5 a esse número;
- multiplique o resultado por 2;
- subtraia 6;
- divida o resultado por 2;

- subtraia o número que você havia pensado.
- Qual foi o resultado?

Teste outro número, e veja o resultado final. Há alguma coisa que o intriga?

Isto mesmo, o resultado será sempre 2. Como você explica isto?

Tente desvendar o que ocorre usando uma variável para generalizar o processo, isto é, para representar o número que pode ser escolhido por você ou por qualquer outra pessoa. Nós começamos para você no quadro 1.

- Escolha um número $\boxed{n}$
- Adicione 5 a este número $\boxed{n + 5}$
- Multiplique o resultado por 2 $\boxed{}$
- Subtraia 6 $\boxed{}$
- Divida o resultado por 2 $\boxed{}$
- Subtraia o número que você havia pensado $\boxed{}$

Quadro 1

Se quisermos dizer que o padrão encontrado (o fato de a resposta ser sempre 2) existe para qualquer número que pensarmos inicialmente, podemos usar uma variável para generalizar, e assim escrever o padrão encontrado:

$$\frac{2(n+5)-6}{2} - n = 2 \qquad n \in \mathbb{N}$$

A equação acima diz que, qualquer que seja o número natural que escolhamos, a seguinte igualdade funciona: se somarmos 5 ao número, depois dobrarmos o resultado, depois subtrairmos 6, dividirmos tudo por 2, e desse resultado subtrairmos o número inicial, isto será igual a 2.

(Na verdade esse padrão vale também se n for qualquer número real.)

Variáveis podem ser utilizadas para generalizar padrões aritméticos.

Atividade 9

A brincadeira abaixo lhe permite "adivinhar" dois números escolhidos por uma pessoa:

- escolha dois números entre 0 e 10;
- multiplique o primeiro número por 5;
- adicione 8;

- dobre o resultado;
- adicione o segundo número;
- subtraia 16.

a) Tente descobrir o truque, utilizando variáveis para representar os números que as pessoas podem escolher.

b) Se uma pessoa encontrasse o resultado 96, que números ela teria escolhido inicialmente?

Atividade 10

A seguinte situação foi proposta a alguns alunos de 6ª série:

"Dois números estão na razão de 2 para 5. Um número é 21 unidades maior que o outro. Quais são os dois números?"

Um aluno apresentou a seguinte solução:

$5 - 2 = 3$

$21 \div 3 = 7$

$2 \times 7 = 14$

e $5 \times 7 = 35$

a) Como você resolveria este problema?

b) Você consideraria correto o trabalho do aluno?

Não tendo compreendido a estratégia de solução utilizada pelo aluno, sua professora pediu-lhe para explicar oralmente como ele havia feito para resolver o problema.

O aluno explicou seu raciocínio usando o desenho da figura 1.

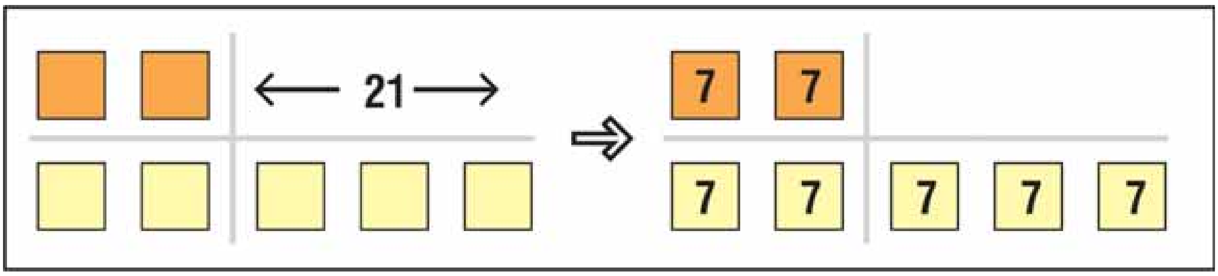


Figura 1

Após a explicação do aluno, a professora entendeu que a justificativa para o que ele havia feito era (tabela 2):

Trabalho do aluno	Justificativa
5 - 2 = 3	Dois números estão na razão de 2 para 5. Se os dividirmos em partes iguais de certo tamanho que não sabemos ainda qual é, um terá 2 partes e o outro 5 partes. Então, um dos números tem 3 partes a mais que o outro.
21 ÷ 3 = 7	Um número é 21 unidades maior que o outro. Então, as 3 partes valem 21, e cada uma vale 7.
2 X 7 = 14 e 5 X 7 = 35	Como um número tem 2 partes e o outro 5, os números são 14 e 35.

Tabela 2

Às vezes não dá para entender o que um aluno fez com base apenas no que ele escreveu. Por isso, é importante buscar avaliar o que ele sabe de outros modos, não apenas com base em registros escritos.

> "As formas de avaliação devem contemplar também as explicações, justificativas e argumentações orais, uma vez que estas revelam aspectos do raciocínio que muitas vezes não ficam evidentes nas avaliações escritas" (PCN, p. 55).

c) Tente representar, usando variáveis, o raciocínio utilizado pelo aluno no problema acima.

Relações entre variáveis

Os professores de uma escola resolveram registrar o número de alunos que faziam empréstimo na biblioteca da escola, a cada mês. A escola tinha 143 alunos.

Os professores fizeram os registros durante todo o ano letivo – de fevereiro a novembro. Foi feita uma tabela para mostrar os registros (tabela 3).

Mês	Número de alunos que fizeram empréstimos
fevereiro	24
março	32
abril	53
maio	70
junho	72
julho	20
agosto	47
setembro	55
outubro	61
novembro	50

Tabela 3

Os professores queriam observar qual a relação entre estas duas variáveis: como o número de alunos que fizeram empréstimos variou conforme os meses que passaram.

Eles tinham uma série de idéias e de perguntas, mas só poderiam colocá-las em prática observando qual era a situação, como o número de alunos que faziam empréstimo estava sendo na realidade.

Como eles não queriam ficar escrevendo toda hora "número de alunos que fizeram empréstimos", eles resolveram representar esse número pela letra *n*.

Para ter uma outra visão dos dados obtidos, os professores resolveram representá-los em um plano cartesiano.

Para isso, eles colocaram os valores da variável *mês* no eixo horizontal (também chamado eixo das abscissas) e os valores da variável *n* no eixo vertical (gráfico 1).

Gráfico 1

Que valores a variável n poderia assumir?

A escola tinha 143 alunos. Então ***n*** poderia assumir os valores dos números naturais até 143.

Poderíamos dizer que *n* pode assumir os valores dos números reais entre zero e 143? Não propriamente, pois não poderíamos observar em um mês que 45,6 alunos fizeram empréstimos, por exemplo. Os valores de *n* neste caso têm que ser inteiros e positivos, ou seja, números naturais.

E a variável *mês*?

Aqui ela assume os valores: fevereiro, março, abril, maio, junho, julho, agosto, setembro, outubro e novembro.

Veja que, para cada mês, há um valor correspondente de *n*. Então, podemos dizer que há uma relação funcional entre as variáveis *mês* e *n*. Ou seja, *n* é dada em função do mês que escolhemos.

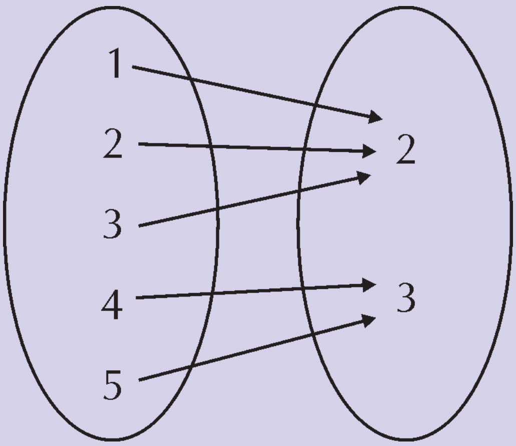
Uma função é uma regra que leva um conjunto de valores de uma variável independente a um novo conjunto de valores, as imagens.

Se nossa função se chamar *G*, cada valor da variável independente (digamos, "*i* ") é "transformado" pela função em um único valor *g(i)* (lê-se *g* de *i*), que é a imagem de *i* pela função *G*.

Não é necessário que exista uma fórmula que consiga descrever a regra que leva os valores da variável independente a suas imagens. Muitas vezes essa regra é melhor descrita por uma tabela. Veja por exemplo, a função $y = f(x)$ ao lado, em que o domínio da variável x é $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

x	y
1	2
2	2
3	2
4	3
5	3

Vemos que a relação ao lado é de fato uma função, já que cada valor de x nos dá apenas um valor de y. No entanto não há uma fórmula imediatamente evidente para expressar esta relação.



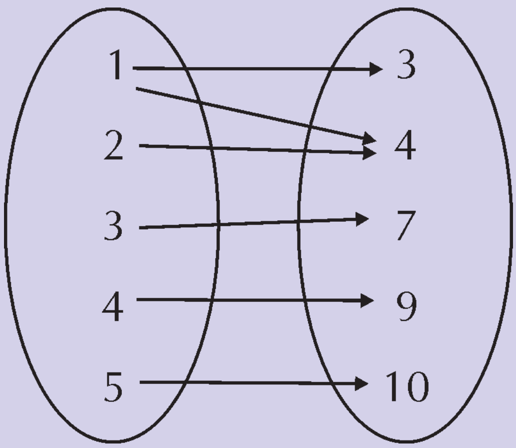
Como nesse exemplo a variável independente só pode assumir um conjunto finito de valores, uma tabela consegue descrever toda a função.

Como nesse exemplo só temos um número finito e pequeno de valores para as nossas variáveis, podemos descrever a função usando um diagrama com flechas, como à esquerda.

Isso não seria possível se o domínio da variável fosse infinito ou muito grande – não conseguiríamos escrever todos os valores em uma tabela ou diagrama!

Nem toda relação é uma função!

Se tivermos uma relação entre variáveis x e y na qual algum valor de x seja levado a mais de um valor de y, essa relação não é uma função. Por exemplo, nessa relação o valor 1 da variável x está relacionado aos valores 3 e 4 da variável y. Então essa relação não é uma função.



Depois os professores foram colocando os pontos no gráfico, um ponto correspondente a cada mês.

Veja no gráfico 2 que cada mês tem sua imagem acima dele.

Gráfico 2

Para fazermos o gráfico de uma função, colocamos os valores da variável independente no eixo horizontal. Construímos o gráfico marcando, acima ou abaixo de cada valor de *i*, sua imagem (a imagem vai ficar acima do eixo horizontal se for positiva, e abaixo do eixo se for negativa).

Assim, cada ponto do gráfico será da forma **(*i*, g(*i*))**, ou seja,

1ª coordenada =valor da variável independente *i*.

2ª coordenada = imagem associada àquele valor de *i* pela função *G*.

Observação: Podemos traçar o gráfico de qualquer relação, mesmo que ela não seja função. Nesse caso, a um valor da variável i poderemos ter dois ou mais valores da outra variável.

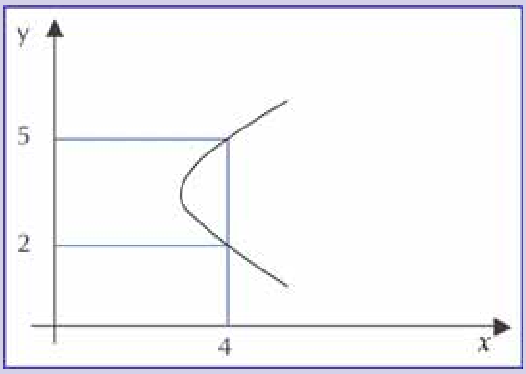


Gráfico 3

No gráfico 3, y não pode ser dado em função de x, pois há mais de um valor de y para um mesmo valor de x. Por exemplo, para x=4 temos y=2 ou y=5.

O círculo do gráfico 4, dado pela fórmula $x^2 + y^2 = 1$, também não é uma função.

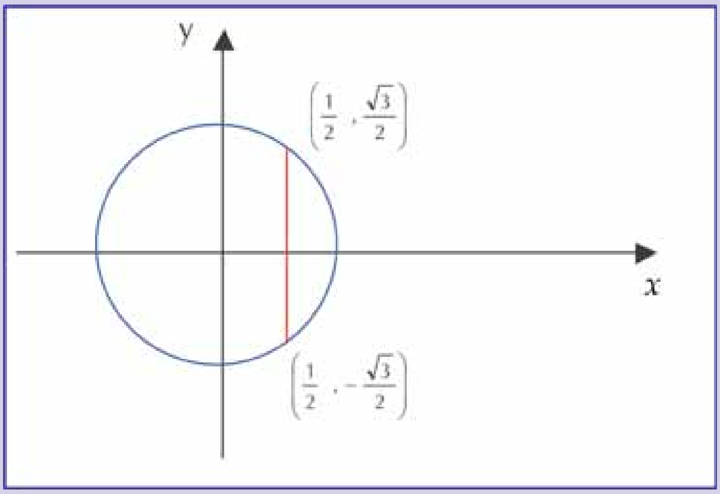


Gráfico 4

Quando $x = \dfrac{1}{2}$, por exemplo, y pode ser igual a $\sqrt{3}/2$ ou $-\sqrt{3}/2$.

Pronto! Os professores terminaram o gráfico! Terminaram? Eles não têm que agora unir os pontos?

Não, isso só acontece quando as variáveis independente e dependente podem assumir valores em todo o conjunto dos números reais. Nesse caso, os pontos do gráfico ficariam tão juntinhos que formariam uma linha, ou uma curva. Mas no nosso exemplo isso não faria sentido nenhum, pois entre dois meses não há nenhum valor da variável independente. Então ela não pode também ter imagem naquele "espaço".

Atividade 11

Descreva, em linguagem usual, a variação observada na tabela 3 ou no gráfico 2. Vamos começar para você:

"Nos primeiros meses do ano, o número de alunos que fazem empréstimos na biblioteca aumenta..." (e depois?).

Atividade 12

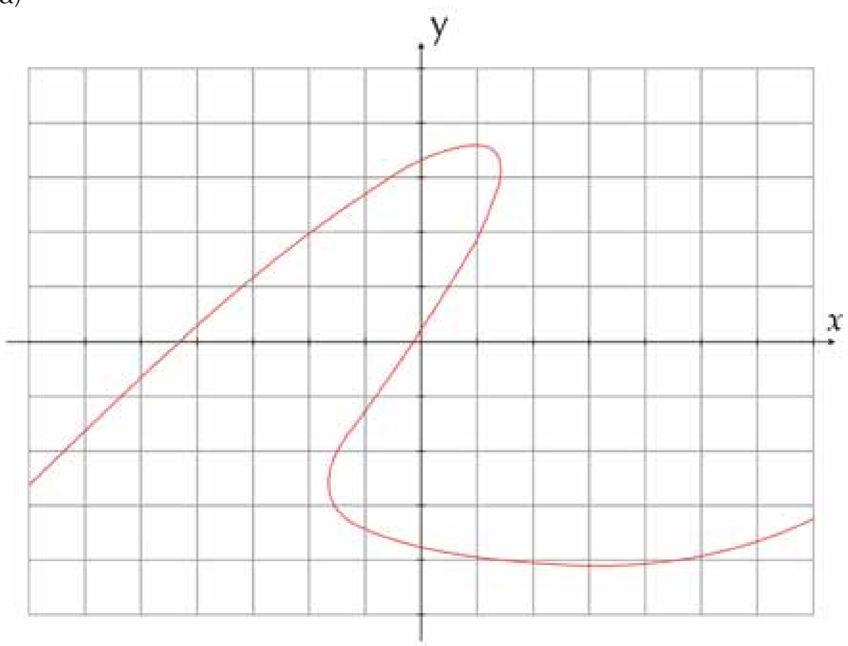
Sugira uma linha de ação para os professores, para que eles consigam, no ano que vem, obter de suas observações um gráfico assim (gráfico 5):

Gráfico 5

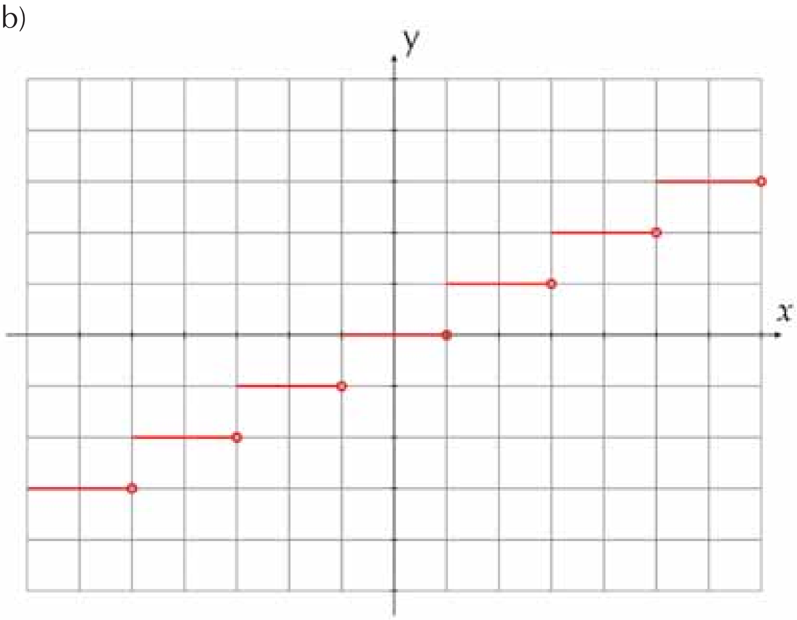
Atividade 13

Quais dos gráficos abaixo representam funções? Em todos os casos, as variáveis representadas podem assumir todos os valores reais.

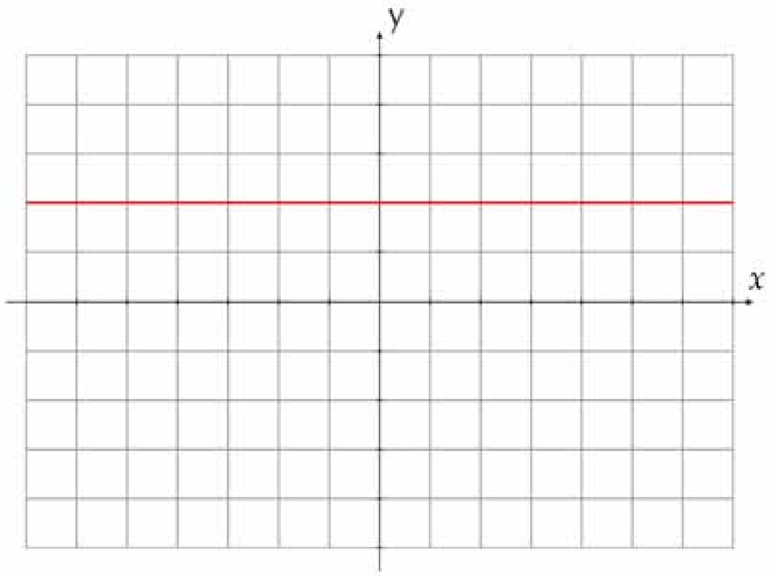
a)



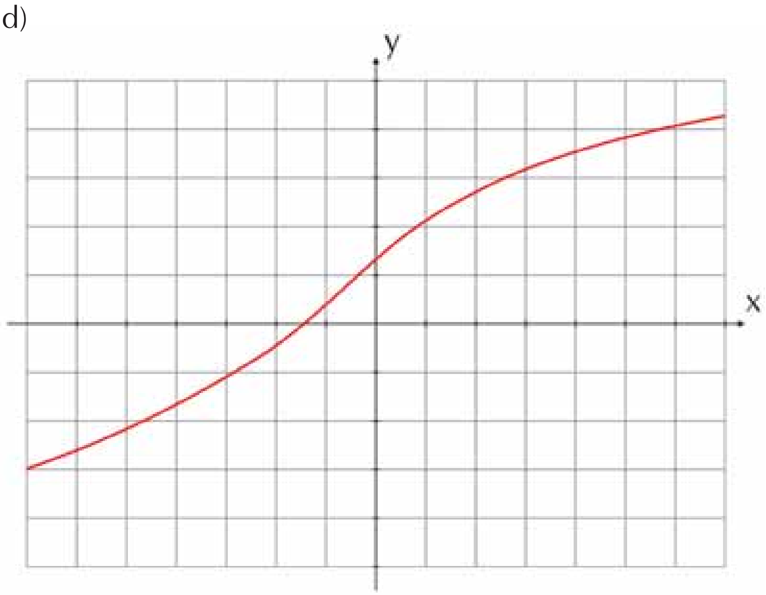
b)



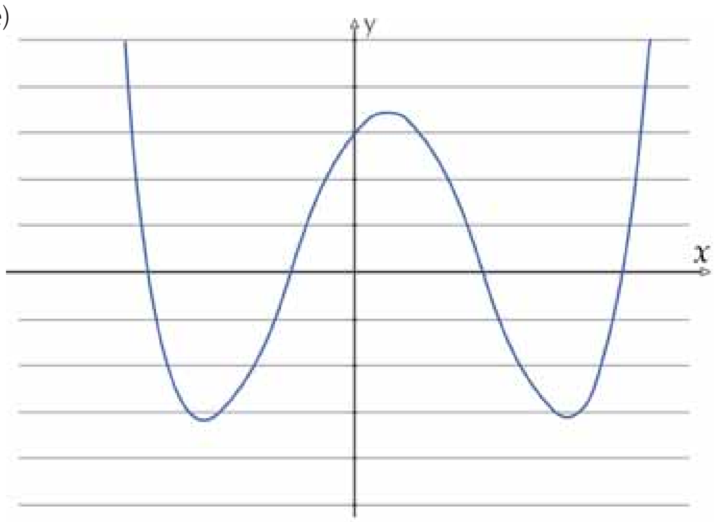
c)



d)



e)



Vamos considerar agora duas variáveis *x* e y, cujos domínios sejam todos os números reais. Ou seja, agora nossas variáveis podem assumir qualquer valor real.

Agora, quando desenharmos o plano cartesiano, qualquer ponto do plano vai ter um par de coordenadas *(**x, y**)* que o representará.

As coordenadas de um ponto são suas distâncias aos eixos vertical e horizontal, respectivamente:

A **primeira coordenada**, também chamada **abscissa**, refere-se à localização do ponto com relação ao eixo vertical. Seu módulo nos dá a distância do ponto ao eixo vertical, e seu sinal nos diz se o ponto está à **direita** (sinal **positivo**) ou à **esquerda** (sinal **negativo**) do eixo vertical.

A **segunda coordenada**, também chamada **ordenada**, refere-se à localização do ponto com relação ao eixo horizontal. Seu módulo nos dá a distância do ponto ao eixo horizontal, e seu sinal nos diz se o ponto está **acima** (sinal **positivo**) ou **abaixo** (sinal **negativo**) do eixo vertical.

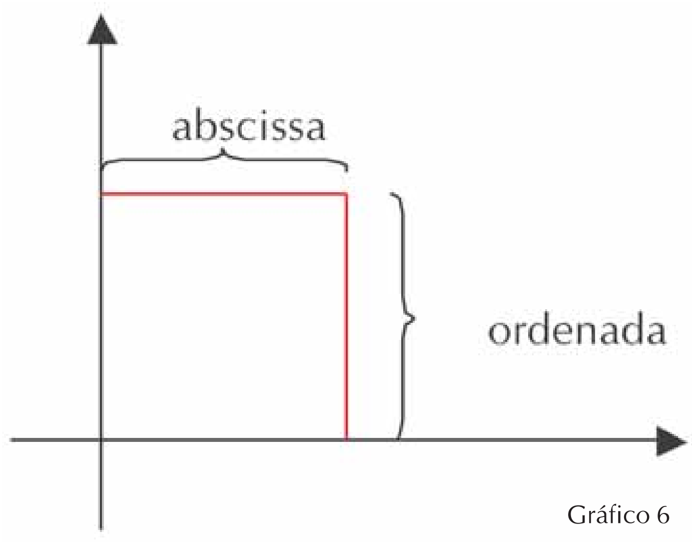


Gráfico 6

Repare novamente no gráfico 6. A abscissa é a componente horizontal da localização do ponto. Por isso ela pode ser projetada sobre o eixo horizontal, como no gráfico 7.

