



Acesse [www.mec.gov.br](http://www.mec.gov.br) ou ligue 0800 616161



Ministério da Educação



PROGRAMA GESTÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR

# MATEMÁTICA

DIVERSIDADE CULTURAL E MEIO AMBIENTE:  
DE ESTRATÉGIAS DE CONTAGEM ÀS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

## TP5

CADERNO DE TEORIA E PRÁTICA

Presidência da República

Ministério da Educação

Secretaria Executiva

Secretaria de Educação Básica

**PROGRAMA GESTÃO DA  
APRENDIZAGEM ESCOLAR  
GESTAR II**

**FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DOS  
ANOS/SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

**MATEMÁTICA**

**CADERNO DE TEORIA E PRÁTICA 5**

**DIVERSIDADE CULTURAL  
E MEIO AMBIENTE: DE ESTRATÉGIAS  
DE CONTAGEM ÀS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS**

Diretoria de Políticas de Formação, Materiais Didáticos e de  
Tecnologias para a Educação Básica

Coordenação Geral de Formação de Professores

Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II

**Matemática**

**Organizador**

**Cristiano Alberto Muniz**

**Autores**

**Ana Lúcia Braz Dias - TP2, TP3 e TP5**

Doutora em Matemática

Universidade de Indiana

**Celso de Oliveira Faria - TP2, TP4, TP5, AAA1, AAA2 e  
AAA3**

Mestre em Educação

Universidade Federal de Goiás/UFG

**Cristiano Alberto Muniz - TP1 e TP4**

Doutor em Ciência da Educação

Universidade Paris XIII

Professor Adjunto - Educação Matemática

Universidade de Brasília/UnB

**Nilza Eigenheer Bertoni - TP1, TP3, TP4, TP5 e TP6**

Mestre em Matemática

Universidade de Brasília/UnB

**Regina da Silva Pina Neves - AAA4, AAA5 e AAA6**

Mestre em Educação

Universidade de Brasília/UnB

**Sinval Braga de Freitas - TP6**

Mestre em Matemática

Universidade de Brasília/UnB

**Guias e Manuais**

**Autores**

**Elciene de Oliveira Diniz Barbosa**

Especialização em Língua Portuguesa

Universidade Salgado de Oliveira/UNIVERSO

**Lúcia Helena Cavasin Zabotto Pulino**

Doutora em Filosofia

Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP

Professora Adjunta - Instituto de Psicologia

Universidade de Brasília/UnB

**Paola Maluceli Lins**

Mestre em Linguística

Universidade Federal de Pernambuco/UFPE

**Ilustrações**

**Francisco Régis e Tatiana Rivoire**

DISTRIBUIÇÃO

SEB - Secretaria de Educação Básica

Esplanada dos Ministérios, Bloco L, 5o Andar, Sala 500

CEP: 70047-900 - Brasília-DF - Brasil

ESTA PUBLICAÇÃO NÃO PODE SER VENDIDA. DISTRIBUIÇÃO GRATUITA.  
QUALQUER PARTE DESTA OBRA PODE SER REPRODUZIDA DESDE QUE CITADA A FONTE.

Todos os direitos reservados ao Ministério da Educação - MEC.

A exatidão das informações e os conceitos e opiniões emitidos são de exclusiva responsabilidade do autor.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Centro de Informação e Biblioteca em Educação (CIBEC)

---

Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II. Matemática: Caderno de Teoria e Prática 5 - TP5: diversidade cultural e meio ambiente: de estratégias de contagem às propriedades geométricas. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008. 210 p.: il.

1. Programa Gestão da Aprendizagem Escolar. 2. Matemática. 3. Formação de Professores. I. Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica.

CDU 371.13

---

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA**

**PROGRAMA GESTÃO DA  
APRENDIZAGEM ESCOLAR  
GESTAR II**

**FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DOS  
ANOS/SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

**MATEMÁTICA**

**CADERNO DE TEORIA E PRÁTICA 5**

**DIVERSIDADE CULTURAL  
E MEIO AMBIENTE: DE ESTRATÉGIAS  
DE CONTAGEM ÀS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS**

BRASÍLIA  
2008



# Sumário

<b>Apresentação</b> .....	<b>7</b>
---------------------------	----------

<b>Introdução</b> .....	<b>11</b>
-------------------------	-----------

## PARTE I

<b>Unidade 17:</b> Matemática e impacto social da tecnologia da informação .....	<b>13</b>
--	-----------

<b>Seção 1:</b> Resolução de Situação-Problema: Multiplicidade de Possibilidades e a Sociedade Atual.....	<b>15</b>
--	-----------