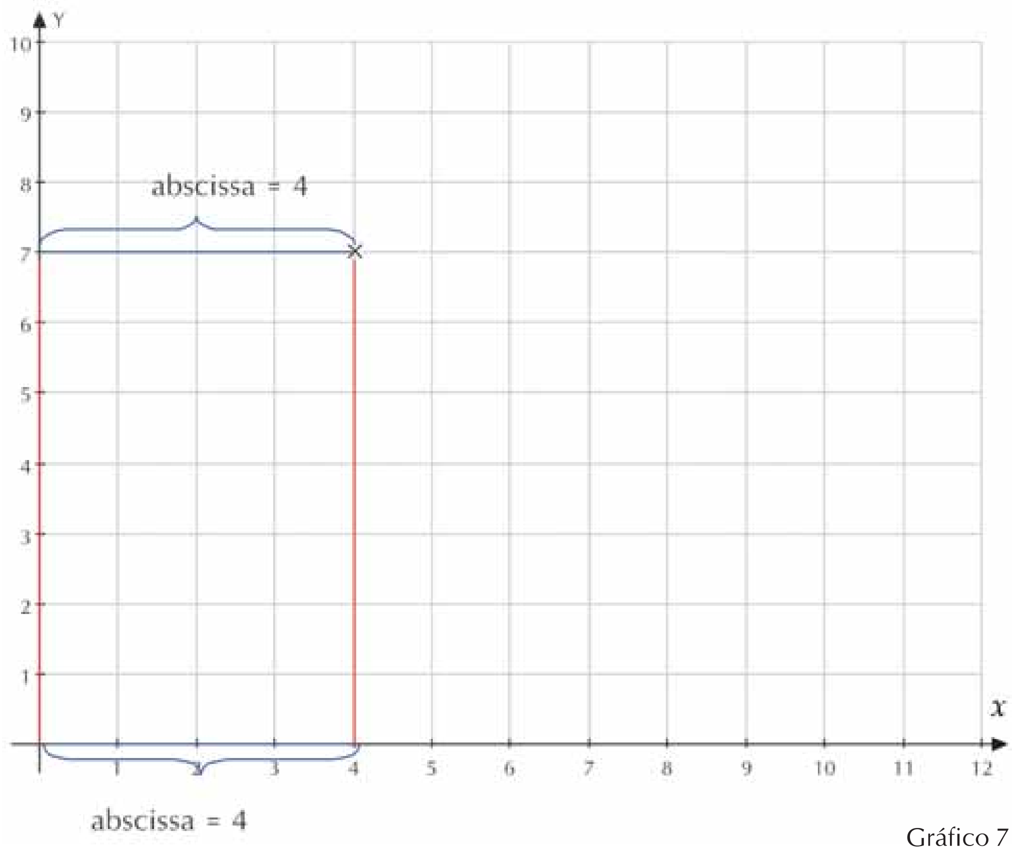


Gráfico 7

Então o eixo horizontal é chamado “eixo das abscissas”.

Repare no gráfico 6 que a ordenada é a componente vertical da localização do ponto. Por isso ela pode ser projetada sobre o eixo vertical, como no gráfico 8.

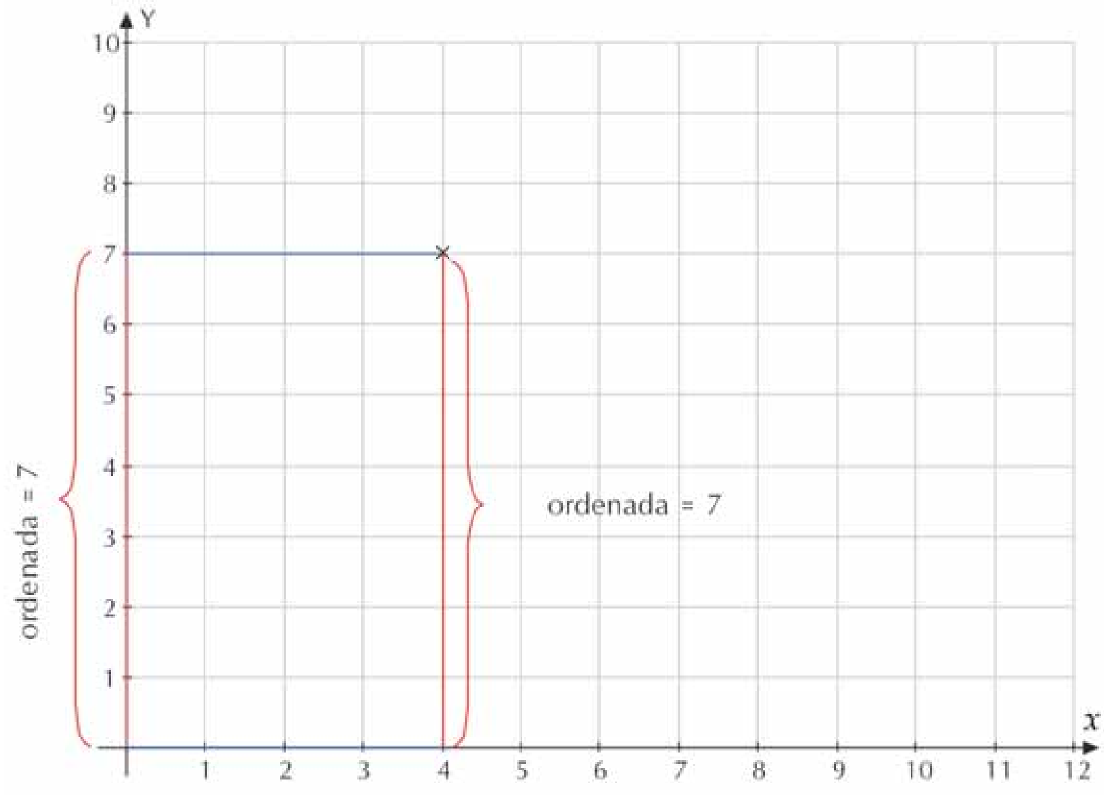


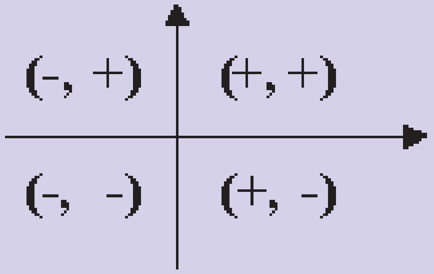
Gráfico 8

Então o eixo vertical é chamado “eixo das ordenadas”.

Quando um ponto tiver a abscissa positiva, quer dizer que ele está à direita do eixo das ordenadas. Se a abscissa do ponto for negativa, ele está à esquerda do eixo das ordenadas.

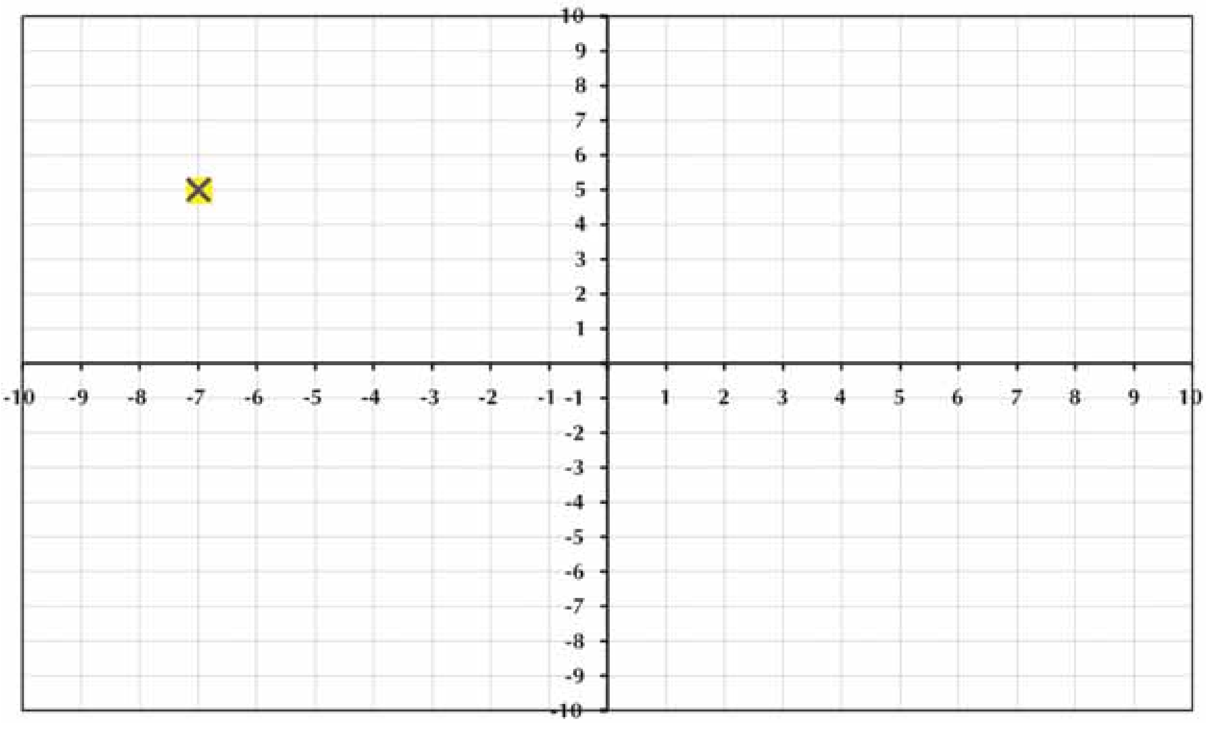
Quando um ponto tiver a ordenada positiva, quer dizer ele está acima do eixo das abscissas. Se a ordenada do ponto for negativa, quer dizer que ele está abaixo do eixo das abscissas.

Sintetizando



Exemplo 1:

Quais serão as coordenadas deste ponto?



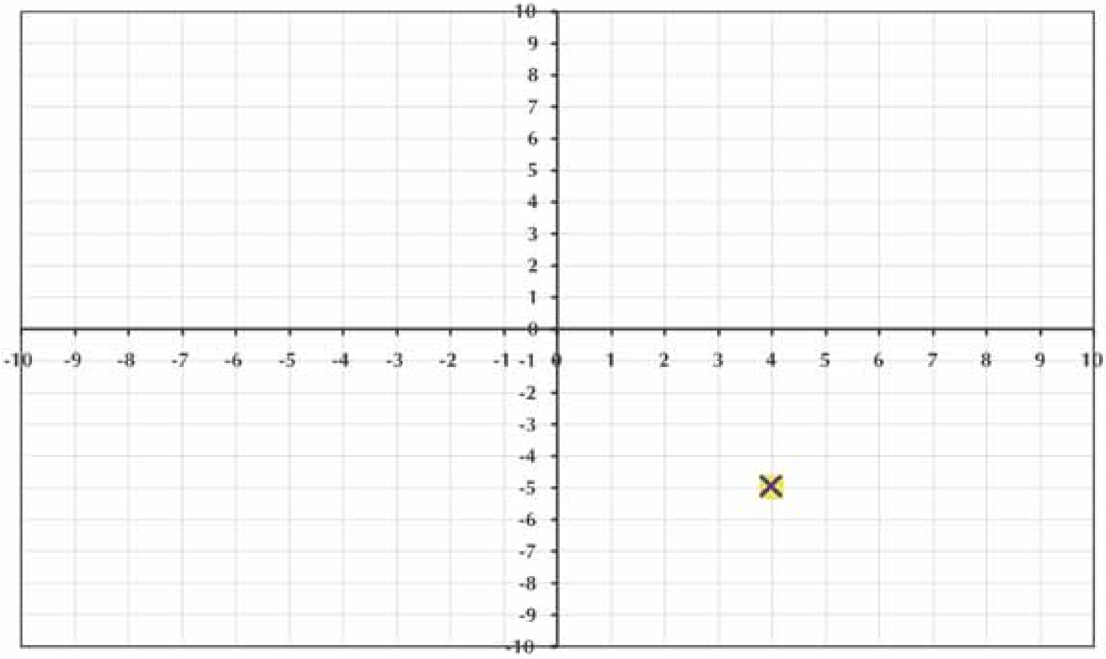
A distância do ponto ao eixo vertical é de 7 unidades para a esquerda, então a 1ª coordenada é **–7**.

A altura do ponto é de 5 unidades acima do eixo, então a 2ª coordenada é **5**.

As coordenadas do ponto são, então, (-7, 5).

Exemplo 2:

Quais serão as coordenadas deste ponto?



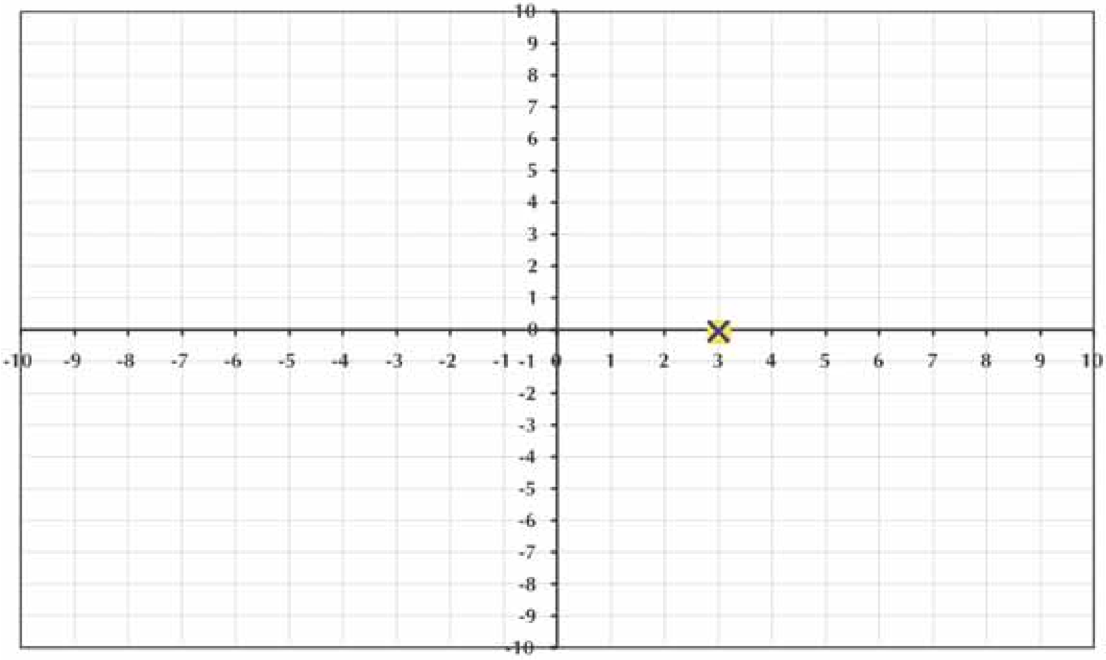
A distância do ponto ao eixo vertical é de 4 unidades para a direita, então a 1ª coordenada é **4**.

A distância do ponto ao eixo horizontal é de 5 unidades, e ele está abaixo do eixo, então a 2ª coordenada é **–5**.

As coordenadas do ponto são, então, (4, -5).

Exemplo 3:

Quais serão as coordenadas deste ponto?



A distância do ponto ao eixo vertical é de 3 unidades para a direita, então a 1ª coordenada é **3**.

A distância do ponto ao eixo horizontal é 0, pois ele está no eixo, então a 2ª coordenada é **0**.

As coordenadas do ponto são, então, (3, 0).

Exemplo 4:

Qual é o conjunto que representa todos os pares ordenados da forma (4, *b*)?

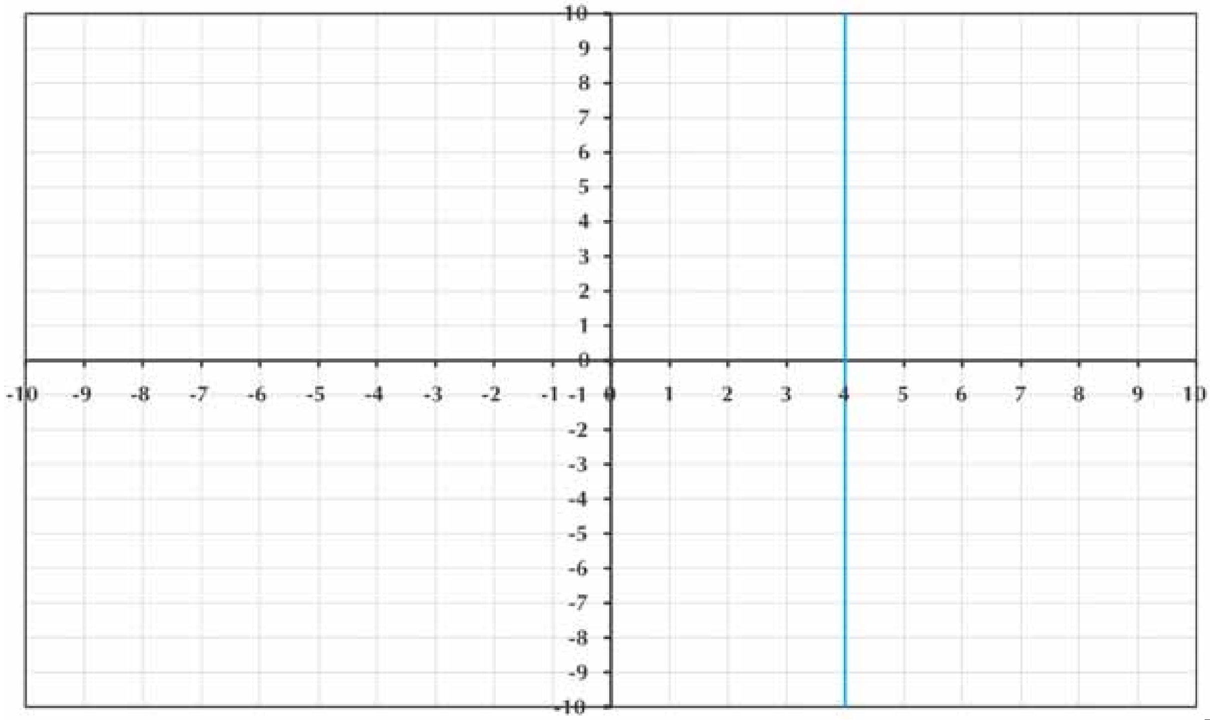
Solução:

Lembre-se de que:

1ª coordenada: seu módulo é a distância do ponto ao eixo vertical, e seu sinal é positivo se o ponto estiver à direita do eixo vertical, e negativo se estiver à esquerda do eixo vertical.

2ª coordenada = seu módulo é a distância do ponto ao eixo horizontal, e seu sinal é positivo se o ponto estiver acima do eixo horizontal, e negativo se estiver abaixo do eixo horizontal.

Então, (4, b) representa o conjunto de todos os pontos que distam 4 unidades do eixo vertical, para a direita, a qualquer distância do eixo horizontal.

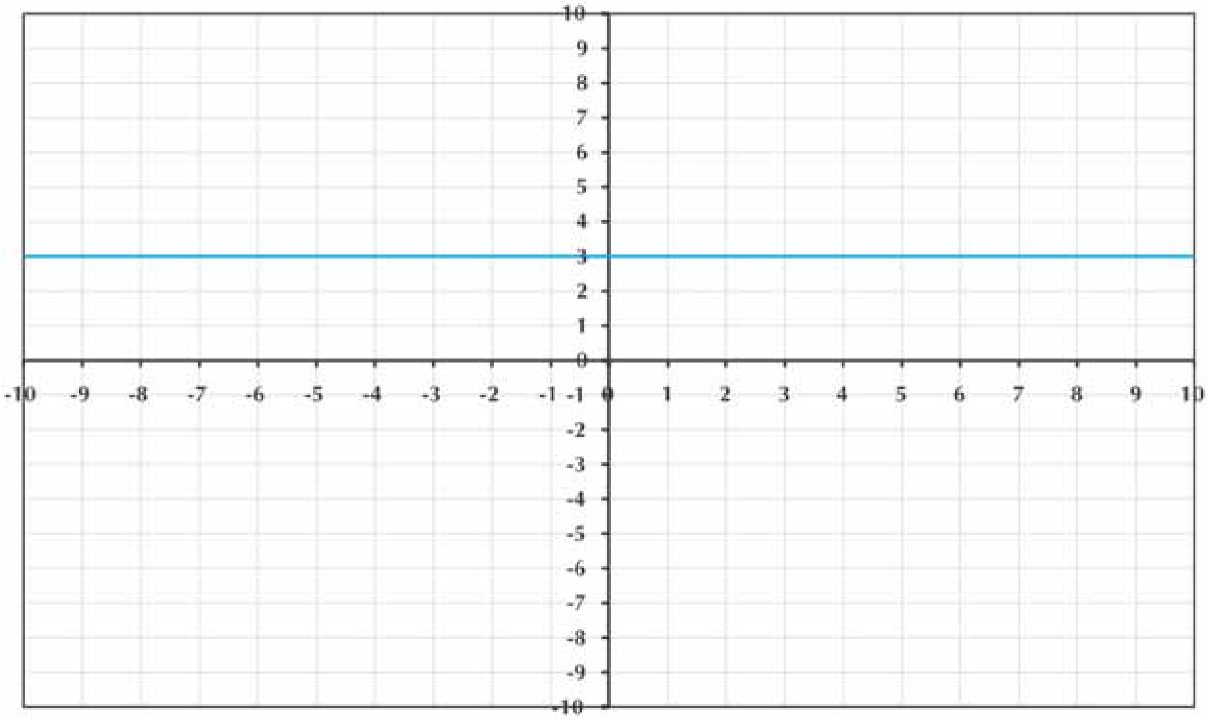


Como são infinitos pontos que têm essa propriedade, eles formam uma linha. Neste caso, uma linha reta, já que todos têm que estar à mesma distância do eixo vertical, pois têm as 1as coordenadas iguais.

Exemplo 5:

Qual é o conjunto que representa todos os pares ordenados da forma (*a*, 3)?

O par ordenado (a, 3) representa o conjunto de todos os pontos que estão à altura de 3 unidades do eixo horizontal, e a qualquer distância do eixo vertical:



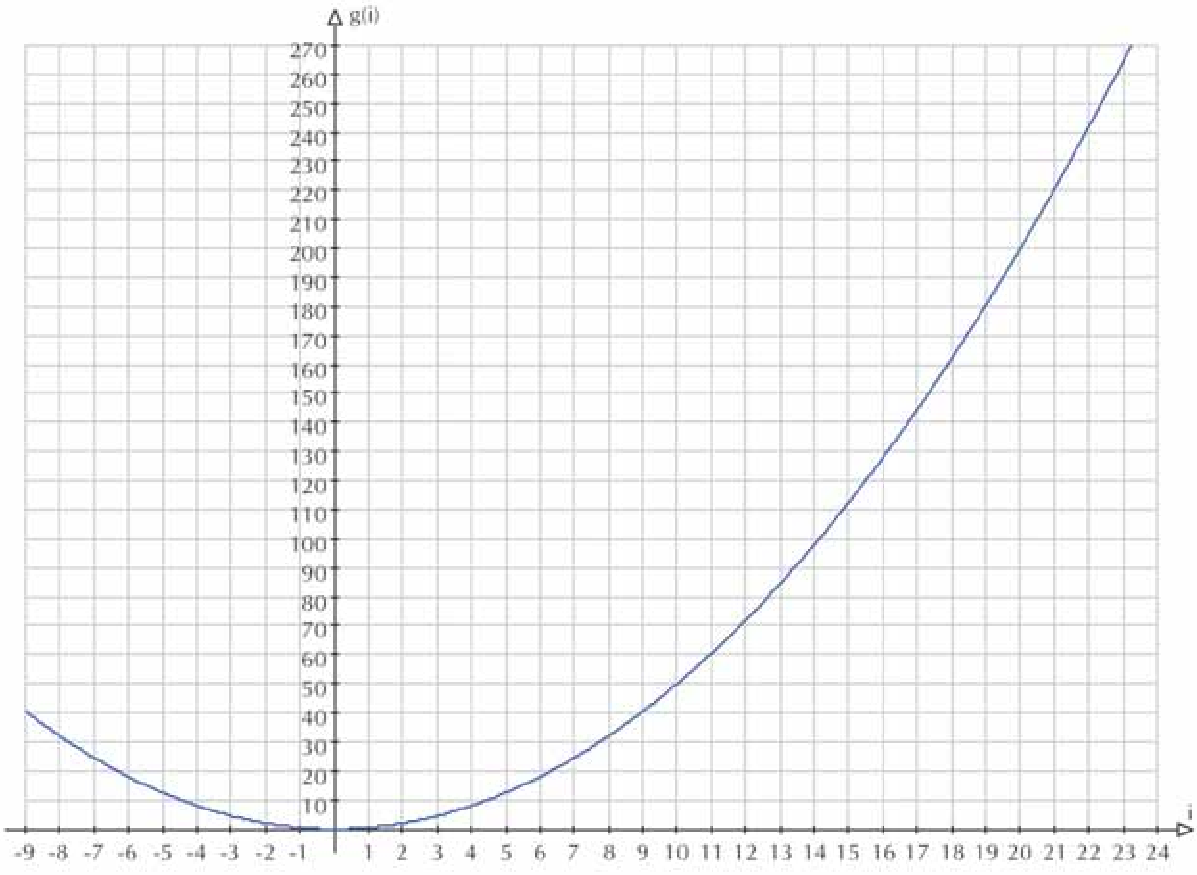


Gráfico 9

No gráfico 9 temos a curva da função G.

Atividade 14

Represente no gráfico 9 segmentos com os seguintes comprimentos:

a) g(8)

b) g(16)

c) g(-7)

d) g(20)

Atividade 15

Represente no gráfico 9 os seguintes pontos:

a) (-6, g(-6))

b) (14, g(14))

c) (3, g(14))

d) (0, g(11))

Lembrete

1ª coordenada = distância do ponto ao eixo vertical

2ª coordenada = altura do ponto

Note também que, quando o ponto é da forma ***(i, g(i))***, ou seja, um valor de i na primeira coordenada e **a imagem daquele mesmo valor** na segunda coordenada, o ponto estará sobre a curva do gráfico de G.

Resumindo

Nesta seção examinamos o uso de variáveis:

- como forma de generalizar padrões aritméticos;
- para representar funções entre duas variáveis.

Vimos que funções são um tipo especial de relação que leva cada valor de uma variável a uma imagem.

Recordamos também a representação de pontos e de funções no plano cartesiano.

Seção 3

Transposição didática: interdependência entre variáveis

Objetivo da seção

Ao longo desta seção, você irá:

- Elaborar atividades nas quais seus alunos possam descobrir padrões numéricos e usar variáveis para generalizar os padrões encontrados.
- Proporcionar a seus alunos experiências com gráficos de funções de diferentes aspectos.
- Formular situações, contextualizadas no mundo real e que sejam interessantes a seus alunos, nas quais haja variáveis que se inter-relacionam.

Na seção anterior examinamos o uso de variáveis:

- como forma de generalizar padrões aritméticos;
- para representar funções entre duas variáveis.

Recordamos também a representação de pontos e de funções no plano cartesiano.

Como isso pode ser levado a sua sala de aula?

O mais importante no uso de variáveis na sala de aula é evitar que o mesmo se resuma a manipulações simbólicas sem significado para os alunos. Portanto, o conceito de variável deve aparecer também ligado a situações da vida real.

Um modo de fazer isso é utilizando projetos nos quais os alunos tenham que coletar dados sobre como duas variáveis se relacionam.

Por exemplo, você pode pedir para os alunos colocarem em uma tabela o peso e a altura de cada aluno da turma.

Depois, você pode pedir para eles representarem esses dados no plano cartesiano.

A discussão deve ser levada também para o tipo de relação encontrada. É uma função?

A compreensão do conceito de função pode ser construído informalmente, mas com cuidado para não induzir a formação de idéias erradas.

É bem comum, por exemplo, os alunos ficarem com a impressão de que todo gráfico de função é uma reta, ou é uma curva contínua. Isso acontece quando só se apresentam a eles gráficos com retas ou gráficos contínuos. Por isso é importante que desde cedo eles encontrem gráficos de tipos variados de funções.

A investigação de padrões numéricos também oferece um contexto rico para o uso de variáveis – um que não fique só na simplificação de expressões, mas que leve o aluno a desenvolver a habilidade de generalizar.

A atividade a seguir, por exemplo, engloba:

- a investigação de padrões numéricos;
- o uso de variáveis para generalizar padrões;
- a representação de funções utilizando gráficos – em particular, gráficos que não são linhas, pois as variáveis envolvidas só assumem valores no conjunto dos naturais.

Atividade 16

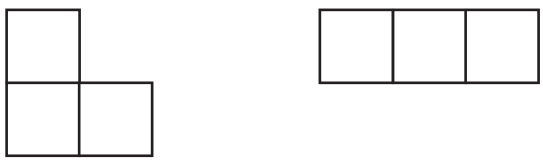
Você já viu um dominó? Aposto que sim.

Agora, você já viu um poliminó?

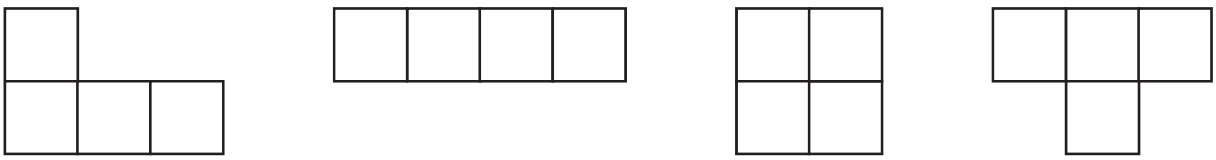
Um poliminó pode ser formado por qualquer número de quadrados de 1 unidade de área, colocados lado a lado.

Um dominó é um tipo de poliminó (é formado por 2 quadrados, e se eles tiverem área 1, o dominó terá área 2):

Triminós (formados por 3 quadrados, portanto, com área 3):



Tetraminós (formados por 4 quadrados, portanto, com área 4):



E assim por diante: podemos ter poliminós formados por qualquer número de quadrados.

Peça a seus alunos para construírem poliminós em uma folha de papel quadriculado.

Peça a eles para responder:

a) Quantos poliminós de área 5 é possível formar?

b) Quantos poliminós de área 6 é possível formar?

Peça a seus alunos que façam uma lista que dê, para poliminós de uma dada área, os possíveis perímetros.

Depois peça que eles construam uma tabela com os valores do menor perímetro e do maior perímetro para dada área. Você pode ajudá-los nessa tarefa.

A tabela que resulta desta atividade é a tabela 4:

Área	Maior perímetro
1	4
2	6
3	8
4	10
5	12
6	14
7	16
8	18
9	20
10	22
11	24
12	26
13	28
14	30
15	32
16	34

Tabela 4

Peça a seus alunos para encontrarem uma fórmula que generalize o padrão que existe entre a área e o maior perímetro que pode ser encontrado nos poliminós.

Os alunos podem também representar essa relação em um gráfico cartesiano.

Uma situação comum em nosso cotidiano que dá origem a uma função é o preço de postagem de correspondências. O interessante nesta situação é que o gráfico do preço pelo peso da correspondência dá "saltos", já que o preço das correspondências é dado por faixa de peso. É interessante propor a construção desse gráfico como atividade para seus alunos, pois ele é um gráfico de função que no entanto não é contínuo (dá "saltos"). É o que fazemos na atividade a seguir.

Atividade 17

Pesquisem, na agência de correios mais próxima à sua escola, a tabela de preços de postagem de correspondências.

a) Existe uma função entre o peso da correspondência e o preço de postagem?

b) Trace o gráfico dos dados obtidos no correio, representando o peso das correspondências no eixo horizontal e o preço de postagem no eixo vertical.

Resumindo

Nesta seção vimos como a variação interdependente entre duas variáveis pode ser estudada por seus alunos, evitando limitar o estudo de variáveis a manipulações simbólicas sem significado: o conceito de variável deve aparecer também ligado a situações da vida real. Isso pode ser feito por meio de projetos nos quais os alunos tenham que coletar dados sobre como duas variáveis se relacionam.

Leituras sugeridas

Para quem queira pesquisar sobre a história da matemática, indicado por Circe Mary Silva da Silva Dynnikov:

História da matemática:

BOYER, C. *História da matemática*. São Paulo: Edgard Bücher - Edusp, 1975.

DIEUDONNÉ, J. *A formação da matemática contemporânea*. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1990.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Unicamp, 1995.

STRUIK, D. *História concisa das matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1989.

Tópicos especiais de história da matemática:

AABOE, A. *Episódios da história antiga da matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (esgotado), 1984.

DANTZIG, T. *Número*: A linguagem da ciência. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

EVES, H. *História da Geometria*. São Paulo: Atual, 1992.

IFRAH, G. *Os números:* História de uma grande invenção. São Paulo: Globo, 1989.

Bibliografia

ARCAVI, Abraham. *Álgebra, História, Representação*. Série reflexões em educação matemática. MEM/USU. Apoio CAPES/PADCT/SPEC. Sem data.

BORGES. *Prosa completa*. v. 1. Barcelona: Bruguera, 1979.

HALLETT, Deborah Hughes; GLEASON, Andrew et al. *Cálculo*. v. 1. Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos, 1997.

SCAVO, T. R. and CONROY, N. K. *On My Mind - Conceptual Understanding and Computational Skills in School Mathematics*. Mathematics Teaching in the Middle School, NCTM. v. 1, n. 9, 1996. p. 684-686.

Texto de referência

A história da matemática no seu ensino

Cristiano A. Muniz

Observa-se nas análises dos livros didáticos uma crescente introdução de aspectos históricos no ensino da matemática, o que revela uma maior preocupação em levar ao aluno uma concepção mais construtivista do conhecimento, mostrando que a matemática de hoje é fruto de uma longa trajetória do homem na busca de resolução de seus problemas de sobrevivência e de transcendência. Assim, o grande objetivo da exploração da história da matemática é o desenvolvimento de uma concepção da matemática como construção humana e participante e construtora da cultura.

Portanto, pensar a história da matemática na educação escolar não significa em absoluto simplesmente introduzir tópicos da história da matemática dos Egípcios, dos Gregos, Chineses ou Maias como conteúdo curricular a ser cobrado formalmente enquanto objetivo educacional. Não podemos concordar com o professor que agora ensina e cobra das crianças a escrita de quantidades numéricas em sistema de numeração egípcia ou chinesa. Além de muito pouco contribuir com a construção do conhecimento, tais aprendizagens podem vir a se constituir em verdadeiros e novos obstáculos didáticos. A presença de conhecimentos históricos no currículo tem tido por vezes um tratamento inadequado. A presença da história dos sistemas de medidas e de numeração nos livros didáticos não tem um fim em si mesmo : o objetivo é essencialmente desenvolver nos alunos a noção que o conhecimento matemático é uma produção humana, e cuja história acompanha e pode até mesmo ser explicada pela história dos homens que estão eternamente construindo e reconstruindo as matemáticas nos mais diversos contextos socioculturais, e, em especial, resolvendo situações-problema.

O mais importante ao aluno é perceber as evoluções e as involuções pelas quais passa a matemática na longa excursão de resolver situações-problema impostas pela relação do homem com a natureza e com sua própria cultura. Nossa prática pedagógica nas aulas de matemática deve estar impregnada da **perspectiva construtivista** da própria matemática, onde o aluno se aperceba que tal construção é permeada de incertezas e de estruturas por vezes inacabadas. Para a educação matemática, o importante é que, a cada momento, o aluno se sinta parte dessa história. Assim, o professor pode mostrar que a produção, as dúvidas, os erros e angústias do aluno refletem e podem representar o próprio processo de construção pelos quais passam o matemático, o cientista, o artesão, o professor, o profissional liberal e nossos pais, quando esses desenvolvem atividades matemáticas.

As situações históricas da produção do conhecimento matemático têm grande potencial em dar à aula de matemática um caráter lúdico que não está limitado ao jogo. Para tal, a matemática pode e deve ser contata a partir da própria história dos matemáticos, mostrando seu lado humano, real e cultural. Descobrir o quanto são gente e humanos aqueles que contribuíram para edificar essa ciência é importante para que o aluno veja pontos de identificação com aqueles que foram um dia alunos e cidadãos e se eternizaram ao aceitar os desafios impostos pela vida, fazendo da matemática um instrumento de trabalho.

Com o avanço do currículo do ensino da matemática a partir dos novos paradigmas da educação matemática observa-se um maior interesse pela exploração da dimensão histórica da construção do conhecimento em vários tipos de trabalhos: pesquisas que se realizam sobre a história como estratégia didática, o desenvolvimento do programa da etnomatemática (com vistas à compreensão do conhecimento matemático em contextos culturais e históricos), inclusão de eventos importantes da história da matemática e da vida de matemáticos nos livros didáticos, publicações de livros paradidáticos tratando especificamente da história da matemática, publicações especializadas sobre o tema, apresentação de trabalhos e discussões em congressos de educação matemática, e, em especial,o início da introdução da disciplina História da Matemática nos cursos de licenciatura. Tudo isso demonstra uma preocupação de cunho epistemológico[1] (que trata de uma discussão acerca da produção do conhecimento) que favorece na construção de uma nova concepção sobre a matemática, contribuindo para uma nova representação social da matemática como uma atividade humana e política, e portanto, possuidora de uma história.

Vamos em seguida trazer algumas reflexões de pesquisadores e educadores matemáticos que buscam orientar os professores e as escolas sobre a importância da história da matemática no ensino[2]. Assim, as seções abaixo são *abstratcs* (resumos) dos textos publicados no *Caderno CEDES*.

História da matemática e educação

Ubiratan D'Ambrósio

"(...) Para quem e para que serve a história da matemática?

Para alunos, professores, pais e público em geral. Para quê? Algumas das finalidades principais parecem-me:

1. Para situar a matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução.

2. Para mostrar que a matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de matemática desenvolvidas pela humanidade.

3. Para destacar que essa matemática teve sua origem nas culturas da Antiguidade mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média e somente a partir do século XVII se organizou como um corpo de conhecimentos, com um estilo próprio.

4. E desde então foi incorporada aos sistemas escolares das nações colonizadas e se tornou indispensável em todo o mundo em conseqüência do desenvolvimento científico, tecnológico e econômico.

1 A epistemologia diz respeito à ciência do conhecimento, ligada à compreensão dos processos de construção do conhecimento e do saber pelo homem ao longo de sua história. A introdução da história da matemática no seu ensino tem um caráter epistemológico importante uma vez que permite uma melhor compreensão dos processos subjacentes à constituição do conhecimento nos diferentes momentos da história da civilização. Estudar a história da matemática permite uma compreensão epistemológica das lógicas internas de constituição do conhecimento matemático nos seus diferentes momentos e diferentes correntes filosóficas.

2 Para maior conhecimento ver Cadernos CEDES, Centro de Estudos Educação e Sociedade, da UNICAMP, *História e Educação Matemática,* no 40, Campinas, Ed. Papirus,1996.

Os pontos 1, 2, 3 e 4 constituem a essência de um programa de estudos, poderíamos dizer de um currículo, de história da matemática.

[...]

Mas voltemos às considerações sobre qual é a medida adequada para uma incorporação da história da matemática na prática pedagógica. Claro que o ideal é um estudo mais aprofundado do que a simples enumeração de nomes, datas e aspectos socioeconômicos e políticos na criação matemática, procurando relacionar com o espírito da época, com o que se manifesta nas ciências em geral, na filosofia, nas religiões, nas artes, nos costumes, na sociedade como um todo [...] Naturalmente, isso tudo, em especial o quanto pode se aprofundar e quão abrangente pode ser o professor, vai depender de sua formação. Por isso recomenda-se que todos os cursos de licenciatura de matemática ofereçam história da matemática. Lamentavelmente, essa recomendação é pouco seguida.

O importante é que não é necessário que o professor seja um especialista para introduzir história da matemática em seus cursos. Se em algum tema tem uma informação ou curiosidade histórica, compartilhe com seus alunos. Se sobre outro tema ele sabe nada e não tem o que falar, não importa. Não é necessário desenvolver um currículo, linear e organizado, de história da matemática. Basta colocar aqui e ali algumas reflexões. Isto pode gerar muito interesse nas aulas de matemática. Claro, o bom seria que o professor tivesse uma noção da história da matemática e pudesse fazer um estudo mais sistemático e por isso recomenda-se aos professores em serviço que procurem essa formação."

Alguns "porquês" na história da matemática e suas contribuições para a educação matemática

Sergio Nobre

"[...] Sob o ponto de vista educacional, muitas coisas são transmitidas de forma tal, que passam a ser vistas como se fossem naturais. E a crença nesta «naturalidade» fica no pensamento da criança até que um dia (se é que este dia irá chegar) ela, ao saber da verdadeira origem de certas coisas, terá uma enorme decepção. Neste sentido, destaco a necessidade de que, ao transmitir um conteúdo, o professor deve estar ciente de que a fórmula acabada, na qual se encontra, passou por inúmeras modificações ao longo da história.

A principal pergunta feita por nossos antepassados, ao visarem à compreensão de determinados fenômenos naturais, diz respeito ao porquê de sua ocorrência. No entanto, o homem, após concluir seus questionamentos e chegar a respostas aceitáveis ao contexto de sua época, abandona, de certa forma, o processo que fora necessário para se chegar a um determinado conceito, e passa a utilizar somente o resultado final. Ou seja, ele utiliza somente o produto relativo a um processo que, em muitos casos, demorou algumas centenas de anos para ser desenvolvido. E este resultado passa a ser visto como se fosse natural.

[...] A busca das contradições da ciência, "para que logo surjam outras contradições", é que proponho um tratamento diferenciado à transmissão dos conhecimentos, ou seja, que se tente acompanhar o conceito a ser trabalhado a partir de seu desenvolvimento histórico. Desta forma, a educação assume um caminho diferente. Em vez de ensinar a praticidade dos conteúdos escolares, investe-se na fundamentação deles. Em vez de se ensinar o para quê, ensina-se o porquê das coisas".

A história da matemática na formação do professor de matemática

Antonio Miguel e Arlete de Jesus Brito

(sobre a maneira de se entender a organização do saber)

"[...] Podemos nos colocar as seguintes perguntas: até que ponto a visão fragmentada que o aluno tem da matemática não é o reflexo ou mesmo conseqüência da maneira como nós professores de matemática representamos esse campo do saber? Nós conseguimos perceber a dialética de recuos e avanços no desenvolvimento de um conceito ou teoria? Nós temos clareza do modo como as práticas sociopolítico-econômicas podem interferir na produção da matemática e como essa produção interfere naquelas práticas? Temos idéia de algumas aplicações de conceitos matemáticos em outras áreas de conhecimento? Como essas aplicações são possíveis? Estas são perguntas fundamentais que deverão ser enfrentadas se quisermos superar a fragmentação do saber que tem sido um entrave histórico à realização de um ensino significativo da matemática elementar. Não há dúvida de que nossa formação universitária, com poucas exceções, reforça essa fragmentação do saber.

A participação orgânica da história da matemática na formação do professor pode ajudar a ultrapassar essa problemática, tanto por possibilitar a explicitação de momentos nos quais a natureza qualitativa e quantitativa da produção matemática modificou-se em função de problemas colocados por outras áreas (um exemplo é fornecido pelos inícios da geometria projetiva), quanto por facilitar a compreensão de um "modelo" e possibilitar a verificação de alguns casos de utilização de modelos matemáticos na aplicação de conceitos de outras áreas (podemos, como exemplo, citar a utilização das funções trigonométricas ou fenômenos periódicos, tais como cordas vibrantes, ondas de rádio etc.). Tal participação pode também contribuir para a análise de como os discursos de outras áreas do saber (filosofia, arte, religião etc.) relacionam-se com o discurso matemático. Ou seja, pelo estudo da matemática do passado, podemos perceber como a matemática de hoje insere-se na produção cultural humana e alcançar uma compreensão mais significativa de seu papel, de seus conceitos e de suas teorias, uma vez que a matemática do passado e a atual engendram-se e fundamentam-se mutuamente".

Em síntese, podemos ter o tema história da Matemática como um importante aliado no trabalho de pesquisa e investigação dos nossos alunos, procurando em material da imprensa, livros didáticos e paradidáticos, enciclopédias e almanaques, vídeos, e, quando possível, na internet. O trabalho de reconstrução das condições nas quais se deram a construção do conhecimento via dramatização e teatro, ou ainda, a construção de painel são sempre interessantes e proveitosos. A construção da linha do tempo da matemática, com o relacionamento do seu desenvolvimento com o da tecnologia, é igualmente interessante.

Atividades

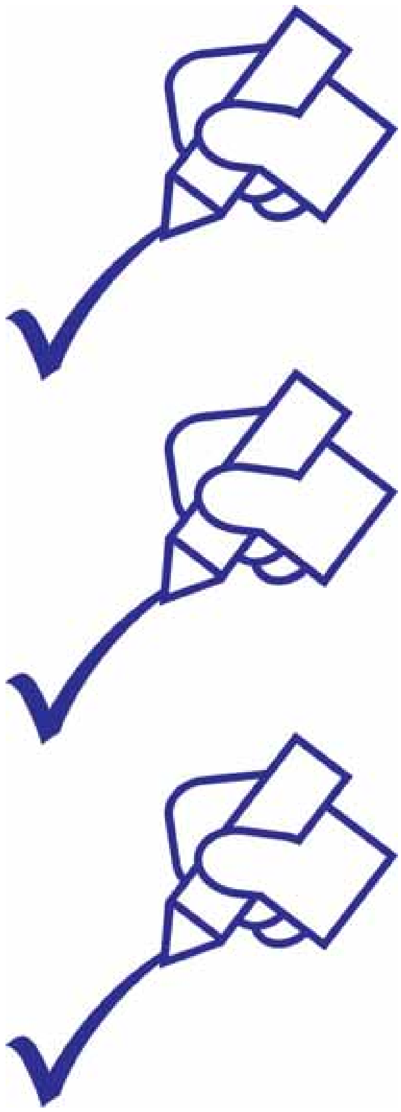
a) Faça um levantamento sobre os conteúdos matemáticos dos quais você tem conhecimento a respeito da história de sua construção e passíveis de serem explorados junto aos alunos.

b) Reflita sobre um conteúdo matemático por você trabalhado com seus alunos e de que você não tem dados históricos sobre o mesmo, mas sempre teve curiosidade de conhecer. Faça uma pesquisa entre colegas, livros didáticos, livros de história da matemática, livros paradidáticos, enciclopédias, almanaques, e, se possível, na internet sobre esse enfoque histórico.

c) Liste pelo menos cinco estratégias pedagógicas diferentes de utilização da história na matemática no ensino de 5ª a 8ª séries.

d) Faça um levantamento junto aos seus colegas sobre as mais variadas formas de explorar o enfoque histórico da matemática junto aos seus alunos.

Solução das atividades



Solução das atividades

As respostas às atividades 1 a 6 são pessoais.

Atividade 7

O custo do comportamento ecológico.

Atividade 8

As respostas abaixo são possíveis respostas. As suas podem ter sido diferentes, e no entanto estarem corretas.

a) variável cor - domínio: {vermelho, laranja, amarelo, verde, azul, violeta, anil}

b) variável *sexo* - domínio: {feminino, masculino}

c) variável *n* - domínio: { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }

d) variável *r* - {*p*/*q*, em que *p* e *q* são números inteiros e q ≠ 0} ou Q (conjunto dos números racionais)

e) variável x - {0, 1, 2, 3, 4}.

Atividade 9

a) Se os dois números forem x e y, temos:

1º passo: $5x$

2º passo: $5x+8$

3º passo: $2(5x+8)$

4º passo: $2(5x+8)+y$

5º passo: $2(5x+8) - 16+y= 10x+y$

Isto nos diz que os números escolhidos comporão os valores das dezenas e das unidades do número encontrado (por causa do nosso sistema posicional decimal). A expressão algébrica $10x+y$ nos diz que o primeiro número estará no lugar das dezenas e o segundo, no lugar das unidades.

b) Significa que o primeiro número escolhido foi 9, e o segundo, 6.

Atividade 10

a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{5} \\ y - x = 21 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{5} = c \Rightarrow \begin{cases} y = 5c \\ x = 2c \end{cases} \Rightarrow 5c - 2c = 21 \Rightarrow 3c = 21 \Rightarrow c = 7 \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \times 7 = 35 \\ x = 2 \times 7 = 14 \end{cases}$

Atividade 11

"Nos primeiros meses do ano, o número de alunos que fazem empréstimos na biblioteca aumenta. Atinge seu máximo no mês de junho. No mês de julho cai de novo. Cresce novamente a cada mês até outubro. Em novembro decresce um pouco".