<b>Seção 2:</b> Construção do conhecimento matemático em ação: Multiplicidade e Contagem.....	<b>18</b>
--	-----------

<b>Seção 3:</b> Transposição Didática – Princípio Fundamental de Contagem.....	<b>30</b>
---	-----------

<b>Leituras sugeridas</b> .....	<b>33</b>
---------------------------------	-----------

<b>Bibliografia</b> .....	<b>34</b>
---------------------------	-----------

<b>Texto de referência</b> .....	<b>35</b>
----------------------------------	-----------

<b>Solução das atividades</b> .....	<b>39</b>
-------------------------------------	-----------

<b>Unidade 18:</b> Matemática e interações sociais.....	<b>47</b>
---	-----------

<b>Seção 1:</b> Resolução de situação-problema: “Contar para conhecer” – Métodos de contagem como forma de descobrir padrões e relações sociais.....	<b>49</b>
--	-----------

<b>Seção 2:</b> Construção do conhecimento matemático em ação: Combinações.....	<b>61</b>
--	-----------

<b>Seção 3:</b> Transposição Didática – Princípio Multiplicativo de Contagem.....	<b>68</b>
--	-----------

<b>Leituras sugeridas</b> .....	<b>73</b>
---------------------------------	-----------

<b>Bibliografia</b> .....	<b>74</b>
---------------------------	-----------

<b>Texto de referência</b> .....	<b>75</b>
----------------------------------	-----------

<b>Solução das atividades</b> .....	<b>81</b>
-------------------------------------	-----------

<b>Unidade 19:</b> Explorando conceitos matemáticos em uma discussão sobre a reutilização e o uso de novas tecnologias.....	<b>89</b>
--	-----------

<b>Seção 1:</b> Uma situação-problema: destacando e estudando o volume máximo de uma caixa.....	<b>90</b>
--	-----------

<b>Seção 2:</b> Entendendo o uso de planilhas eletrônicas para a resolução de equações e resolução de equações quadráticas.....	<b>96</b>
--	-----------

<b>Seção 3:</b> Transposição didática: trabalhando o uso da calculadora e a fatoração para a resolução de equações quadráticas.....	<b>114</b>
--	------------

<b>Leituras sugeridas</b> .....	<b>117</b>
<b>Bibliografia</b> .....	<b>118</b>
<b>Texto de referência</b> .....	<b>119</b>
<b>Solução das atividades</b> .....	<b>125</b>

**Unidade 20:** Os triângulos na vida dos homens –

Congruência de Triângulos.....	<b>129</b>
--------------------------------	------------

<b>Seção 1:</b> Resolução de situação-problema: como o desconhecimento da Matemática causa transtornos na solução de problemas práticos.....	<b>130</b>
--	------------

<b>Seção 2:</b> Construção do conhecimento matemático em ação: polígonos e triângulos congruentes.....	<b>134</b>
--	------------

<b>Seção 3:</b> Transposição didática.....	<b>164</b>
--	------------

<b>Leituras sugeridas</b> .....	<b>175</b>
---------------------------------	------------

<b>Bibliografia</b> .....	<b>176</b>
---------------------------	------------

<b>Texto de referência</b> .....	<b>177</b>
----------------------------------	------------

<b>Solução das atividades</b> .....	<b>183</b>
-------------------------------------	------------

## **PARTE II**

<b>Socializando o seu conhecimento e experiências de sala de aula</b> .....	<b>195</b>
---	------------

## **PARTE III**

<b>Sessão Coletiva</b> .....	<b>201</b>
------------------------------	------------



# Apresentação

## Caro Professor, cara Professora,

Este Módulo II, que inicia no TP4 (Caderno de Teoria e Prática 4), do GESTAR, é continuidade da formação iniciada no Módulo I (TPs 1,2 e 3). Mesmo trazendo novos contextos, situações-problema, conceitos, conteúdos matemáticos e de educação matemática, atividades para o professor e para a sala de aula (por meio da transposição didática), textos de referências, dentre muitas outras coisas, a estrutura do material formador continua a mesma, ou seja:

*A Proposta Pedagógica de Matemática do Gestar II é estruturada a partir de três eixos:*

- Conhecimentos Matemáticos;
- Conhecimentos de Educação Matemática;
- Transposição Didática.