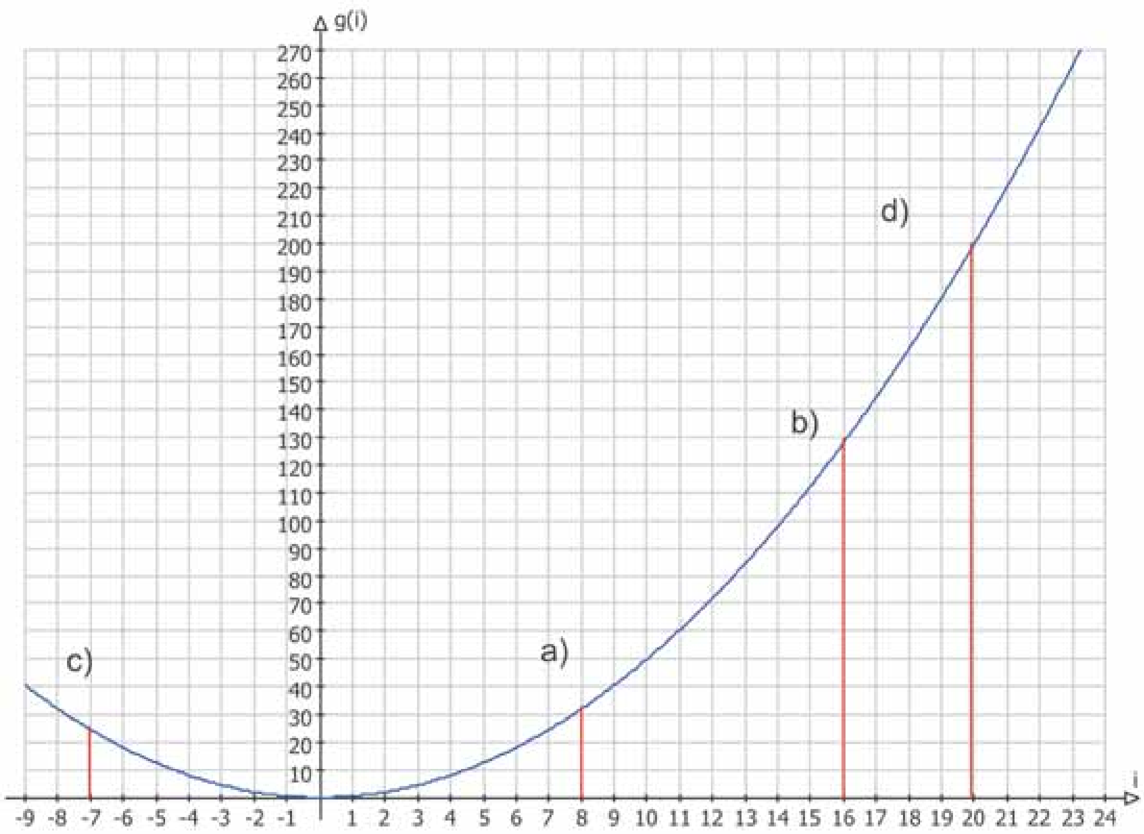
Atividade 12

A resposta é pessoal.

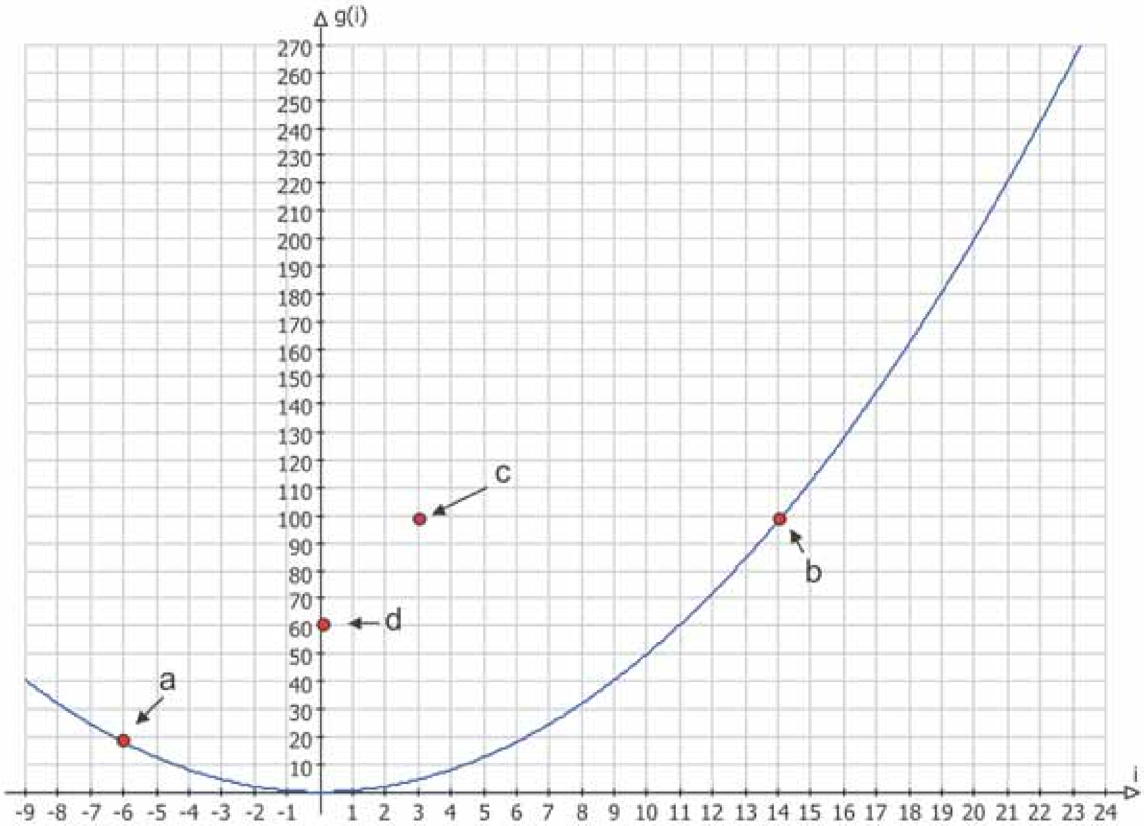
Atividade 13

b, c, d, e

Atividade 14



Atividade 15



Unidade 12

Velocidade de crescimento

Ana Lúcia Braz Dias

Iniciando a nossa conversa

Caro professor,

Na unidade passada, começamos a examinar o uso de variáveis para representar a interdependência entre duas grandezas. Nesta unidade daremos segmento à nossa investigação.

Quando você se depara com um gráfico mostrando como uma grandeza varia em função de outra, em que você presta atenção? Nos valores envolvidos? No desenho que a curva faz? Nas grandezas e unidades de medida envolvidas?

Você procura saber se as informações daquele gráfico poderiam ser representadas por uma fórmula, ou por uma tabela?

Vamos revisitar essas formas de representar a interdependência entre grandezas, e a variedade de modos pelos quais uma grandeza pode se relacionar a outra.

Tomara que este estudo chame sua atenção para coisas novas e úteis para você e seus alunos.

Esta unidade está organizada em três seções:

1. Resolução de uma situação-problema

Na situação-problema desta unidade você lerá um artigo sobre o seqüestro de carbono pelas árvores da Amazônia, e examinará as questões matemáticas contidas no texto.

2. Conhecimento matemático em ação

Nesta seção, você terá uma continuação de seus estudos de funções, pensando nos aspectos: crescimento, decrescimento, taxa de crescimento ou de decrescimento.

3. Transposição Didática

Esta seção discute problemas relacionados ao ensino-aprendizagem de conceitos vistos nas seções 1 e 2 e sugere ações relacionadas para a sala de aula.

Como as outras unidades, esta também conterá um Texto de Referência sobre Educação Matemática, que abordará o tema "O professor de matemática pesquisador".

Definindo o nosso percurso

Ao longo desta unidade, esperamos que você possa:

1 – Com relação ao seu conhecimento de conteúdos matemáticos:

- identificar funções em situações reais;
- representar graficamente a interdependência entre duas variáveis;
- interpretar informação a respeito de interdependência entre duas variáveis por meio de três representações diferentes: gráficos, tabelas e fórmulas;
- analisar a dinâmica da variação interdependente entre duas variáveis: crescimento, decrescimento e quão rápido se dá essa variação;
- observar variações na taxa média de crescimento ou decrescimento de uma variável em relação a outra, relacionando representações numéricas dessas variações a representações gráficas, e vice-versa;
- calcular a taxa média de variação de uma variável em relação a outra;
- calcular a porcentagem de variação de uma variável em relação a outra;
- determinar a unidade de medida de uma grandeza que seja razão entre duas outras grandezas.

Isto será feito nas seções 1 e 2.

2 – Com relação aos seus conhecimentos sobre educação matemática:

- repensar o papel do professor nas investigações sobre educação matemática.

Isto será feito ao final da unidade, no Texto de Referência.

3 – Com relação à sua atuação em sala de aula:

- elaborar atividades que levem seus alunos a observar os diferentes modos como uma grandeza pode variar em função de outra.
- elaborar atividades em que seus alunos utilizem diferentes representações da interdependência entre duas grandezas.
- proporcionar a seus alunos uma apreciação da variedade de unidades de medidas utilizadas em situações reais.

Isto será trabalhado na seção 3.

Seção 1

Resolução de situação-problema: Integrando a matemática ao mundo real – a matemática e o senso comum

Objetivo da seção

Nesta seção você deverá:

- Identificar funções em uma situação real;
- Representar graficamente a interdependência entre duas variáveis;
- Interpretar informação a respeito de interdependência entre duas variáveis em uma situação real.

Integrando a matemática ao mundo real

No mundo real é muito comum termos uma grandeza variando de forma interdependente à variação de outra grandeza. Uma representação matemática desse tipo de relação são as funções.

Mas os conhecimentos sobre funções ultrapassam os livros de matemática e estão presentes em jornais, revistas e até na linguagem cotidiana. Dizemos, por exemplo, que "o salário varia em função do grau de instrução do trabalhador". Nesse caso a palavra "função" não está necessariamente revestida do sentido matemático. No senso comum os termos podem assumir conotação diferente daquela definida no contexto da matemática.

Na mídia impressa encontramos muitos gráficos e tabelas, muitas vezes mostrando a interdependência entre duas variáveis: são curvas que sobem e descem, às vezes de forma drástica, às vezes de forma suave; tabelas com uma avalanche de números... Se não soubermos interpretar esse tipo de linguagem, ficamos perdidos! Mas, em compensação, se soubermos explorar a matemática das funções, quantas informações podemos retirar desse tipo de representação de fenômenos reais!

Situação-problema: seqüestro de carbono

Quanto mais alta a exposição ao gás carbônico, mais rápido crescem as árvores.

A Floresta Amazônica pode absorver grande quantidade do dióxido de carbono, gás carbônico ou CO_2 - um dos principais compostos da poluição atmosférica liberada pelo homem em processos como a queima de combustíveis. Recentemente, observou-se que, quanto maior for a exposição das árvores da floresta a esse gás, mais rápido será seu crescimento. Essa é uma das conclusões do estudo feito em colaboração entre cientistas do Instituto Nacional de Pesquisa da Amazônia (INPA) e da Universidade da Califórnia em Irvine (Estados Unidos) e publicado na revista *Nature* em 22 de março.

Sempre se acreditou que a Amazônia (uma floresta tropical úmida) estava em equilíbrio, ou seja, que aspirava e expelia a mesma quantidade de gás carbônico. As plantas obtêm energia por dois processos: a fotossíntese (em que aprisionam gás carbônico e liberam oxigênio) e a respiração (em que as trocas gasosas se dão de forma inversa). No entanto, resultados de observações sucessivas ao longo dos últimos 20 anos mostram que a floresta é capaz de fixar nas árvores cerca de 1,2 toneladas de carbono por hectare[1] a cada ano (um hectare tem 10 mil metros quadrados, medida similar à de um campo de futebol). "Se considerarmos que a Amazônia tem por volta de 250 milhões de hectares, chega-se à conclusão que a floresta pode absorver até 300 milhões de toneladas de carbono por ano", afirma Niro Higuchi, engenheiro florestal do INPA e um dos autores da pesquisa em questão.

A concentração excessiva de gás carbônico na atmosfera é responsável pelo efeito estufa, fenômeno que contribui para o aquecimento da Terra e pode levar a efeitos como enchentes, secas e aumento do nível dos mares. Só o Brasil emite, em média, 65 milhões de toneladas do gás poluente para a atmosfera a cada ano por meio da queima de combustíveis fósseis.

Outro resultado que surpreendeu os autores do estudo diz respeito ao crescimento das árvores. Segundo Higuchi, que estuda a Amazônia há 21 anos, elas crescem proporcionalmente à quantidade de gás carbônico a que são expostas. "Nossos experimentos mostraram que, quando dobra a quantidade de exposição de dióxido carbono, a árvore cresce, em média, 25% mais rapidamente." Um trabalho anterior, também publicado na *Nature*, havia verificado a idade das árvores de terra firme (trecho não inundado nas épocas de cheia dos rios). "Encontramos exemplares com até 1400 anos", conta o pesquisador.

O próximo objetivo de Higuchi é entender melhor o que ocorre nas raízes das árvores - um importante e pouco estudado reservatório de carbono. "Isso tudo faz parte de um projeto que pretende traçar um modelo geral sobre a Amazônia", afirma o cientista. Segundo ele, o estudo poderá ser útil para o desenvolvimento sustentável da região e para prever as conseqüências de situações diversas como queimadas, por exemplo.

Seqüestro de carbono pela floresta amazônica
fonte: http://www.uol.com.br/cienciahoje/chdia/n331.htm

Atividade 1

Considere a frase: "Nossos experimentos mostraram que, quando dobra a quantidade de exposição de dióxido de carbono, a árvore cresce, em média, 25% mais rapidamente."

Se considerarmos um conjunto de árvores e medirmos quantas toneladas de madeira teremos a mais a cada ano, teremos uma medida de seu crescimento, concorda?

1 $100m^2$ = 1 are ⟶ um quadrado de 10 metros de lado
1 hectare = 100 ares ⟶ 1 hectare = 100 X $100m^2$ = $10.000m^2$

Então suponhamos que o crescimento desse conjunto de árvores seja de 1 tonelada ao ano quando o carbono posto em circulação seja de 1 tonelada. A frase do parágrafo anterior diz que, se dobrarmos a exposição ao dióxido de carbono, a velocidade de crescimento aumentará em 25%.

a) Para termos uma idéia mais concreta desse padrão de variação, complete a tabela abaixo.

Crescimento das árvores (toneladas/ano)	1					
Quantidade de CO_2 exposto (toneladas)	1					

b) O texto sugere que isso equivale a dizer que as árvores crescem proporcionalmente à quantidade de gás carbônico a que são expostas. Você concorda com isso?

Atividade 2

Como seria um gráfico da quantidade de carbono fixado nas árvores, em toneladas por hectare, em função do tempo, em anos, se supusermos que a floresta fixa nas árvores 1,2 tonelada de carbono por hectare a cada ano?

Seção 2

Construção do conhecimento matemático em ação: funções crescentes, decrescentes e taxa de variação

Objetivo da seção

Ao final desta seção, você deverá ser capaz de:

• Representar graficamente a interdependência entre duas variáveis.

• Interpretar informação a respeito de interdependência entre duas variáveis por meio de três representações diferentes: gráficos, tabelas e fórmulas.

• Analisar a dinâmica da variação interdependente entre duas variáveis: crescimento, decrescimento e quão rápido se dá essa variação.

• Observar variações na taxa média de crescimento ou decrescimento de uma variável em relação a outra, relacionando representações numéricas dessas variações a representações gráficas, e vice-versa.

• Calcular a taxa média de variação de uma variável em relação a outra.

• Calcular a porcentagem de variação de uma variável em relação a outra.

• Determinar a unidade de medida de uma grandeza que seja razão entre duas outras grandezas.

Revendo seus conceitos: gráficos de funções

Na situação-problema “Seqüestro de carbono”, temos vários exemplos de grandezas que são função uma da outra.

Funções podem ser representadas de várias formas: tabelas, gráficos, diagramas, um conjunto de pares ordenados.

A representação de funções por meio de gráficos nos dá uma idéia mais dinâmica de como a variável dependente se comporta conforme a variável independente aumenta de valor.

Gráfico 1

Por exemplo, em um gráfico como o gráfico 1, conforme acompanhamos a variável independente x crescer no eixo horizontal da esquerda para a direita, a variável dependente y também cresce, assumindo valores mais altos no eixo vertical. (Você já sabe que em casos como este diz-se que a função é crescente.)

Já no gráfico 2, conforme acompanhamos a variável independente x crescer no eixo horizontal da esquerda para a direita, a variável dependente y decresce, assumindo valores mais baixos no eixo vertical. (A função é decrescente.)

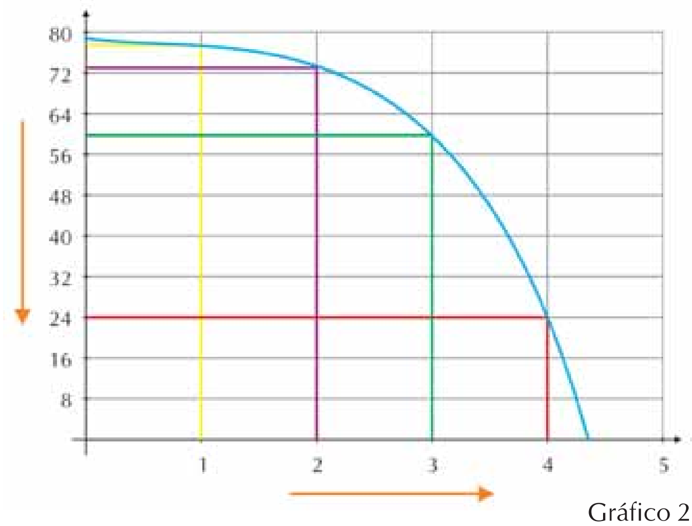


Gráfico 2

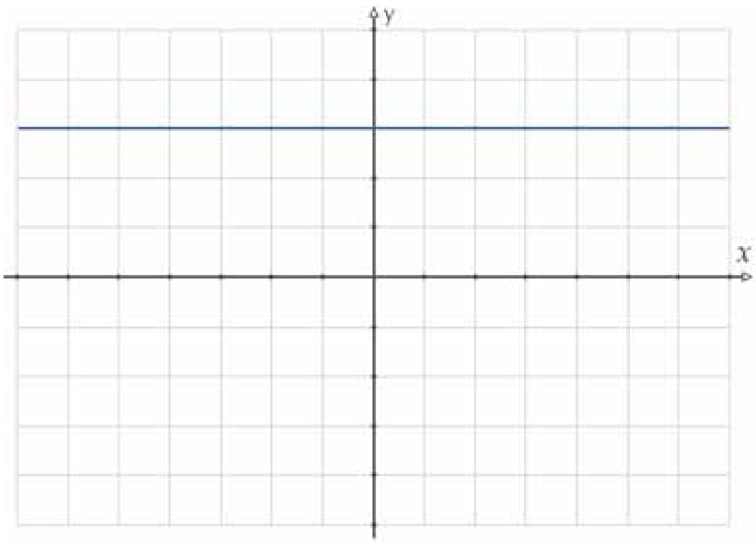


Gráfico 3

No gráfico 3, conforme acompanhamos com os olhos a variável independente x crescer no eixo horizontal da esquerda para a direita, vemos que a variável dependente y continua sempre com o mesmo valor. (A função é constante.)

Outros gráficos são uma combinação desses tipos de variação conjunta. Conforme a variável independente cresce, a variável dependente pode crescer em alguns intervalos, ficar constante em outros ou decrescer em outros.

Atividade 3

Os gráficos da figura 1 mostram a variação da distância a que João se encontra de casa em um instante t. Leia as três situações seguintes e faça cada uma corresponder a um gráfico da figura 1.

1) De manhã eu saio de casa para o trabalho. Volto ao meio-dia para almoçar com a família, e à tarde vou para o trabalho de novo.

2) Todos os dias eu ando até meu trabalho. Só paro na banca para comprar o jornal e na padaria para tomar um café.

3) Eu vou de carro para o trabalho, todos os dias. Antes de chegar à estrada principal, não há muito trânsito, então eu posso correr um pouco. Mas na via principal eu sempre pego um engarrafamento até meu trabalho.

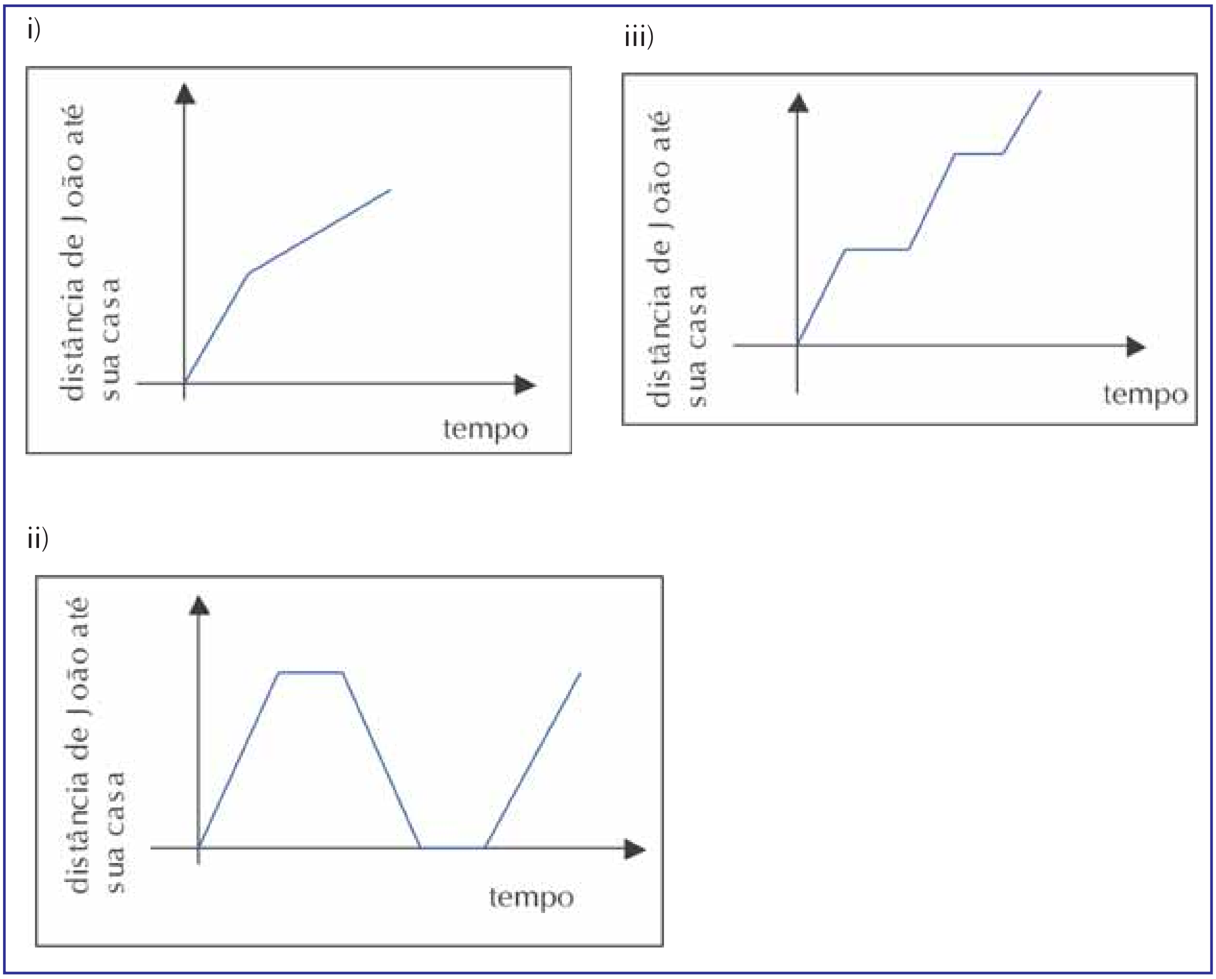


Figura 1

Crescendo cada vez mais rápido, cada vez mais devagar, ou a um ritmo constante?

Observe os gráficos da figura 2. Em ambos os gráficos, y cresce à medida que x cresce. As duas funções são crescentes.

Mas elas estão crescendo cada vez mais rápido, cada vez mais devagar, ou a um ritmo constante?

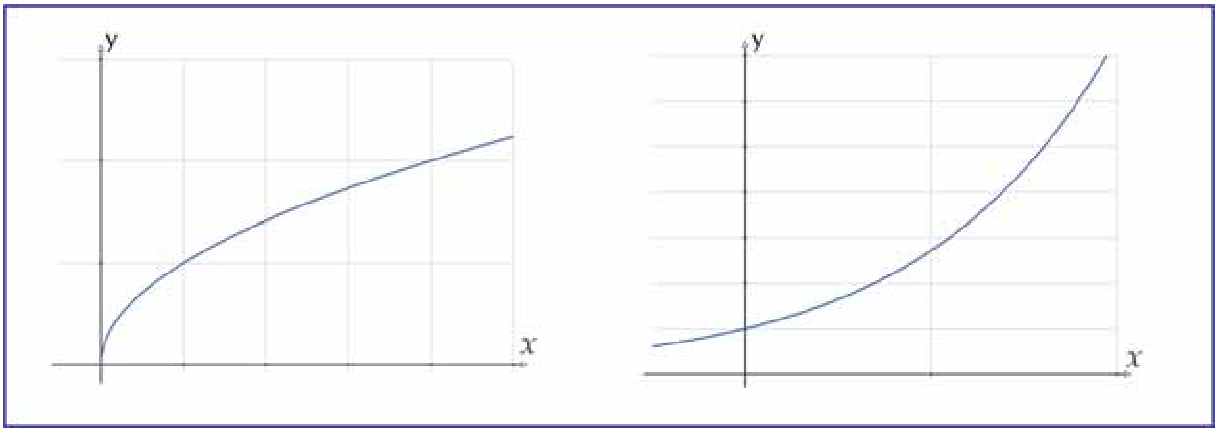


Figura 2

Vemos na figura 3 que quando x cresce intervalos iguais (de a a b, ou de c a d, ou de e a f), o crescimento sofrido por y é diferente. O crescimento de y está ficando menor à medida que x cresce. Ou seja, y está sempre crescendo, mas cada vez mais devagar.

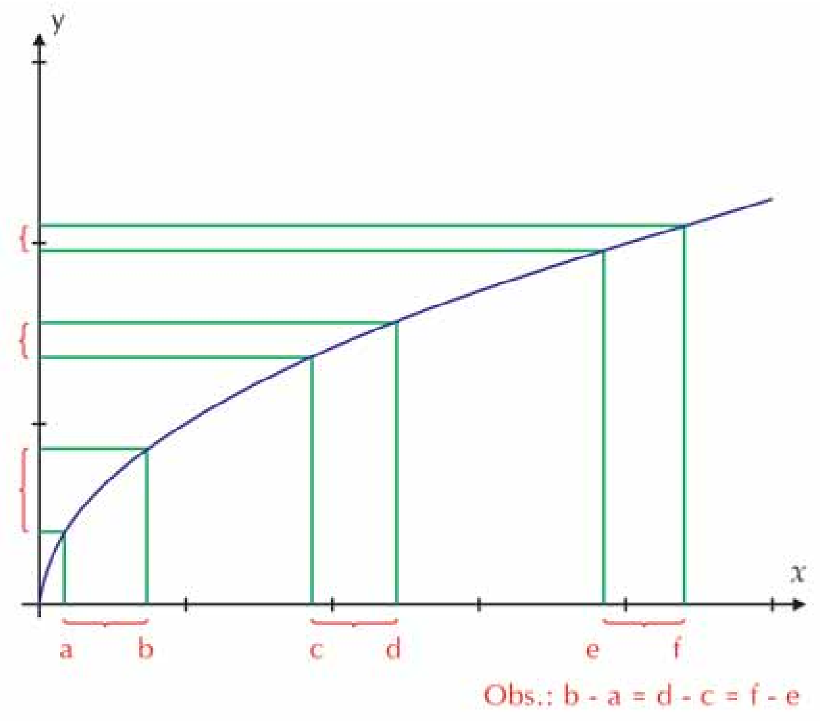


Figura 3

Já na figura 4 vemos que, à medida que x cresce, o crescimento sofrido por y vai ficando cada vez maior. Ou seja, y está sempre crescendo, e cada vez mais rápido.

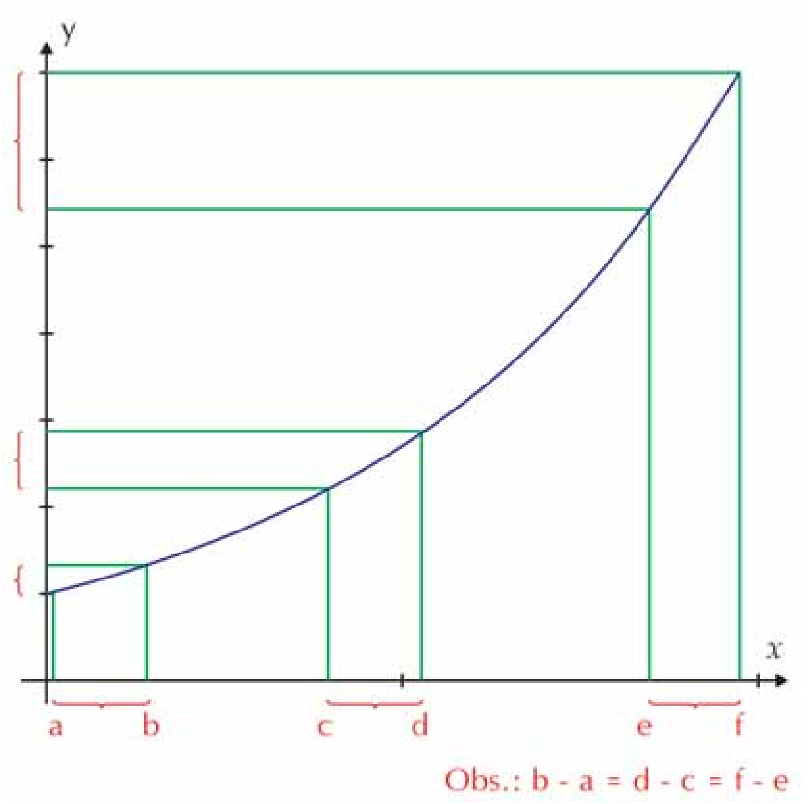


Figura 4

E se o crescimento for sempre no mesmo ritmo? Variações iguais de x ocasionam variações iguais de y, como na figura 5. Como já vimos na Unidade 8 do TP 2, o crescimento é linear nesse caso, e a representação é uma reta.

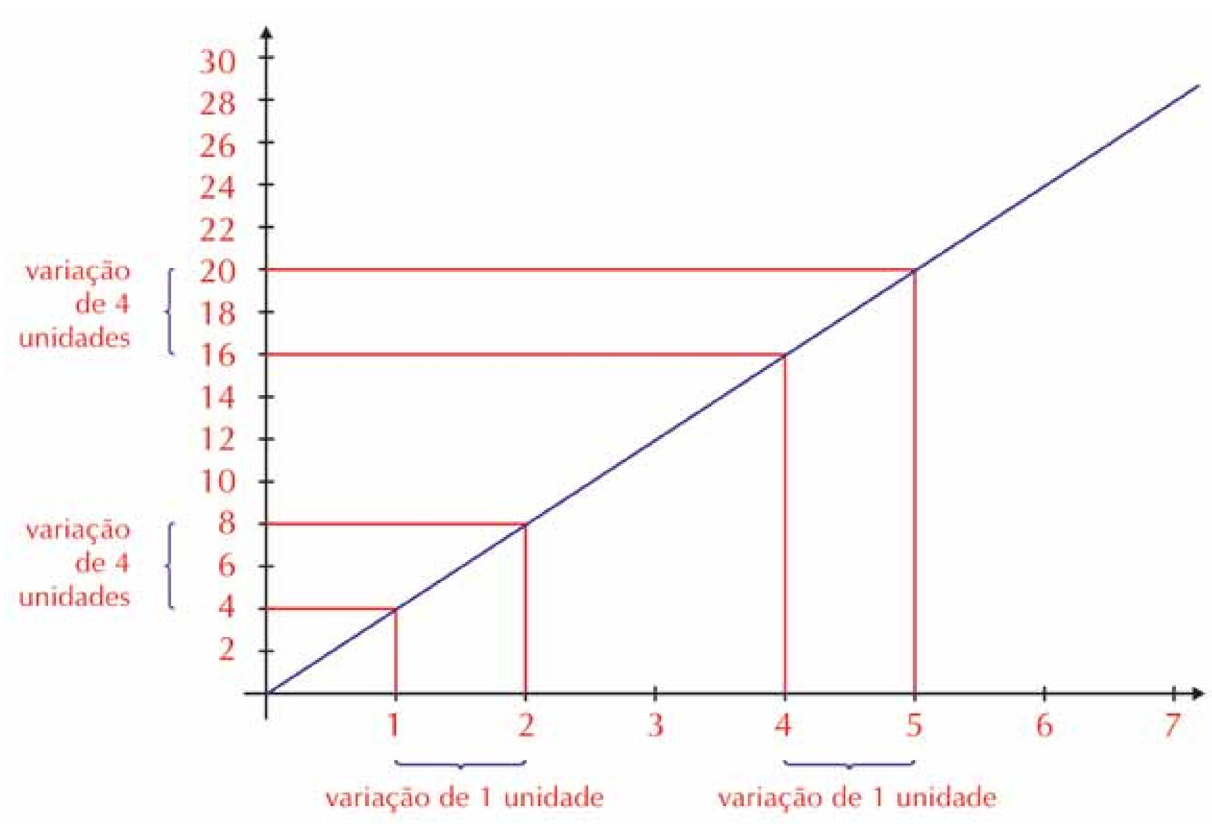


Figura 5

Vamos examinar isso numericamente, com tabelas de valores para as variáveis independente e dependente.

Vamos considerar três funções diferentes, h(t), g(t) e k(t).

A tabela 1 nos dá os valores de h(t) para os valores inteiros de t de 1 a 6. Na terceira coluna, começamos a calcular a variação que h(t) sofreu quando t variou 1 unidade, da linha anterior até a linha em questão. Termine de preencher essa última coluna.

t	h(t)	variação de h(t)	
1	10		
2	20	(de t=1 a t=2)	10
3	29	(de t=2 a t=3)	
4	37	(de t=3 a t=4)	
5	44	(de t=4 a t=5)	
6	50	(de t=5 a t=6)	

Tabela 1

Faça o mesmo na tabela 2, com os valores de g(t) (Calcule a variação de g(t) de uma linha para outra.)

t	g(t)	variação de g(t)	
1	23		
2	24	(de t=1 a t=2)	1
3	26	(de t=2 a t=3)	
4	29	(de t=3 a t=4)	
5	33	(de t=4 a t=5)	
6	38	(de t=5 a t=6)	

Tabela 2

Finalmente, faça o mesmo na tabela 3, como os valores de k(t) (Calcule a variação de k(t) de uma linha para outra.)

t	k(t)	variação de k(t)	
1	2,2		
2	2,5	(de t=1 a t=2)	0,3
3	2,8	(de t=2 a t=3)	
4	3,1	(de t=3 a t=4)	
5	3,4	(de t=4 a t=5)	
6	3,7	(de t=5 a t=6)	

Tabela 3

Vemos que, à medida que t cresce, h(t), g(t) e k(t) crescem.

Mas, conforme t cresce, h(t) cresce cada vez mais rápido ou cresce cada vez mais devagar?

E g(t), cresce cada vez mais rápido ou cada vez mais devagar?

O que você diria a respeito de k(t)?

Os gráficos de funções nos dizem muitas coisas sobre a interdependência entre duas variáveis: os intervalos nos quais ela é crescente, decrescente ou constante, e também quão rápido ou quão devagar a variável independente faz a variável dependente mudar. Se o eixo contiver valores, podemos também ver os valores que a variável dependente assume para certos valores da variável independente.

Atividade 4

Relacione as curvas de gráfico da figura 6 às funções representadas nas tabelas 4, 5 e 6.

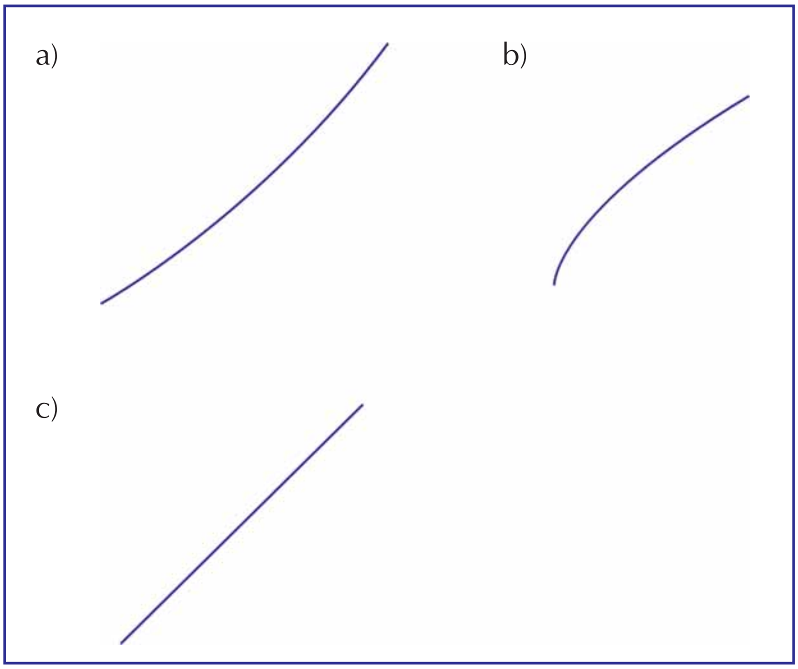


Figura 6

x	f(x)
0	2
1	4
2	6
3	8
4	10
5	12

Tabela 4

x	f(x)
0	2
1	10
2	15
3	18
4	20
5	21

Tabela 5

x	f(x)
0	20
1	25
2	35
3	52
4	75
5	100

Tabela 6

Atividade 5

Relacione as curvas de gráfico da figura 7 às funções representadas nas tabelas 7, 8 e 9.

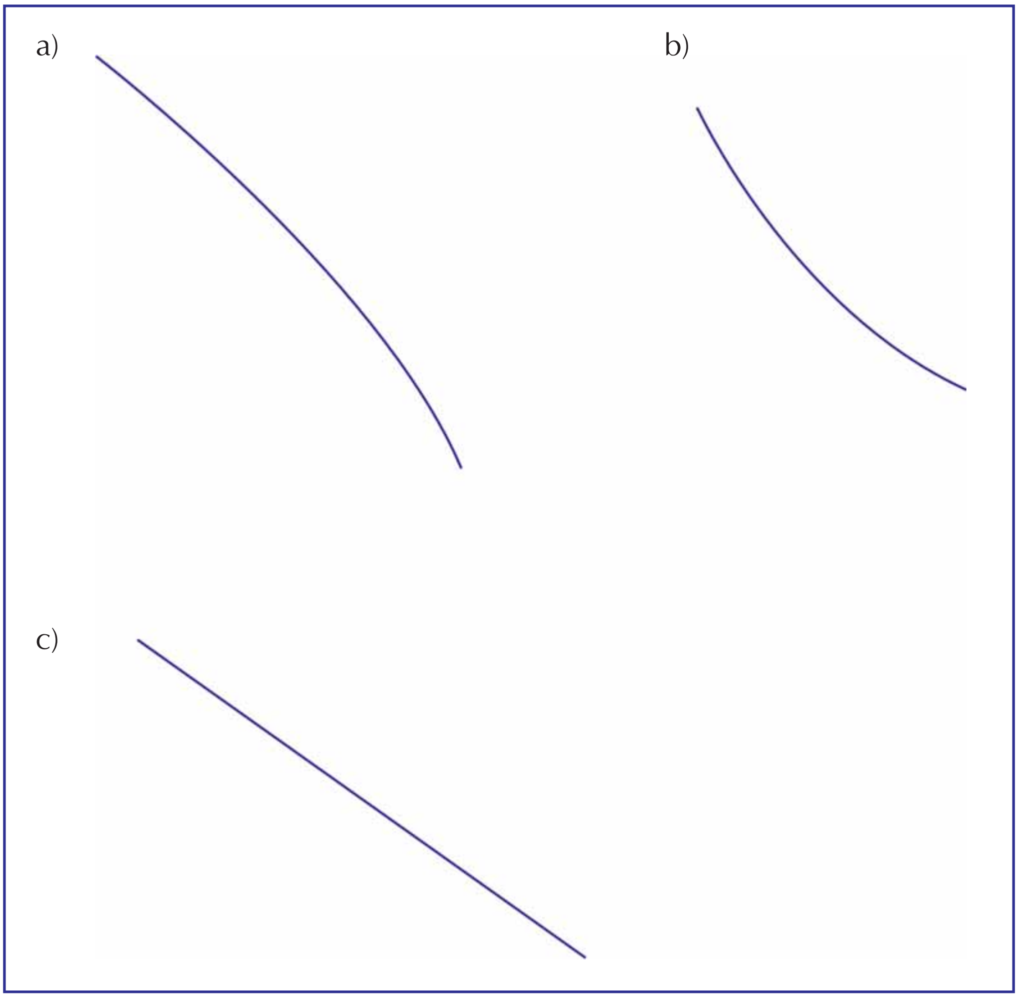


Figura 7

x	f(x)
0	30
1	25
2	18
3	10
4	0
5	-12

Tabela 7

x	f(x)
0	75
1	73
2	71
3	69
4	67
5	65

Tabela 8

x	f(x)
0	20
1	25
2	35
3	52
4	75
5	100

Tabela 9

Atividade 6

Para responder aos itens 1, 2 e 3, refira-se aos gráficos da figura 8.

1) Hoje saí de casa para o trabalho tranqüilo, dirigindo devagar. Quando percebi que estava atrasado, aumentei a velocidade. Qual é o gráfico da distância em que eu me encontrava da minha casa em função do tempo?

2) Quando digito algum trabalho, conforme vou me aquecendo, vou aumentando minha velocidade de digitação. Depois de uma hora eu canso, e minha velocidade de digitação vai diminuindo. Qual é o gráfico do número de letras digitadas em função do tempo?

3) Quando digito algum trabalho, conforme vou me aquecendo, vou aumentando minha velocidade de digitação. Depois de uma hora eu canso, e minha velocidade de digitação vai diminuindo. Qual é o gráfico da minha velocidade de digitação em função do tempo?

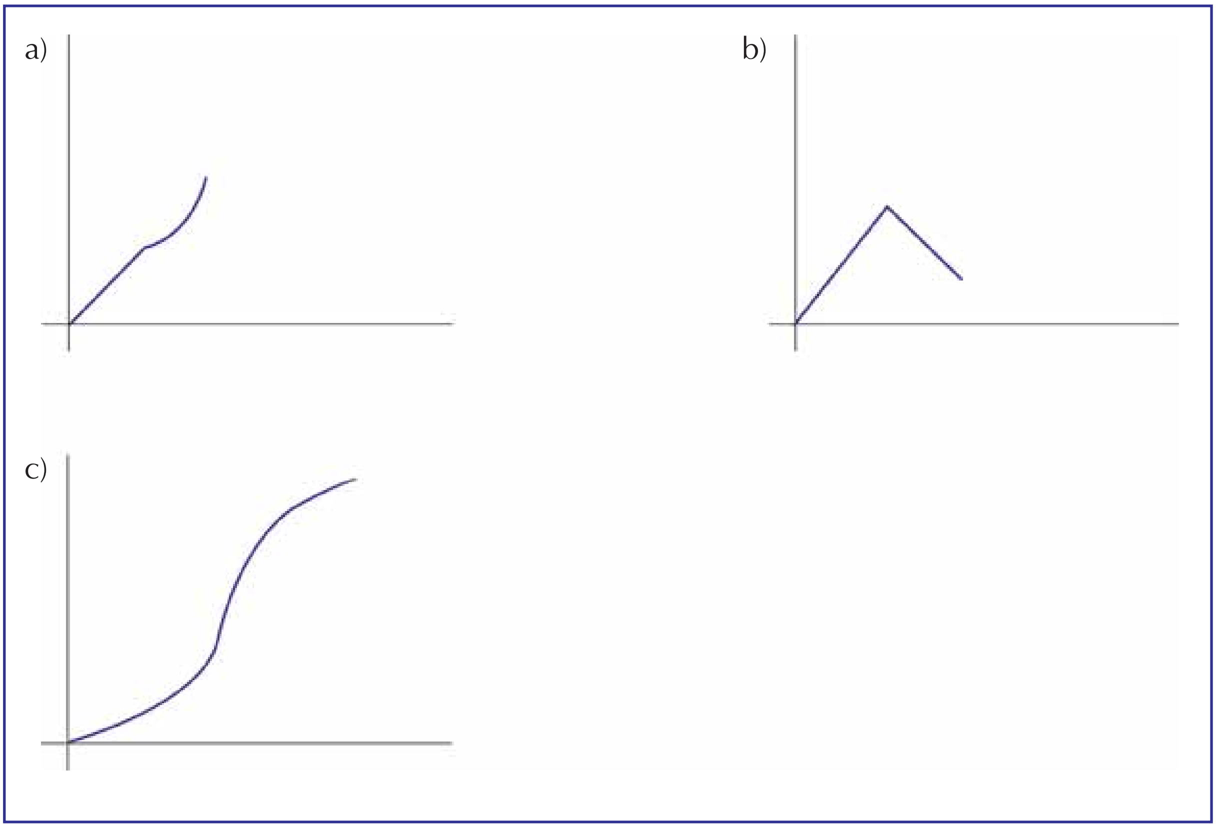


Figura 8

Atividade 7

Esboce um gráfico para representar a seguinte constatação:

"O efeito estufa começou a aumentar vagarosamente de início, e agora cresce cada vez mais rápido".

Taxa média de variação

Muitas vezes, estamos interessados em saber não como uma variável muda em relação a outra, mas a que taxa essa mudança ocorre: Quão rápido ou quão devagar a variável dependente variou para uma dada variação na variável independente. Isso nos permite de forma mais segura fazer previsões sobre valores futuros.

Como exemplo, consideremos a variação da emissão de dióxido de carbono por uma fábrica em função do número de toneladas da sua produção.

Vamos ver essa variação em três representações diferentes. Com uma fórmula (fórmula 1), com uma tabela (tabela 10), e com um gráfico (gráfico 4).

fórmula 1: $emissão = 2^{\text{produção}}$

Produção (em toneladas)	**Emissão de dióxido de carbono** (em partes por milhão)
0,1	1,07
0,2	1,15
0,3	1,23
0,4	1,32
0,5	1,41
0,6	1,52
0,7	1,62
0,8	1,74
0,9	1,87
1	2,00
1,1	2,14
1,2	2,30
1,3	2,46
1,4	2,64
1,5	2,83
1,6	3,03
1,7	3,25
1,8	3,48
1,9	3,73
2	4,00

Tabela 10

No intervalo de 0,5 a 1 tonelada, a emissão de dióxido de carbono passou de 1,41 para 2 partes por milhão. Ou seja, variou 0,59 parte por milhão em 0,5 tonelada, ou 1,18 parte por milhão por tonelada.

Já no intervalo de 1,5 a 2 toneladas, a emissão de dióxido de carbono passou de 2,83 para 4 partes por milhão. Ou seja, variou 1,17 parte por milhão em 0,5 tonelada, ou 2,34 partes por milhão por tonelada. O crescimento foi muito mais rápido que no intervalo que consideramos anteriormente.

Essa taxa de mudança, ou taxa de variação (que também pode ser chamada de taxa de crescimento ou de decrescimento, conforme a variação crescente ou descrescente), não é a mesma para todo intervalo, por isso consideramos a média do intervalo:

$$\textit{taxa média de variação} = \frac{\textit{variação da variável dependente no intervalo}}{\textit{variação da variável independente no intervalo}}$$

Você lembra que já estudamos a taxa de variação no TP 2?

Você reparou na unidade em que demos essa taxa?

A taxa média de variação é uma grandeza determinada pela razão entre duas outras grandezas: a variável dependente e a variável independente. Como a variável independente e a variável dependente têm suas unidades de medida próprias, a taxa média de variação será dada em outra unidade, razão entre as unidades das variáveis em questão.

$$\textit{unidade de medida da taxa média de variação} = \frac{\textit{unidade de medida da variável dependente}}{\textit{unidade de medida da variável independente}}$$

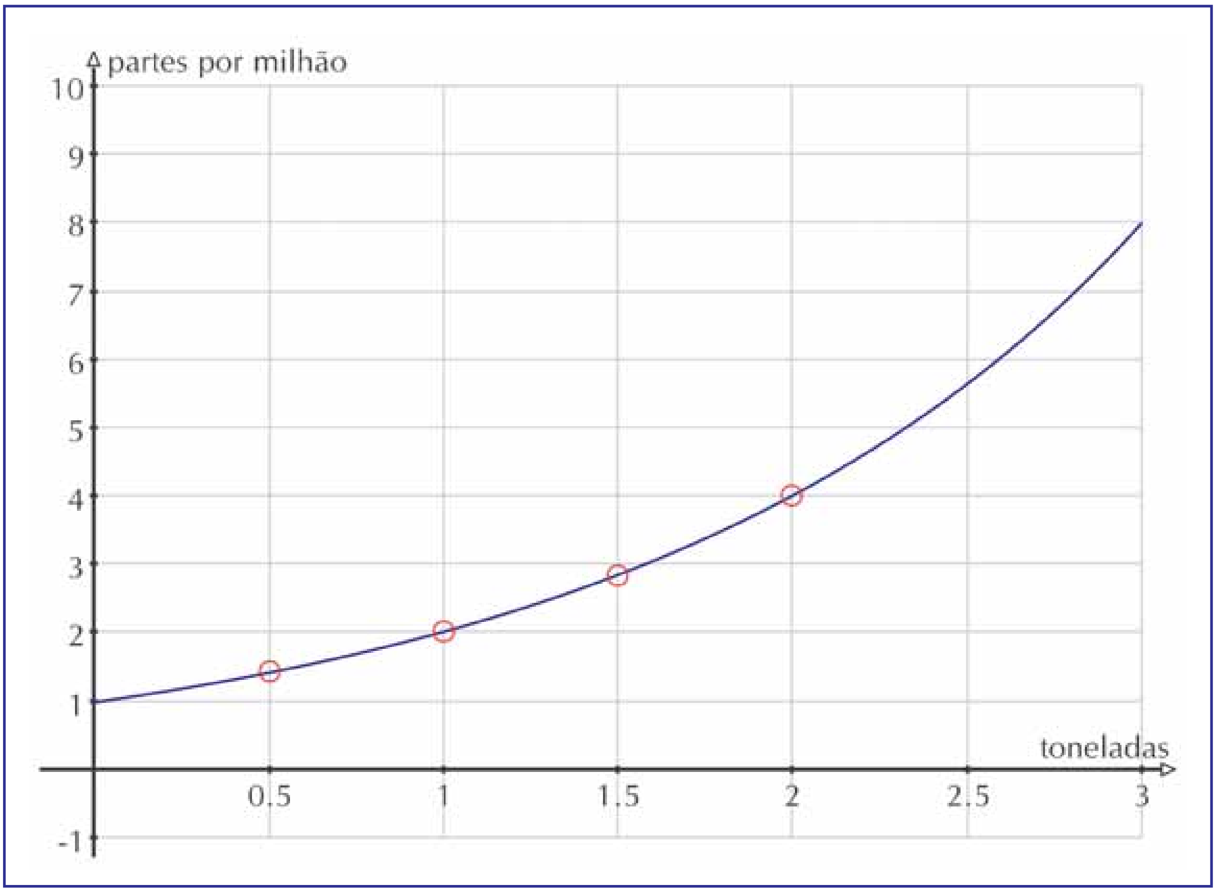


Gráfico 4

No nosso exemplo, a variável independente, a produção, foi dada em toneladas; a variável dependente, a produção de dióxido de carbono, foi dada em partes por milhão. Então a taxa média de variação será dada em:

$$\frac{\textit{partes por milhão}}{\textit{tonelada}}$$

Atividade 8

Certo estudo ambiental em uma comunidade urbana indicou que, daqui a t anos, o nível médio de monóxido de carbono no ar será de $Q(t) = 0{,}05t^2 + 0{,}1t + 3{,}4$ partes por milhão.

a) Em que unidade é dada a taxa média de variação do nível médio de monóxido de carbono?

b) Qual será a taxa de variação do nível médio de monóxido de carbono no 3º ano contado a partir de hoje?

c) E no 5º ano?

d) Qual é a taxa de variação média no período de três anos que engloba o 3º, o 4º e o 5º ano?

Atividade 9

Estima-se que, daqui a t anos, a população de uma certa comunidade suburbana será de

$P(t) = 20 - \dfrac{6}{t+1}$ milhares de habitantes.

a) Em que unidade é dada a taxa média de crescimento da população?

b) Qual será a taxa média de crescimento da população durante os 3 primeiros anos?

c) Quanto a população terá crescido no primeiro ano?

d) E no segundo?

e) E no terceiro?

Porcentagem de Variação

Em muitas situações práticas, a taxa de variação de uma grandeza não é tão significativa quanto sua **porcentagem de variação**. A taxa de variação anual de uma parcela de 500 pessoas, numa cidade de 5 milhões de habitantes, por exemplo, representa uma pequena variação em relação à população, enquanto a mesma taxa causaria um enorme impacto numa cidade de 2000 habitantes. A porcentagem de variação compara a taxa de variação de uma quantidade com o valor dessa grandeza:

$$\textit{Porcentagem}\ \text{de variação} = 100\,\frac{\text{taxa de variação de uma grandeza}}{\text{valor dessa grandeza}}$$

Atividade 10

Em que unidade será dada a porcentagem de variação? Argumente por quê.

Atividade 11

Calcula-se que, daqui a x meses, a população de determinada cidade será de $P(x) = 2x + 4\sqrt{x^3} + 5000$ habitantes:

a) Qual será a taxa média de variação da população nos próximos 6 meses?

b) Qual será a porcentagem de variação da população nos próximos 6 meses?

Atividade 12

O produto nacional bruto (PNB) de determinado país cresce a uma taxa constante. Em 1980, o PNB foi de 125 bilhões de dólares e, em 1983, foi de 155 bilhões de dólares.

a) Qual é a taxa de variação do PNB desse país?

b) Qual a porcentagem de variação do PNB em 1985?

Resumindo

Nesta seção exploramos a noção de variável pela interdependência da variação de grandezas.

Vimos como a dinâmica da interdependência entre duas grandezas pode ser representada graficamente ou por meio de tabelas, e vice-versa: como interpretar um gráfico ou tabela para enxergar a forma como duas grandezas estão variando.

Examinamos também dois conceitos que nos permitem ter uma medida do efeito que uma mudança em uma variável tem na outra, ou seja, o quão rápido uma variável dependente muda quando mudamos a variável independente.

Finalmente, ressaltamos que a taxa de variação é uma grandeza obtida pela razão entre duas outras grandezas.

Seção 3

Transposição didática: variação interdependente

Objetivo da seção

Ao final desta seção, você deverá ser capaz de:

• Elaborar atividades que levem seus alunos a observar os diferentes modos pelos quais uma grandeza pode variar em função de outra.

• Elaborar atividades em que seus alunos utilizem diferentes representações da interdependência entre duas grandezas.

• Proporcionar a seus alunos uma apreciação da variedade de unidades de medidas utilizadas em situações reais.

Nesta unidade você examinou a riqueza de formas pelas quais uma grandeza pode depender de outra. No entanto, muitas vezes o contato que os alunos têm com a interdependência entre variáveis é bastante limitado: gráficos apenas de funções lineares, por exemplo.

A variedade de formas segundo as quais uma grandeza pode variar com relação a outra pode ser explorada com alunos bem informalmente, dando-se ênfase à noção intuitiva de movimento, de dinâmica. Na seção 2 procuramos explorar esse aspecto dinâmico das funções, prestando atenção a fatores como a velocidade de crescimento ou decrescimento, à observação de variações em diferentes momentos (valores) da variável independente...

Este trabalho pode ser levado a seus alunos, sempre lembrando que o mais importante é que eles sejam capazes de relacionar aquilo que está representado em gráficos ou tabelas a algo que pode acontecer no mundo real (ou até em uma situação irreal mas bem concreta, como a da atividade 14 a seguir).

Conte a seus alunos "estórias" ou pequenos trechos descrevendo a forma como uma variável muda quando outra muda, e peça a eles para representar essa estória graficamente.

Ou, de modo inverso, forneça a seus alunos gráficos da variação interdependente entre duas variáveis e peça para seus alunos criarem estórias que possam ser representadas por aqueles gráficos.

Atividade 13

Peça para seus alunos examinarem a interdependência entre a distância percorrida por um aluno e o tempo, com um aluno andando pela sala de aula ou pátio, e outros alunos registrando a dinâmica de sua movimentação e a sua posição em diversos momentos.

Antes de fazer a atividade converse com o aluno que vai fazer o movimento, explicando que ele pode variar de forma significativa sua velocidade, pode parar etc.

Os outros alunos devem trabalhar em pequenos grupos nos quais eles dividem as tarefas necessárias para fazer anotações acuradas de tudo o que acontece: variações na velocidade, posição em determinados marcos de tempo (a cada 10 segundos, por exemplo).

Peça para seus alunos observarem:

a) Em que momentos ele andou mais rápido, ou mais devagar?

b) Em algum momento ele parou (intervalo onde a distância permanece a mesma, ou seja, inalterada)?

c) Que distância ele percorreu nos primeiros 10 segundos? E nos próximos 10 segundos?

Após a atividade de coleta de dados pelos grupos de alunos, peça para eles registrarem o que observaram em:

a) um gráfico;

b) uma tabela.

Atividade 14

A situação-problema a seguir é uma fonte de investigação interessante das variações na velocidade de mudança de uma variável. Talvez você já conheça esta estória sob outras formas.

O ideal é que seus alunos tenham uma calculadora para fazer a atividade. Se isso não for possível, forneça a estória e as tabelas já com os valores preenchidos, se você achar que é muita conta para eles fazerem.

A estória:

Um dia aparece em sua escola uma visita um tanto estranha: o dono de uma empresa famosa de computadores. Ele vem propor a você um trabalho.

O mais importante é que, antes de ser aceito para fazer o trabalho, você tem que escolher entre duas formas de pagamento:

a) Um centavo no primeiro dia, dois centavos no segundo dia, dobrando seu salário a cada dia dali para frente durante 30 dias;

b) ou R$1.000.000,00 em um mês de trabalho. (Um milhão de reais em 30 dias!)

Qual das duas formas de pagamento você escolheria? Parece não haver dúvida! Um milhão de reais em comparação a essa estória de centavos...

Mas será que não estamos sendo precipitados?

Vamos investigar essa situação mais a fundo.

Complete esta tabela com o pagamento para a primeira semana de trabalho.

Pagamento conforme a 1a opção – Semana 1		
Dia nº	**Pagamento para aquele dia**	**Pagamento total até aquele dia**
1	1 centavo	1 centavo
2	2 centavos	3 centavos
3	4 centavos	7 centavos
4	8 centavos	15 centavos
5		
6		
7		

Tabela 11

Você trabalharia a semana toda e ganharia ______________________

Não tem jeito de ganhar um milhão de reais neste ritmo, não é? Parece que a proposta de um milhão é imbatível! Vamos ver o que acontece na segunda semana.

Pagamento conforme a 1ª opção – Semana 2		
Dia nº.	**Pagamento para aquele dia**	**Pagamento total até aquele dia**
8	1 real e vinte e oito centavos	2 reais e 55 centavos
9		
10		
11		
12		
13		
14		

É, você ganhou bem mais na segunda semana. Pelo menos passou de 100 reais. Mas ainda há muita diferença entre isso e um milhão de reais!

Vamos ver a próxima semana.

Pagamento conforme a 1a opção – Semana 3		
Dia nº	**Pagamento para aquele dia**	**Pagamento total até aquele dia**
15	R$163,84	R$327,67
16		
17		

18		
19		
20		
21		

Nossa, que dinheirão! Mas ainda muito longe do um milhão de reais. E só faltam 10 dias. É, parece que a proposta de ganhar um milhão é muito melhor, mesmo, como pensamos desde o início!

Pagamento conforme a 1a opção – Semana 4		
Dia nº	**Pagamento para aquele dia**	**Pagamento total até aquele dia**
22	R$20.971,51	R$41.943,03
23		
24		
25		
26		
27		
28		

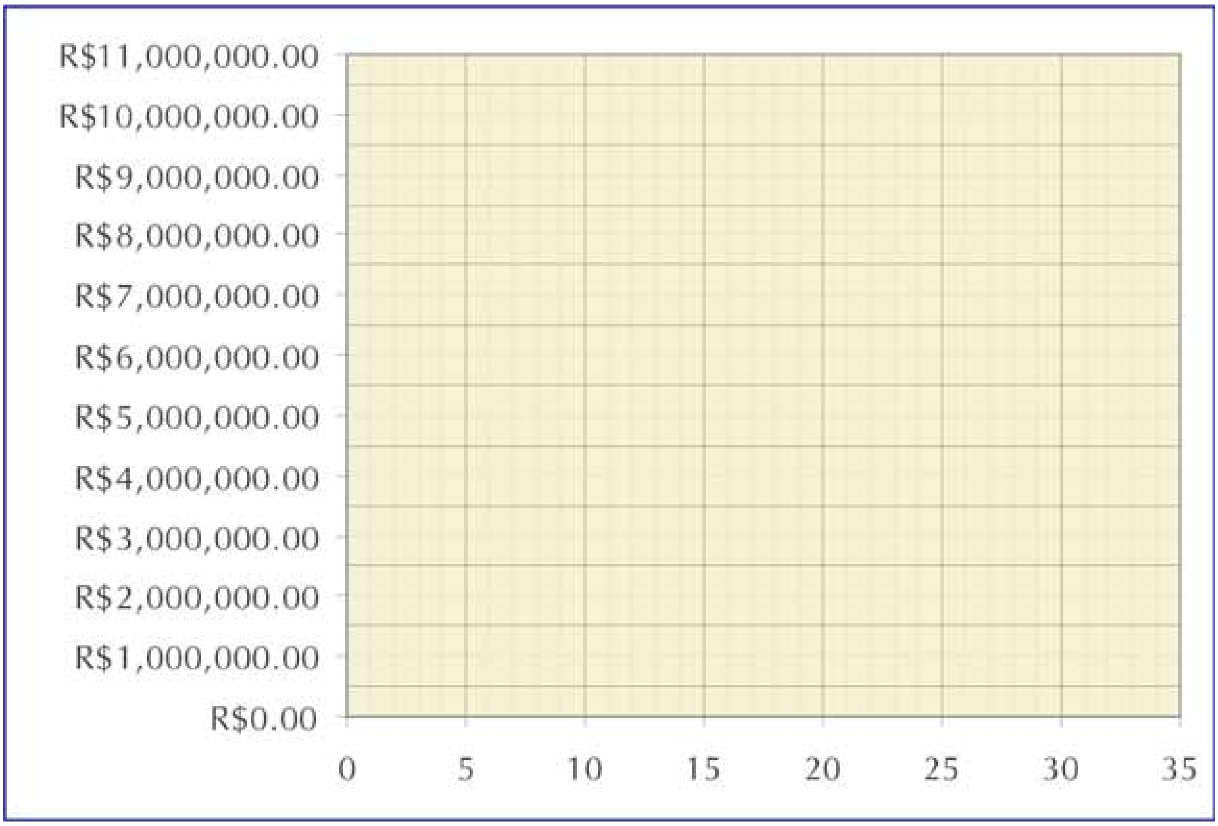
Epa! O que foi que aconteceu? Nós passamos de 21 mil reais para mais de um milhão em apenas 6 dias! Não pode estar certo! Vamos checar as contas. Não, parece que é isso mesmo! O pagamento está aumentando tão rápido agora!

Agora vamos ver qual vai ser o total!

Pagamento conforme a 1a opção – Final		
Dia nº	**Pagamento para aquele dia**	**Pagamento total até aquele dia**
29	R$2.684.354,56	R$5.368.709,11
30		

Em 30 dias o pagamento passou de 1 centavo para mais de 10 milhões de reais!

Represente no plano cartesiano abaixo como a quantidade de reais a ser paga foi mudando de dia para dia:



Observe como o pagamento cresce muito vagarosamente no início, e de repente cresce rapidamente!

Resumindo

Seus alunos podem examinar tipos diferentes de interdependência entre grandezas de maneira informal. É importante que eles vivenciem experiências que lhes permitam construir noções informais a respeito de funções não lineares, como a atividade 14 acima.

Bibliografia

BACHELARD, Gaston. *O nosso espírito científico*. Lisboa: 70. ed. 1986.

HALLETT, Deborah Hughes; GLEASON, Andrew et al. *Cálculo*. v. 1. Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos, 1997.

<http://math.rice.edu/~lanius/pro/rich.html>

<http://www.uol.com.br/cienciahoje/chdia/n331.htm>

KUHN, Thomas S. *A estrutura das revoluções científicas*. São Paulo: Perspectiva, 1975.

PIAGET, Jean. *L' épistémologie Gênetique*. Paris: PUF, 1979.

Texto de referência

O professor de matemática pesquisador

Cristiano Alberto Muniz

Um termo não difícil de encontrarmos nas publicações e nos discursos de educação, e, em especial, de educação matemática, é o de professor pesquisador. Assim, não podemos terminar esse primeiro Módulo de Matemática do GESTAR de 5ª a 8ª séries sem dedicarmos um espaço para discutir essa temática.

Na nossa formação, muitos de nós professores tivemos pouca ou nenhuma oportunidade de contato com a pesquisa, seja participando de trabalhos de pesquisa ou lendo e discutindo sobre a pesquisa em educação matemática. Assim, muitas das vezes, ao ouvirmos falar em «pesquisa» há, para muitos de nós, uma sensação de distância e de inacessibilidade. Aí pode então vir a questão: por que discutirmos sobre a pesquisa na nossa formação continuada? Qual o sentido da pesquisa na aprendizagem da matemática no ensino fundamental? Afinal, a que nos referimos quando falamos de «pesquisa», em especial, de «professor pesquisador»? Isso significa irmos para universidades para realizarmos investigações científicas?

Em função dessas reflexões dedicaremos o texto, antes de mais nada, a situar o termo "pesquisa" no panorama da formação e atuação do professor de Matemática.

A idéia de *professor pesquisador* proposta neste texto, e no projeto do GESTAR, refere-se não à presença do professor na Academia, mas refere-se especificamente à postura crítica e inquietadora do professor de Matemática frente a sua realidade educativa, aquele que busca sempre compreender mais, que questiona sempre o porquê das coisas ou o porquê da não-obtenção de resultados esperados. Pesquisar, nesse contexto, significa, dentre outras possibilidades:

- um olhar mais criterioso e investigativo da prática pedagógica na sala de aula, procurando sempre melhor compreender os fenômenos da aprendizagem;
- leituras sobre temas de interesse ao professor e educador matemático;
- criação de espaços de discussão na comunidade escolar para debater questões que incomodam os professores quanto ao rendimento da aprendizagem matemática;
- realização de pequenas e constantes experimentações, uma constante busca de inovações de suas práticas pedagógicas;
- identificação de situações do contexto sociocultural explorando a presença da matemática em situações mais amplas que as das ditas didáticas;
- registro e catalogação regular de pequenas produções e reflexões, assim como dos planejamentos e trabalhos dos alunos;
- elaboração de tabelas e de gráficos que possibilitem melhor compreender a evolução e a involução dos resultados das avaliações de aprendizagem.

O que deve diferenciar substantivamente a pesquisa científica da pesquisa realizada pelo professor é o rigor do método, o grau de profundidade teórica e metodológica, e, em especial, seu espaço de validação e aplicação.

O significado da pesquisa no contexto da prática pedagógica

O trabalho de pesquisa preconiza antes de mais nada uma compreensão de uma dada realidade para sua transformação. Assim, a pesquisa deve ter um sentido de ação transformadora.

Já, numa primeira perspectiva, o fato de buscar compreender uma realidade, no nosso contexto, o fenômeno da aprendizagem da matemática e do seu ensino, significa uma transformação que implica novas formas de conceber o fenômeno educativo. Longe de ser uma transformação insignificante, uma nova compreensão do fenômeno de aprendizagem matemática pode ser um passo significativo para transformações da prática pedagógica.

Essa transformação requer, segundo Khun (1975), Bachelard (1986) ou Piaget (1979), rupturas com conceitos já cristalizados e que definem as ações de um sujeito ou de um grupo social nas suas posturas e ações diante da realidade. Nesse sentido, a construção de conceitos e a produção de novos conhecimentos significa a ruptura de obstáculos epistemológicos[1] .

Se por um lado aprender para o aluno deve significar romper com conceitos antigos, impregnados na ação e no pensamento, requerendo um esforço na mudança de paradigmas na forma de conceber a realidade e agir sobre ela, por outro lado o aprender para o professor, na mesma base teórica, significa também um rompimento com conceitos cristalizados sobre sua prática profissional e seu papel social, e não menos, significa um esforço cognitivo de revisão de conceitos e procedimentos. Da mesma forma que para os alunos, na aprendizagem o professor vai se deparar com "obstáculos epistemológicos", elemento constitutivo do processo da aprendizagem. Esses obstáculos não podem ser vistos como empecilhos à aprendizagem, e tampouco podemos pensar em removê-los: devemos nos apoiar sobre estes para construir o processo de aprendizagem e conseqüente mudança da realidade.

A necessidade de renovação de seus paradigmas e suas práticas

A essa altura, podemos nos perguntar: Mudar? Mudar para quê? Para quem? Em que direção? As respostas para essas questões podem justificar a necessidade do nosso engajamento ao processo de aprendizagem via pesquisa.

A pesquisa enquanto uma postura crítica e investigativa do professor diante do currículo e da sua prática pedagógica é, ao nosso ver, o espaço mais legítimo de aprendizagem e de formação continuada do professor. Nesse sentido, a proposta de matemática do GESTAR busca, por meio dos três eixos, ***conhecimentos matemáticos, conhecimentos de educação matemática e transposição didática***, oportunizar ao professor par-

1 O obstáculo epistemológico, termo proposto por Bachelard, caracteriza o desenvolvimento do conhecimento, seja por um sujeito ou por um grupo social, em que os conceitos prévios dificultam a construção de novos. Longe de ser um fator negativo ao desenvolvimento humano e cultural, os obstáculos apresentam-se como chaves propulsoras do esforço cognitivo no avanço científico e tecnológico. Compreender esses obstáculos requer o entendimento de mudanças de paradigmas, permitindo visualizar o processo evolutivo do conhecimento ao longo da história da civilização e nas diversas culturas humanas.

ticipante engajar-se num trabalho e numa postura voltados à pesquisa, possibilitando a construção de aprendizagens significativas para a formação e atuação competente. É num novo olhar para seus alunos e processos de aprendizagens que esperamos garantir uma permanente reelaboração teórica e prática do professor, na busca de um ensino de Matemática mais adequado às necessidades dos nossos alunos e às exigências da sociedade presente e da sociedade futura.

Buscamos nas palavras de Floriani[2], em sua obra *Professor e Pesquisador,* uma argumentação sobre a permanente necessidade do professor em agir no sentido de mudança dessa realidade, e, em conseqüência, a necessidade de um permanente engajamento do professor ao trabalho de pesquisa.

> "Uma sociedade dependente, que pretenda transformar sua estrutura interna tornando-a de forma eficaz democraticamente participativa, exige inovações em todo o seu sistema de ensino, em seus aspectos globais científico-didático-pedagógicos. Professores, que se pretendam críticos visam as metas educacionais libertadoras de sua Sociedade. Alunos, de qualquer camada, não se desejam vítimas da incompreensão histórica da geração adulta. O abandono da prática pedagógica rotineira impõe-se a todos, porque, no fundo, todos trabalham a favor de, ou então contra, a transformação utópica da própria sociedade" (1994, p. 126).

Nesse sentido, devemos conceber a idéia do professor pesquisador como um importante agente de transformação social, precursor e difusor de visões críticas e articulador de projetos de mudanças em sua comunidade educativa. O professor é pesquisador, em nossa concepção, quando reflete, questiona e propõe ações transformadoras, não tendo uma postura passiva diante dos problemas relacionados aos impedimentos de desenvolvimento humano na escola ou fora dela.

A sustentação da prática e do discurso numa base teórica em educação matemática

Floriani advoga em sua obra (1994) a necessidade de o professor procurar ao longo de sua atuação profissional construir uma base teórica no campo da educação matemática[3]. Esse embasamento, construído ao longo dos anos, com leituras e debates com seus pares, sempre atrelado à sua prática, implica um trabalho de pesquisa bibliográfica muitas das vezes dificílima para professores que se encontram em determinadas regiões brasileiras sem acesso aos materiais bibliográficos tais como livros, revistas especializadas, periódicos etc.

Os textos de referência do programa do GESTAR têm também essa função: a de levar ao professor participante a reflexão teórica no campo da educação matemática, conjuntamente com os pequenos textos introduzidos ao longo dos cadernos de teoria e prática.

2 Educador matemático e pesquisador da FURB, em Blumenau, grande contribuidor para o desenvolvimento da educação matemática no Brasil.

3 Considerando que a educação matemática enquanto área de conhecimento é multi e interdisciplinar, envolvendo áreas como Matemática, Sociologia, Antropologia, Psicologia (sobretudo a Psicologia Cognitiva, Pedagogia/Didática, dentre outras)

Algumas das justificativas para uma base teórica na formação e atuação do professor de matemática são:

• Um melhor posicionamento político e pedagógico diante de suas opções metodológicas.

• Maior poder de argumentação sobre sua prática na comunidade educacional.

• Uma visão mais cristalina sobre os processos que constituem a aprendizagem matemática e de desenvolvimento humano.

• Não limitar-se à reprodução de técnicas didáticas.

• Produzir com mais segurança alternativas para superação das dificuldades ligadas à aprendizagem matemática.

• Encorajar-se a realizar pequenas experiências pedagógicas buscando construir propostas mais condizentes às suas realidades locais e respondendo aos desafios.

• Registrar suas experiências e resultados, levando ao conhecimento de outros professores e educadores, discutindo e trocando conhecimento, e, sempre que possível, buscando participar de eventos de cunho educativo e/ou científico local, regional ou nacional, divulgando suas experiências.

• Animar-se a sempre estar lendo, refletindo, buscando sua formação continuada com leituras que dizem respeito, direta ou indiretamente, à educação matemática[4].

• Colocar-se como agente de produção de conhecimento na comunidade educacional.

• Coletar permanentemente dados ligados ao conhecimento matemático que possam ser de interesse dos alunos, que venham a servir para o planejamento pedagógico.

• Conscientizar-se de que muitas das dificuldades enfrentadas são na verdade desafios próprios do ensino e que existem educadores que se dedicam, junto com os professores em sala de aula, a encontrar soluções plausíveis para esses desafios.

A seleção da situação e sua oferta como um espaço de pesquisa inevitável

Se, conforme a proposta de matemática do GESTAR, a aprendizagem matemática depende fortemente da proposição de situação-problema adequada aos alunos, uma das principais competências do professor de Matemática acaba por se constituir na busca dessas situações a serem propostas aos seus alunos. Essa busca da situação é sem sombra de dúvida um trabalho de investigação matemática que requer do professor um alargamento de seu olhar para o conteúdo matemático e sua função social que amplia em muito o espaço pedagógico e escolar.

4 A Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) oferece aos professores filiados um vasto material sobre a aprendizagem e o ensino da Matemática nos diferentes níveis de ensino. Tais publicações são um real canal de acesso do professor à produção científica na área. Em sua grande maioria o material é produzido visando dar conhecimento ao professor dos produtos da pesquisa em educação matemática, numa linguagem acessível a todos. Para ter acesso e/ou filiar-se, basta localizar a sede regional da SBEM, ou acessar a Diretoria Nacional através da Internet www.sbem.com.br . A SBEM em nível regional ou nacional promove encontros periódicos de professores de Matemática importantes para nossa formação continuada.

Uma perspectiva importante da pesquisa é a investigação da matemática em diferentes contextos, requerendo do professor:

• Identificar os conteúdos matemáticos em situações socioculturais de significado para o aluno. Isso requer um «olhar» diferente para o espaço fora da escola, necessitando que o professor tenha a capacidade de identificar conceitos matemáticos em situações do cotidiano, sobretudo nas situações presentes na vida do aluno. Como nossa formação nos habilita sobretudo a trabalhar encarcerados em situações didáticas (para tratar dos problemas clássicos presentes nos livros didáticos) uma nova postura em relação ao conhecimento matemático é requerida para essa identificação, constituindo assim um excelente exercício intelectual e alargamento de nossa concepção acerca do conhecimento matemático.

• Elaborar uma proposta de transposição da situação real para uma situação didática[5], lembrando que, muitas das vezes, as situações reais, sobretudo no que se refere à matemática, encontram-se em um grau de complexidade nem sempre adequado ao nível de desenvolvimento dos alunos. Essa transposição requer um trabalho do professor que implica, de certa maneira, um trabalho investigativo de encontrar a melhor forma de apresentar a situação de forma adequada aos objetivos educacionais e ao nível dos alunos, sem, no entanto, desconfigurar a situação da sua forma original.

• A organização do espaço de aprendizagem a partir da situação, procurando tanto motivar os alunos para buscarem resolver a situação-problema quanto colocar-se como mediador pedagógico das produções matemáticas, o que implica inclusive disponibilizar instrumentos necessários e prever as orientações para o engajamento dos alunos no processo de produção de uma solução. Essa previsibilidade do processo requer um conhecimento prévio do professor sobre as possíveis estratégias dos alunos assim como o levantamento de hipóteses acerca dos procedimentos a serem desenvolvidos e conseqüentes instrumentos que serão requeridos no processo. Tudo isso implica uma interpretação prévia sobre o processo que será disparado em sala de aula que requer do professor uma reflexão crítica aliada ao levantamento de questões pertinentes aos procedimentos futuros a serem apresentados pelos alunos. Aí cabe sempre uma margem de erro e uma forte disponibilidade do professor em adaptar-se a procedimentos apresentados e não previstos com antecedência.

Esse conjunto de fatores mostra bem como a identificação e oferta da situação-problema aos alunos visando à aprendizagem matemática requer uma postura de investigação e produção de conhecimento matemático, lançando o professor num processo permanente de alargamento de sua visão da matemática sobre os mais diferentes contextos e requerendo um eterno "aprender" do próprio professor. Essa perspectiva da necessidade de estar sempre aprendendo lança o professor à investigação sobre a matemática em contextos reais e sua transposição didática que é parte da pesquisa em didática – componente importante das competências do professor de Matemática – que somente uma postura de pesquisador pode dar conta.

Mas não é só, o acompanhamento das produções dos alunos nas situações-problema exige também uma posição de investigação do professor frente ao processo de produção de conhecimento por parte do aluno.

---

5 Transposição didática e situação didática foram temas explorados em textos de referência anteriores. Caso não se lembre bem ou tenha alguma dúvida, volte aos textos anteriores e revisite seus principais pontos.

A resolução de situação-problema como um espaço de pesquisa matemática para aluno e para professor engajados no processo

Se concebemos, como vimos nos textos anteriores, que resolver uma situação-problema em matemática, mais do que encontrar um valor numérico, significa a produção de um procedimento, de um algoritmo, ou seja, o estabelecimento de um processo de pensamento lógico validado na própria situação, podemos então compreender em que sentido e medida a resolução da situação-problema requer uma postura investigativa por parte do professor.

Os processos de resolução, nesse sentido, não são únicos, exigindo do professor um permanante "desarmar-se", uma vez que, a cada momento, a cada turma, a cada grupo de alunos, devemos estar prontos a identificar novas formas de resolução da situação, cabendo ao professor institucionalizar/validar frente ao grupo maior as estratégias apresentadas.

Essa postura de estimular e socializar diferentes maneiras de resolver uma mesma situação leva por certo a uma nova concepção acerca do saber matemático, permitindo ao professor uma revisão sobre sua visão em relação à produção do conhecimento matemático.

A observação e compreensão da produção matemática do aluno: a investigação pedagógica como parte essencial do trabalho do professor de matemática

Para tanto, ou seja, para que haja o reconhecimento de diferentes procedimentos de resolução da situação-problema, é inicialmente necessário que o professor, enquanto matemático e educador, compreenda as estratégias dos alunos no desenvolvimento do procedimento de resolução. Um espaço importante dessa compreensão é a identificação e o entendimento das causas dos erros cometidos pelos alunos. Tais competências exigidas do professor implicam princípios que o levam a uma postura de professor-pesquisador, tais como:

• Estar sempre "desarmado" e pronto a ouvir, identificar, reconhecer novas formas de resolução.

• Criar um espaço psicológico de confiança por parte dos alunos, fazendo que se sintam encorajados a revelar suas estratégias.

• Acolher cognitivamente o aluno, ou seja, demonstrar a ele uma prontidação em respeitar sua forma própria de pensar, mesmo que, inicialmente, isso não gere uma resposta adequada à situação.

• Contribuir para o registro do procedimento, uma vez que os processos de resolução são, num primeiro instante, representações mentais, para, num segundo momento, aparecerem na forma de registro escrito. Lembrar que produzir mentalmente uma solução e registrar o processo no papel são competências diferenciadas em termos cognitivos.

• Compreender os motivos dos «erros» produzidos pelos alunos no processo, procurando não camuflá-los nem simplesmente eliminá-los do processo de produção de conhecimento. É importante que saibamos valorizar esses erros como estruturas pilares da construção do conhecimento tanto para o aluno como para o professor. Muitas das vezes é por erros que podemos compreender como o aluno está pensando em dada circunstância, e não apenas pelos acertos. O mesmo é verdadeiro para os alunos, uma vez que um aluno poderá melhor compreender seus próprios procedimentos quando observados os erros cometidos por um ou mais colegas. Isso requer uma posição investigativa permanente do professor aproximando-o do trabalho do pesquisador matemático e pesquisador pedagogo.

• Tabular os erros mais freqüentes apresentados em determinadas situações. A observação desses erros poderá ajudar o professor a melhor compreender onde estão as dificuldades no processo de produção do conhecimento matemático que se dá de forma privilegiada na relação professor-aluno. Isso deve significar que na maior parte das vezes as dificuldades não estão alocadas nem no aluno nem no professor, mas na natureza da relação construída entre ambos tendo o conteúdo matemático como instrumento de mediação.

• Constituir a sala de aula como um espaço de "comunidade de investigação[6]", cabendo ao professor orquestrar todo um espaço de troca entre os alunos, de confronto de diferentes processos, de validação, de argumetação oral e escrita, e, sobretudo, de prova e de demonstração. Esse é um papel importante do professor no desenvolvimento do processo argumentativo dos alunos, fazendo que cada um se sinta como se fosse um «matemático» a validar diante do grupo suas estratégias e conceitos. O professor aí coloca-se como representante da comunidade de matemáticos, questionando e instigando o grupo no processo de validação. A forma como o professor concebe o "fazer matemático" determina sua postura diante do grupo, sendo o portador de representação social do saber matemático.

A avaliação da aprendizagem matemática como um espaço investigativo

A avaliação é um tema desafiante para todo e qualquer educador, e em especial para o educador matemático, uma vez que o conhecimento matemático diz respeito a estruturas mentais:

• Aprender matemática é desenvolver conceitos e estruturas de pensamento.

• Ensinar é favorecer o desenvolvimento de objetos e ferramentas mentais que vêm a integrar as estruturas de pensamento e de ação do aluno.

• Avaliar é buscar identificar o desenvolvimento dessas estruturas internas do pensamento dos alunos, o que só é possível a partir das ações exteriorizadas pelos alunos.

6 Termo utilizado no espaço da "Filosofia na Escola".

Isso revela que avaliar a aprendizagem matemática, como discutimos em texto anterior, "Avaliação e Educação Matemática", possui um forte grau de interpretação por parte do professor: observando as produções exteriorizadas pelo aluno julgamos o seu nível de desenvolvimento, suas capacidades em «fazer matemática» e as habilidades e competências ainda a serem trabalhadas.

O processo de avaliação nesse contexto é integrado a um trabalho de investigação dos processos de pensamento. O trabalho do professor no que se refere à avaliação deve favorecer cada vez mais maior capacidade de análise das capacidades matemáticas dos alunos.

A pesquisa na formação do professor de matemática: um elemento importante na constituição do conjunto de suas competências

Postura de pesquisa – espírito investigativo, questionador e de estudo - é critério importante no professor. Este não pode abdicar da idéia de uma formação continuada, e essa formação deve ter o espaço da sala de aula como o melhor locus de aprendizagem para o professor e para sua formação permanente.

Mas é por intermédio de uma relação mais questionadora e investigativa do professor nesse espaço da sala de aula que se poderá permitir a este se colocar como um aprendente, procurando novos questionamentos sobre sua prática e novas respostas para o mesmo.

Educação Matemática como campo de prática pedagógica e como área de conhecimento e de pesquisa

Finalmente, gostaríamos de colocar que é diante dos desafios aqui expostos na formação de um professor-pesquisador, visando responder aos grandes desafios da aprendizagem matemática, que a educação matemática se constitui como área de conhecimento humano que busca na *pesquisa* maior compreensão do fenômeno da aprendizagem matemática e do seu ensino, e com o professor, maior sustentação teórica e pragmática na busca da superação das dificuldades encontradas pelo professor em sala de aula. Para que a pesquisa científica nesse campo seja disseminada junto ao corpo docente, é importante que o próprio professor incorpore em sua atuação profissional o espírito da pesquisa, não se transformando em «consumidor» de teorias sem maior significado.

É importante que, ao elaborar hipóteses acerca dos fenômenos presentes no seu trabalho pedagógico, o professor teorize sobre sua realidade, buscando suportes para sua interpretação e atuação, no sentido de uma atuação mais competente e de qualidade. Assim, o professor não pode ser visto como apenas objeto da pesquisa científica, mas como participante ativo da mesma, dando cada um sua contribuição, concebendo sua sala de aula como um espaço de investigação e de questionamento.

Tanto pesquisa em educação como o próprio ensino não podem ser vistos como ações isoladas. Somente com a integração entre os dois poderemos conceber a idéia de uma educação matemática mais humana e democrática. A gestão da aprendizagem matemática não pode prescindir do espírito crítico, questionador e investigativo, características próprias da pesquisa.

Atividades

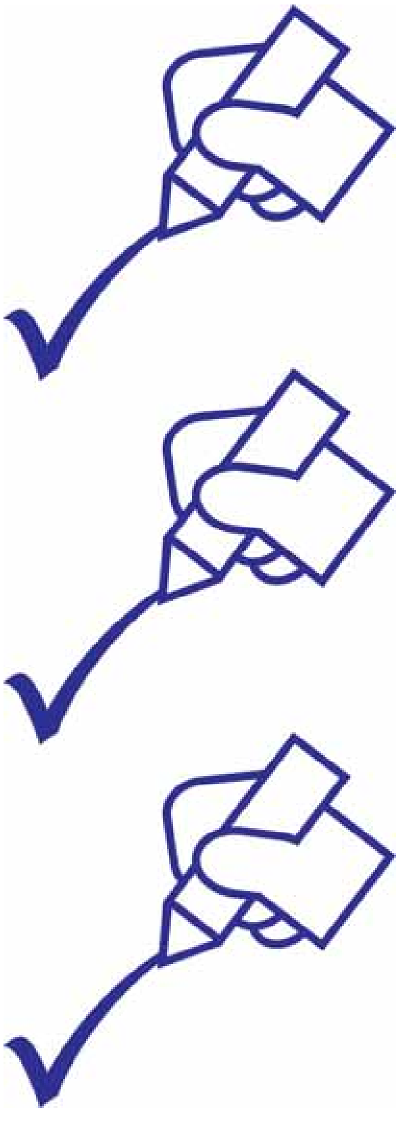
a) Em que sentido o seu trabalho pedagógico exige de você uma postura crítica e questionadora?

b) Escreva três atividades que você vai incorporar às suas práticas profissionais enquanto professor de matemática, que farão que você se aproxime mais da atividade e da postura de pesquisa.

c) Faça um levantamento junto aos colegas sobre revistas, periódicos e livros que eles possuem sobre temas em educação matemática e sugira uma forma de permuta entre vocês para ampliar as leituras. De que forma a equipe pode se organizar para debater suas leituras e experiências?

d) Faça um levantamento de novos conceitos de educação matemática presentes neste primeiro módulo do Gestar, e procure escrever sobre seus significados na sua formação e sua atuação pedagógica.

Solução das atividades



Solução das atividades

Atividade 1

a)

Crescimento das árvores (toneladas/ano)	1	1,25	1,56	1,95	2,44	3,05
Quantidade de CO_2 exposto (toneladas)	1	2	4	8	16	32

b) A tabela acima mostra que não há proporcionalidade entre a quantidade de carbono a que as árvores estão expostas e sua velocidade de crescimento.

Atividade 2

Supusemos que a floresta fixa nas árvores 1,2 tonelada de carbono por hectare a cada ano. Então, a cada ano, a quantidade de carbono fixada aumenta 1,2 tonelada. Lembra-se da discussão sobre taxa de variação na Unidade 8 do TP2? A taxa de variação da quantidade de carbono fixada em função do tempo é constante (1,2 tonelada por hectare por ano), então o gráfico será uma reta.

Você poderia também ter suposto uma quantidade inicial para a quantidade de carbono fixada e ir acrescentando, a cada ano, 1,2 tonelada por hectare. O gráfico também se tornaria uma reta.

Atividade 3

1) ii

2) iii

3) i

Atividade 4

a) tabela 6

b) tabela 5

c) tabela 4

Atividade 5

a) tabela 7

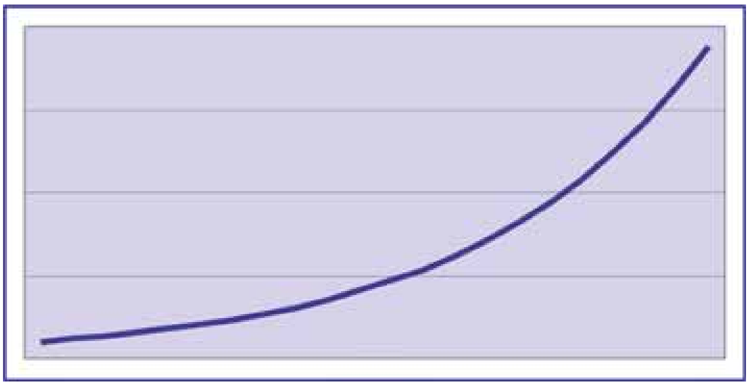
b) tabela 9

c) tabela 8

Atividade 6

1a, 2c, 3b

Atividade 7



Atividade 8

a) $\dfrac{\textit{partes por milhão}}{\textit{ano}}$

b) Calcule o nível médio de carbono no começo do 3º ano (t=2) e no fim do 3º ano (t=3), e veja qual foi a variação neste ano. Depois divida pela variação na variável independente, o tempo (1 ano).

$$\frac{4,15 - 3,8}{1} = 0,35 \frac{\textit{partes por milhão}}{\textit{ano}}$$

c) $\dfrac{5,15 - 4,6}{1} = 0,55 \dfrac{\textit{partes por milhão}}{\textit{ano}}$

d) O período que engloba o 3º, 4º, e 5º anos vai de t=2 a t=5. O nível de carbono vai variar de 3,8 a 5,15. Já a variável independente, o tempo, vai variar 3 anos. A taxa então será:

$$\frac{5,15 - 3,8}{3} = \frac{1,35}{3} = 0,45 \frac{\textit{partes por milhão}}{\textit{ano}}$$

Atividade 9

a) $\dfrac{\textit{milhares de habitantes}}{\textit{ano}}$

b) Hoje (t=0) a população é de 14 milhares de habitantes, e daqui a 3 anos (t=3) será de 18,5 milhares de habitantes. A população cresceu então 18, 5 – 14 = 4,5 milhares de habitantes em 3 anos. A taxa média será:

$$\frac{4{,}5}{3} = 1{,}5 \frac{milhares\ de\ habitantes}{ano}$$

c) No primeiro ano a população cresceu de 14 a 17 milhares de habitantes. Ou seja, cresceu 3 milhares de habitantes.

d) No segundo ano a população cresceu de 17 a 18 milhares de habitantes. Ou seja, cresceu 1 milhar de habitantes.

e) No terceiro ano a população cresceu de 18 a 18,5 milhares de habitantes. Ou seja, cresceu 0,5 milhar de habitantes.

Atividade 10

Será em $\dfrac{\%}{unidade\ da\ variável\ independente}$

Porque?

$$\text{unidade de 100 } \frac{\text{taxa de variação de uma grandeza}}{\text{valor dessa grandeza}} = \frac{\text{unidade taxa de variação}}{\text{unidade da grandeza (variável dependente)}}$$

$$\frac{unidade\ variável\ dependente}{unidade\ variável\ independente} \times \frac{1}{unidade\ variável\ dependente} = \frac{1}{unidade\ variável\ independente}$$

Atividade 11

a) A população hoje (t=0) é de 5000 habitantes. Daqui a 6 meses, será de (t=6) 5070,8 habitantes. A variação foi de 70,8 habitantes em 6 meses, então, a taxa média é de

$$\frac{70{,}8}{6} = 11{,}8 \frac{habitantes}{mês}$$

b) $\dfrac{11{,}8}{5000} \times 100 = 0{,}236\%$ ao mês.

Atividade 12

a) O crescimento em 3 anos foi de 30 bilhões de dólares, então a taxa é de 10 bilhões de dólares ao ano.

b) A cada ano o PNB cresce 10 bilhões de dólares, pois a taxa de crescimento é constante.

ano	1983	1984	1985
PNB (bilhões de US$)	155	165	175

Durante o ano de 1985 o PNB variou 10 bilhões de dólares, o que equivale a 6,06% de 165 bilhões de dólares. Ou seja, a porcentagem de variação foi de 6,06% ao ano.

PARTE II

TEORIA E PRÁTICA 3

Socializando o seu conhecimento e experiências de sala de aula

Socializando o seu conhecimento e experiências de sala de aula – unidade 10

Do mesmo modo que ocorreu em unidades anteriores, esta parte consta de três itens: 1) rever e sintetizar por escrito as principais idéias tratadas na unidade; 2) refletir sobre os desafios propostos na Transposição Didática, registrando-os por escrito; e 3) elaborar uma produção escrita acompanhando produções dos seus alunos.

Veja a seguir as tarefas que você deve realizar.

Tarefa 1

Faça uma síntese por escrito dos principais conceitos geométricos trabalhados na unidade, documento para seu uso pessoal durante a oficina.

Tarefa 2

Refletindo sobre a Transposição Didática desenvolvida junto aos seus alunos, sobre os tópicos desta unidade, você deve destacar, por escrito: a) o ponto que você considerou mais interessante na realização da transposição e b) duas das maiores dificuldades na realização do trabalho da proposta de transposição com seus alunos. Esse documento será um apoio seu para participação na oficina no que se refere à parte concernente à Transposição Didática.

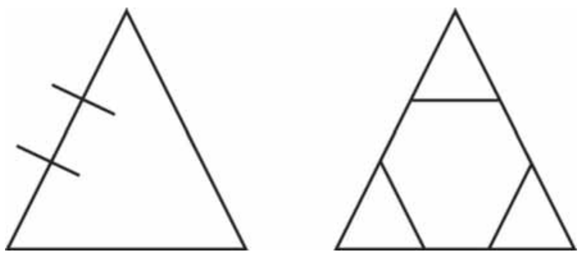
Tarefa 3

a) Aplique aos alunos a seguinte atividade relacionada ao octaedro regular, ao octaedro truncado e a preenchimento do espaço.

Inicialmente, cada um deve montar um octaedro regular, conforme modelo em anexo no final da unidade. Faça-os observarem que é um *balãozinho* formado por 8 triângulos idênticos.

Os alunos devem procurar juntar seus octaedros regulares e ver se, com eles, conseguem preencher certa porção de espaço, sem deixar vazios entre eles (o que será impossível).

Em seguida, devem medir as arestas desse octaedro, marcar um terço dessa medida a partir dos vértices e fazer traços horizontais ligando esses pontos, em toda as faces.



Com uma tesourinha, devem cortar em todos esses traços. Com isso, estarão retirando as “pontas” do octaedro, ou seja, estarão retirando 6 pirâmides da base quadrada.

O sólido que sobra ficará com 8 faces em forma de hexágono e 6 faces quadradas faltando (se fosse cortado em molde de massa, não estariam faltando). Se os alunos quiserem, poderão tampá-las com fita adesiva. O sólido obtido é um *tetradecaedro* (14 faces). No entanto, esse sólido é chamado de *octaedro truncado*, por ser obtido de cortes ou truncamentos no octaedro regular.

O mais importante, agora, é tentarem juntar os octaedros truncados. Verão que é possível, com eles, preencher o espaço.

Observação: Embora, no Anexo, conste um molde do octaedro truncado, não se recomenda seu uso nesta atividade, que é mais rica e permite aos alunos perceberem relações entre o octaedro regular e o octaedro truncado (um tetradecaedro). O professor pode fazer notarem que, no primeiro, todas as faces são polígonos regulares idênticos e os ângulos dos vértices também são idênticos (sólidos platônico). No segundo, todas as faces são polígonos regulares, mas não são idênticas, e os ângulos dos vértices são todos idênticos (sólido arquimediano).

b) Organize, registre e catalogue em uma caixa as produções mais significativas de alguns de seus alunos, obtidas na atividade.

c) Escreva aproximadamente 10 linhas sobre a importância dessa atividade para a aprendizagem matemática de seus alunos; comente fatos ocorridos em sala e outros observados na produção dos alunos.

Ao final da oficina, entregue ao seu Formador o material dos itens b) e c).

Socializando o seu conhecimento e experiências de sala de aula – unidade 12

Este momento final tem por objetivo: 1) rever e sintetizar por escrito as principais idéias tratadas na unidade; 2) refletir sobre os desafios propostos na transposição didática, registrando-as por escrito, e 3) elaborar uma produção escrita a ser entregue ao Formador na próxima oficina, contendo produções dos seus alunos.

Para tanto, três tarefas devem ser preparadas para serem levadas à oficina e socializadas entre os colegas:

Tarefa 1

Uma síntese por escrito dos principais conceitos matemáticos trabalhados na unidade. Esse documento será destinado a seu uso pessoal durante a oficina.

Tarefa 2

Uma listagem contendo: a) o ponto mais interessante, e b) duas das maiores dificuldades na realização do trabalho da proposta de transposição com seus alunos. Esse documento será um apoio seu para discussão da transposição didática na oficina. Essa lista é de seu uso pessoal para servir de apoio na socialização das experiências realizadas.

Tarefa 3

Esta tarefa é composta por três produções:

a) Aplique aos alunos a atividade 13. Você pode fazer as adaptações que julgar necessárias para o bom êxito da atividade atendendo às necessidades do grupo.

b) Organize, registre e catalogue em uma pasta (ou coisa similar) as produções mais significativas de alguns de seus alunos.

c) Escreva aproximadamente 10 linhas sobre a importância desta atividade para a aprendizagem matemática de seus alunos; comente fatos ocorridos em sala de aula e outros observados na produção dos alunos. **Esse material deve ser entregue ao seu Formador ao final da oficina.**

PARTE III

TEORIA E PRÁTICA 3

SESSÃO COLETIVA

Sessão Coletiva 5
Unidade 9

A Unidade 9 introduziu, por meio de uma situação-problema, a noção de figuras não contidas em um plano, fazendo uma separação inicial em figuras formadas apenas por superfícies planas (nas quais se inserem os poliedros) e as formadas por superfícies não todas planas (que chamaremos de superfícies ou corpos curvos). Dentre os poliedros foram destacados os prismas, mencionadas as pirâmides e enfatizada a existência de poliedros que não são prismas nem pirâmides.

Para recordar esses fatos, comece fazendo em duplas algumas atividades.

Parte A

Atividade 1 – em duplas

a) Lembra-se da caracterização de poliedro? Veja:

- é a reunião de um número finito de polígonos;

- dois polígonos distintos ou têm um lado comum ou têm intersecção vazia;

- cada lado de um polígono une exatamente dois polígonos; nenhum lado tem alguma parte livre;

- dois polígonos unidos por uma aresta não são coplanares.

A tarefa que você e seu colega devem fazer é criar um poliedro bem diferente dos usuais. Para isso, corte alguns polígonos distintos entre si, de cartolina. Vá juntando os polígonos dois a dois, com pedacinhos de durex, (os lados devem ter mesmo tamanho, se precisar, diminua o lado de alguns para ir dando certo). Vá colando mais e mais polígonos até perceber que basta mais um para fechar a figura. Recorte um desse tamanho e complete o poliedro. Veja se ele satisfaz todas as condições para ser poliedro.

b) Agora a tarefa é criar um prisma. Lembre-se: ele tem que ter duas faces idênticas, que são polígonos.

- Comece cortando dois polígonos iguais, em isopor fino ou papelão. Nada de polígonos muito padronizados. Procure fazer um que não tenha os lados e ângulos iguais. Mas lembre-se: se fizer com muitos lados, o trabalho será maior.

- Conte quantos lados (ou vértices) cada polígono tem, e pegue o mesmo número de canudos plásticos (podem ser pedaços de canudos, cortados todos iguais).

- Primeiro pegue um só polígono e os canudos, e, com linha e agulha, vá prendendo com alguns pontos cada canudo em um vértice do polígono. Terminando um vértice, vá para o próximo, sem cortar a linha.

- Quando todos os canudos estiverem pendurados no polígono, pegue o segundo polígono, e ponha em posição correspondente ao de cima. Cuidado para não inverter o inferior. Agora costure os canudos nos vértices do segundo polígono.

A figura obtida não é rígida. Você pode manipulá-la.

b_1) Com a mão, segure os canudos de modo que fiquem perpendiculares aos dois polígonos. Nesse caso, aparecerão retângulos laterais, formados pelos canudos e pelas arestas correspondentes dos dois polígonos iniciais. Se você recortasse em cartolina e colasse retângulos entre dois canudos, teria as faces de um poliedro. Esse poliedro é um *prisma reto*. Os dois polígonos iniciais são chamados bases do prisma. Compare com a caracterização de prisma dada nesta Unidade, na Atividade 3, item a. Você concorda que a figura que você construiu satisfaz aquelas condições?

Repare que você pode tombar sua figura sobre qualquer retângulo e ele continua sendo prisma.

b_2) Volte à posição dos canudos verticais e perpendiculares ao plano das bases, com uma das bases apoiada sobre um plano horizontal. Sem torcer os canudos, deslise a base inferior para uma posição mais lateral, deixando a superior onde está. Que forma terão as faces laterais? Você concorda que essa figura deformada ainda satisfaz aquelas condições para ser prisma, desde que tivesse as faces? Será um prisma reto?

b_3) Volte à posição dos canudos verticais e perpendiculares ao plano das bases, com uma das bases apoiada sobre um plano horizontal. Agora gire uma das bases, sem tirá-la do plano onde está. Os canudos ficam torcidos, concorda? Será que, preenchendo as faces, a figura ainda é um prisma? Ou um poliedro?

Atividade 2 – em duplas

Olhe no TP 3 a ilustração da Atividade 2 da seção 1, Unidade 9.

a) Observe as figuras que você assinalou como poliedros e a justificativa dada. Compare com as assinalados pelo seu colega e veja se houve concordância. Se houve divergência, discutam suas opiniões.

b) O que se pode dizer sobre as faces de um poliedro qualquer?

c) Dentre os poliedros que você identificou na ilustração, procure aqueles que são *Prismas*.

d) Em todos os poliedros que você identificou como prismas, localize as bases (ou a base visível). Discuta com seu colega.

Discussão coletiva

Discutir sobre as dificuldades apresentadas no estudo e Atividades da Unidade 9, do TP 3, principalmente quanto a:

- elaboração do esboço e da maquete da piscina;

- compreensão dos conceitos de poliedros, corpos curvos (todos que tem alguma superfície curva), prismas, decomposição de um poliedro em prismas (quando possível);

- compreensão dos cálculos de volumes e de áreas;

- outros itens.

Parte B
Transposição Didática

Leiam em conjunto:

Um dos conteúdos trabalhado nesta unidade foi:

"Distinção, em contextos variados, de figuras bidimensionais e tridimensionais, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclatura própria."

Vamos montar uma figura muito diferente e interessante, chamada *caleidociclo,* desenvolvida pelo artista gráfico Escher, sobre o qual falaremos mais na próxima Unidade. Ela servirá de exemplo para ilustrar a questão da dimensão de figuras.

Atividade 3

a) Veja o modelo no anexo A. Recorte o retângulo. Meça e anote suas dimensões (você precisará depois). Em seguida, pode começar pela pintura:

- Figuras com mesmos números devem ser pintadas da mesma cor. Escolha uma sucessão harmoniosa para as cores 1, 2, 3, 4 e 5 (tipo uma faixa do arco-íris).

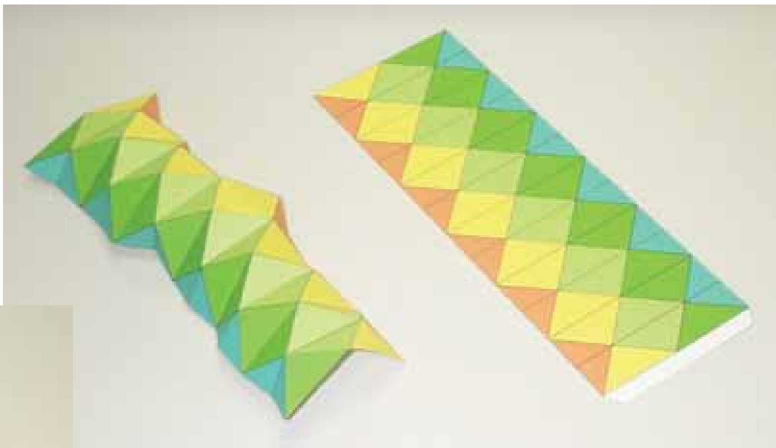
- Vinque fortemente o papel em todas as diagonais e em todas as verticais, nos dois sentidos (para dentro e para fora). Faça isso duas vezes em cada sentido.

- Cole AB com CD pela aba, formando um cilindro.

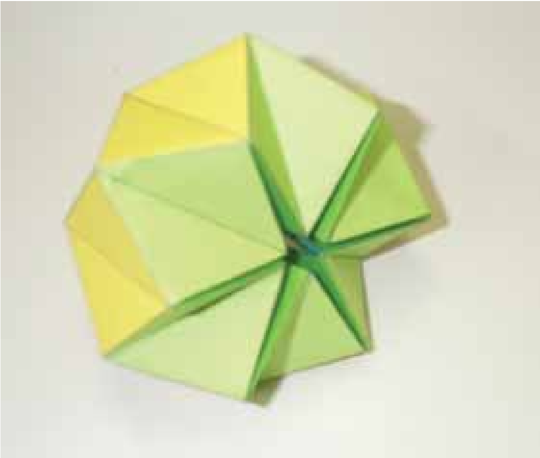
- Reforce a dobra das diagonais que passam pela aba de colagem, para não haver defeitos.

- Dobre ao meio e depois para dentro os triângulos da borda superior e inferior deste cilindro. Junte, em cada lado, as extremidades desses triângulos (sem colar).

- Para sanfonar o modelo, reforce as dobras do papel nas diagonais dos quadrados 2 e 4, depois as dos quadrados 3. Todas essas diagonais ficam no fundo das dobras.



- Manipule o objeto formado. Veja que é possível fazê-lo desvirar-se, de dentro para fora.



b) Agora é hora de ver a Matemática no caleidociclo. Reflita e responda, justificando:

b_1) Qual a área total da superfície externa do caleidociclo?

b_2)Suponha que, no início, ao colar a aba, você tenha formado um cilindro de base circular.

- Qual o comprimento da circunferência que contorna a base?
- Qual o raio desse círculo?

b_3) Qual é a dimensão dessa forma espacial?

Parte C
Conversando sobre a Próxima Unidade

Começou a tomar gosto pela geometria? Então vá com entusiasmo para a próxima Unidade, que terá muitas novidades.

Na seção 1, nosso trabalho vai girar em torno do ladrilhamento da piscina. Veremos polígonos regulares que são ou não adequados para essa finalidade.

Atividade 4

Considere que você tem polígonos regulares de mesmo tamanho e quer ver se, colocando-os lado a lado, conseguirá recobrir o plano, sem deixar espaço entre eles e sem superposição.

Faça desenhos e conclua quais você acha que servirão para isso:

- Os triângulos eqüiláteros?
- Os quadrados?
- Os pentágonos regulares?
- Os hexágonos regulares?
- Os heptágonos regulares?
- Os octógonos regulares?

Pela lista acima, você já andou recordando o nome de certos polígonos, dependendo do número de lados que possuem). Veja a resposta na próxima Unidade!

E já que falamos em polígonos regulares e revestimento do plano, vamos para o problema análogo em 3 dimensões: poliedros regulares e preenchimento do espaço. Quais deles serão adequados a essa finalidade? (Que decepção: apenas um, o cubo). Mas, aí entram em ação os poliedros semi-regulares – que você verá na próxima unidade – e entre eles acharemos mais quatro que servem para preencher o espaço. Dois deles são simples e bem conhecidos, mas os outros dois... Só montando para ver o que aparece. Juntando o seu com os dos colegas, você poderá conferir quais desses sólidos preenchem o espaço. Faça na próxima unidade!

Na seção 2, muitos conceitos matemáticos serão aprofundados. Você vai ver, por exemplo, que para se decidir se um polígono pode ou não revestir o plano, é necessário conhecer seu ângulo interno, e de que modo podemos obter esse valor. Vai ver também: porque existem apenas 5 poliedros regulares, e quais são eles. E ainda uma conceituação mais precisa sobre semelhança de polígonos e de poliedros.

A Seção 3 vem cheia de novidades para a sala de aula. Trará modelos de materiais didáticos e a maravilhosa arte de Escher aplicada ao revestimento de superfícies planas. Poderão ser de muito interesse para seus alunos.

Sessão Coletiva 6
Unidade 11

Parte A
Discussão dos processos de resolução e dificuldades

As atividades 1 a 6 da Unidade 11 do caderno de Teoria e Prática 3 se desenrolam a partir de um questionário que você teve que elaborar.

Vamos discutir seu processo de trabalho nessas atividades:

1. Para você, o que é consciência ecológica?

2. O que você costuma fazer em sala de aula para desenvolver a consciência ecológica de seus alunos?

3. De acordo com o texto "Consciência Ecológica e Comportamento Ecológico" existe uma diferença entre estes dois termos: consciência ecológica e comportamento ecológico. Qual é a diferença?

4. Quais seriam alguns comportamentos que devemos ter para estarmos agindo de forma correta do ponto de vista ecológico? O texto "Consciência Ecológica e Comportamento Ecológico" cita alguns. Tente também levantar outros.

5. Quais desses comportamentos você considera mais fáceis de fazer? E quais os mais difíceis?

6. Você já encontrou pessoas que, mesmo sabendo qual comportamento seria correto do ponto de vista ecológico, agiu de forma contrária? Por que você acha que isso ocorre? O que o texto "Consciência Ecológica e Comportamento Ecológico" diz a esse respeito?

7. Compartilhe com seus colegas de grupo o trabalho que você fez nas atividades 1 a 6 da Unidade 11. A partir das idéias compartilhadas, reformule os questionários e os sistemas de classificação de respostas pedidos nas atividades 1 e 2 de forma a produzir um trabalho único para seu grupo. Ou seja, ao final dessa atividade, seu grupo deverá ter:

   a) Um questionário para identificar o grau de consciência ecológica dos respondentes.

   b) Um critério que permita classificar os respondentes do questionário em A (altamente conscientizado), B (bastante conscientizado), R (regularmente conscientizado), P (pouco conscientizado) ou N (nada conscientizado).

   c) Um questionário para identificar o grau de comportamento ecológico do respondente.

   d) Um sistema de classificação das respostas.

Os questionários e sistemas de classificação que seu grupo irá apresentar poderão ser uma combinação do trabalho que cada um desenvolveu em casa, ou podem ser feitos com base na discussão sobre o que é ter consciência ecológica e o que é ter comportamentos ecológicos que acabamos de fazer.

8. Seu grupo deverá entrevistar dez pessoas de suas turmas com base nos questionários (resolva quantas pessoas cada membro de seu grupo entrevistará, para agilizar o processo). Classifiquem as respostas e preparem-nas para apresentar para o grande grupo, em cada uma das formas:

a) Uma tabela:

Indivíduo

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

Grau de consciência ecológica

Grau de comportamento ecológico

b) Um diagrama com setas:

c) Um gráfico:

9. Cada grupo apresentará seus resultados para a turma.

10. Em cada caso, verifique se podemos afirmar que o grau de comportamento ecológico é função do grau de consciência ecológica. Discuta o porquê da resposta.

Parte B
Discussão da transposição didática

a) Qual foi o ponto mais interessante na realização da transposição didática desenvolvida junto aos seus alunos?

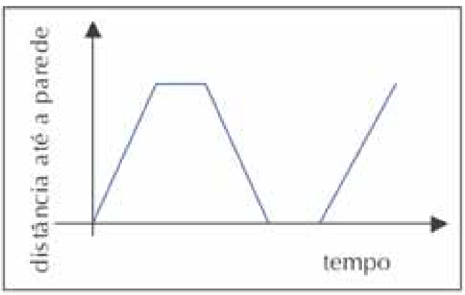
b) E as duas das maiores dificuldades na realização do trabalho da proposta de transposição com seus alunos?

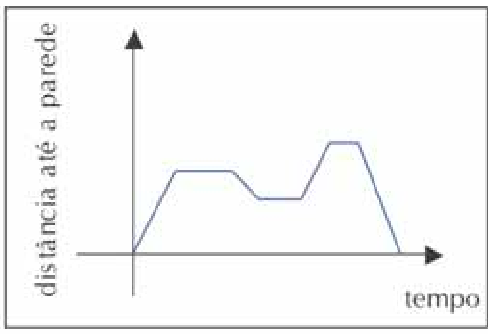
Parte C
Introdução à próxima unidade

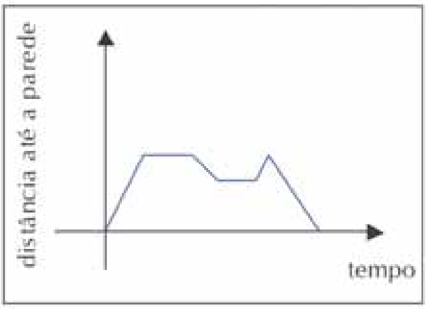
Na Unidade 11 começamos a examinar o uso de variáveis para representar a interdependência entre duas grandezas. Na próxima unidade continuaremos esse trabalho com maior detalhe.

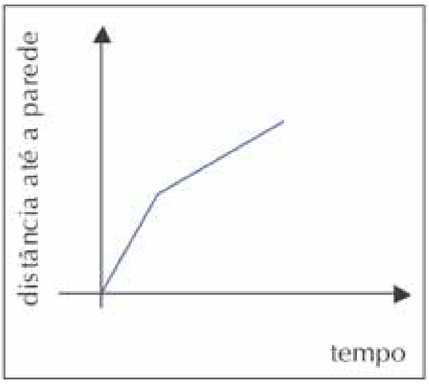
Na próxima unidade vamos, entre outras coisas, prestar mais atenção ao que dizem os gráficos sobre como duas grandezas variam em conjunto.

Você consegue representar, andando a partir da parede da sala, o que cada gráfico a seguir ilustra?

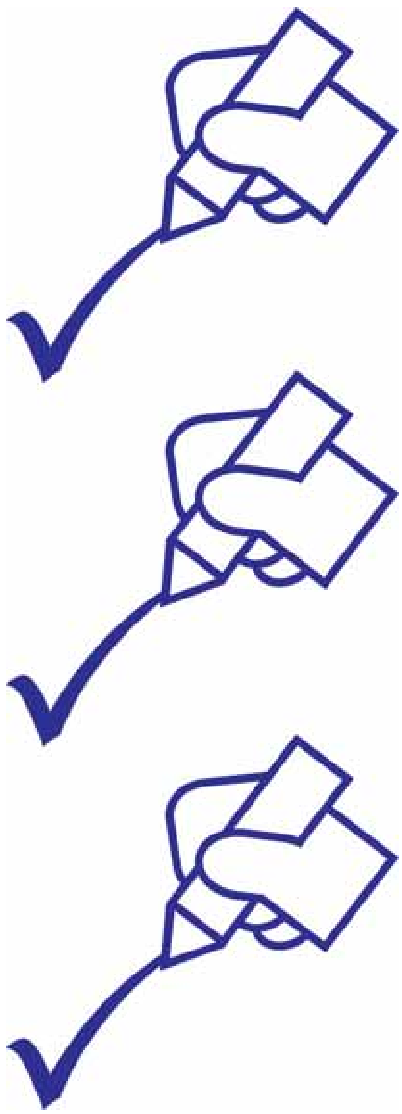
a)


b)


c)


d)


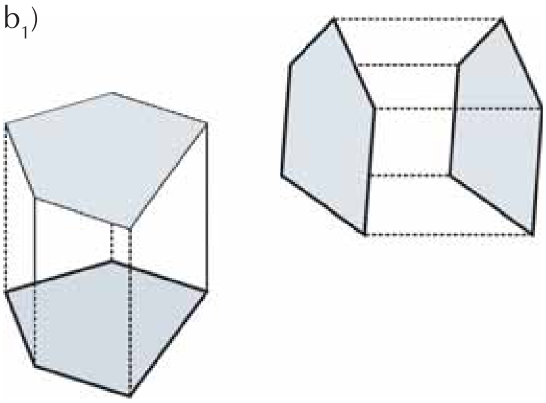
Soluções das atividades da Sessão Coletiva



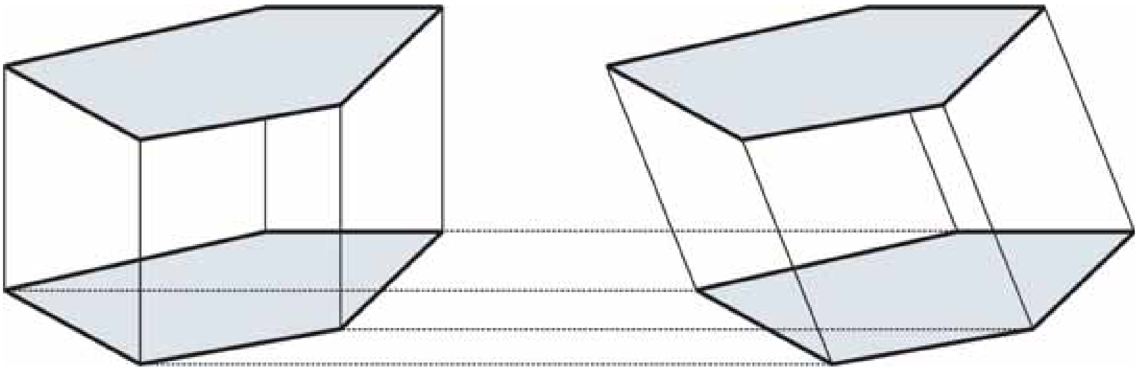
Soluções das atividades da Sessão Coletiva

Atividade 1

b_1)



b_2)



Atividade 2

a) Mesma resposta dada para a Atividade 2 da Seção 2 desta unidade, item b.

b) São polígonos.

c) Mesma resposta dada para a Atividade 3 da Seção 2 desta unidade, item a.

d) Mesma resposta dada para a Atividade 3 da Seção 2 desta unidade, item b.

Atividade 3

b_1) Você mediu o comprimento e a largura do retângulo molde do caleidociclo. Multiplique uma pelo outro para obter sua área externa.

b_2) O comprimento C da circunferência é igual ao comprimento do retângulo inicial.

O raio é igual a $C/2\pi$

b_3) O caleidociclo tem dimensão 2. Planificado, ele se reduz a um retângulo.

Atividade 4

Espera-se que, fazendo esboços de desenhos, os professores comecem a perceber que:

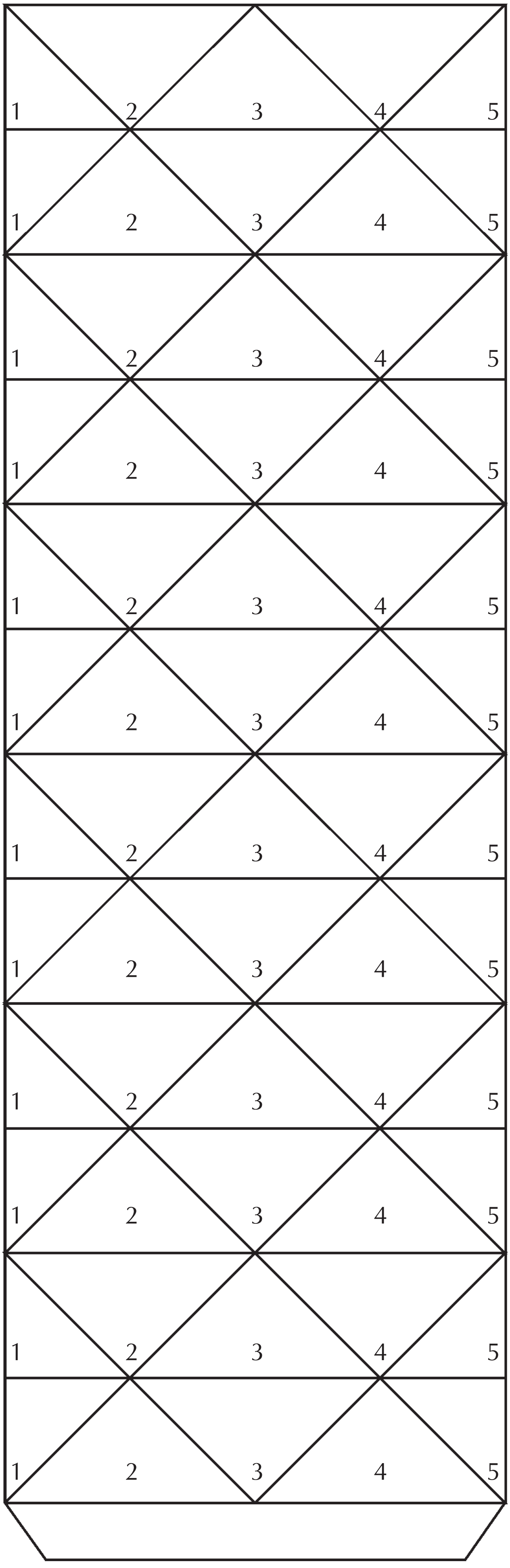
• Para revestir uma superfície plana justapondo ou só triângulos equiláteros, ou apenas quadrados ou ainda apenas hexágonos regulares

• quanto aos pentágonos, heptágonos e octógonos regulares, espera-se que os professores tenham dificuldades em verificar essa propriedade, ficando em dúvida se, cada um deles, poderá ou não preencher totalmente uma superfície plana.

Esse é o objetivo da atividade: despertar a curiosidade para algo que será desenvolvido e respondido na próxima unidade.

ANEXO A

Anexo A


1 2 3 4 5
1 2 3 4 5
1 2 3 4 5
1 2 3 4 5
1 2 3 4 5
1 2 3 4 5
1 2 3 4 5
1 2 3 4 5
1 2 3 4 5
1 2 3 4 5
1 2 3 4 5
1 2 3 4 5