*Nos materiais de ensino e aprendizagem, você encontrará conhecimentos relacionados aos três eixos.*

*Os **Conhecimentos Matemáticos**, para o professor do Gestar II, são desenvolvidos em dois momentos:*

a) Apropriando-se da resolução de uma situação-problema como uma estratégia para mobilizar conhecimentos matemáticos já conhecidos ou buscar outros que emergem naturalmente no contexto.

b) Investindo na construção de conhecimentos matemáticos, a partir das situações-problema para se chegar à elaboração de procedimentos e conceitos matemáticos.

*O segundo eixo de estruturação dos materiais de ensino de Matemática do GESTAR, o eixo **Conhecimentos de Educação Matemática**, perpassa os 3 elementos: situação-problema, conhecimento matemático em ação e transposição didática.*

*Ao se trabalhar uma situação problema, faz-se que o cursista vivencie um novo modo de aprender matemática, a partir de situações do mundo real, e que, para sua solução, requer a busca e a construção de conhecimentos matemáticos. Essa busca e a construção ocorrem, portanto, a partir de necessidades geradas por uma situação real e não impostas dentro de uma concepção linear de currículo. Portanto, faz-se uso de teorias de Educação Matemática para ajudar o professor a crescer em sua relação com a matemática e no modo como a utiliza em sua vida. Vivendo, na prática, um processo de educação matemática, e aprendendo mais sobre essa área do conhecimento, o professor cursista poderá entender e ajudar a construir a educação matemática de seus alunos.*

*Os conhecimentos relativos ao terceiro eixo de estruturação dos módulos, a **Transposição Didática**, visam a ajudá-lo a conhecer, pesquisar e produzir situações didáticas que facilitem o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos em sala de aula. (GuiaGeral)*

Os autores.



**PARTE I**

**TEORIA E PRÁTICA 5**

- **Unidade 17**
- **Unidade 18**
- **Unidade 19**
- **Unidade 20**

**GESTAR TP5**



# Introdução

## Caro Professor, cara Professora,

Este Caderno de Teoria e Prática busca apresentar a atividade Matemática em contextos práticos, enfatizando as interações sociais, tratando em especial de questões associadas à diversidade racial, regional e cultural. Também coloca em relevo o uso e a importância das novas tecnologias na atual sociedade, o que está presente em mais de uma unidade.

A partir de situações de estruturas multiplicativas que discutem a presença, cada vez mais marcante, de códigos e senhas em nossa vida cotidiana, a **Unidade 17** mobiliza conceitos e procedimentos associados à contagem. Encontramos diversas atividades que nos permitem explorar o raciocínio combinatório, aplicando o Princípio Multiplicativo da Contagem e suas representações. O Texto de Referência desta unidade permite a você, professor em formação, por meio de visualização de estruturas gráficas e inferências de regularidades, perceber a importância de desenvolvimento de processos gráficos na resolução de situações de contagem.

Se na Unidade 17 há uma ênfase no Diagrama de Árvore como recurso para a resolução de problemas de contagem, na **Unidade 18** você é convidado a mobilizar conhecimentos de gráficos e tabelas como ferramentas para a resolução de situações-problema envolvendo raciocínio combinatório e aplicando princípios e métodos de contagem. Estas unidades possuem uma forte articulação, uma vez que ambas exploram conteúdos do mesmo campo conceitual: Princípios de Contagem. As duas Transposições Didáticas convidam você a explorar com seus alunos estratégias de resolução de situações de contagem em contextos significativos para os alunos. Nesta perspectiva, a formação o convida à leitura e reflexão de uma importante temática no campo da Educação Matemática, ou seja, a Etnomatemática, por meio de um artigo de autoria do Doutor Professor Ubiratan D'Ambrósio.

A questão do Meio Ambiente, em especial a da reciclagem de embalagens, é na **Unidade 19** motivação para explorar conceitos geométricos associados ao volume, planificação e ao estudo de ângulos na circunferência. Além disso, a resolução de equação do 2º grau e a função quadrática aparecem como ferramentas. Os *softwares* de representações dinâmicas são propostos associados a tais conteúdos matemáticos e apresentados como facilitadores: é a oportunidade de muitos professores se habilitarem a trabalhar com *Excel* para o estudo de funções, assim como do *Cabri* para construções geométricas. Na Transposição Didática, é a calculadora que aparece como ferramenta matemática e didática. A discussão sobre as possibilidades e limites das novas tecnologias na Educação Matemática é proposta a partir do Texto de Referência do autor.

A geometria ganha importância ao final deste Caderno quando, na **Unidade 20**, um estudo mais aprofundado dos triângulos, como ferramenta na resolução de situações-problema, é realizado com foco na congruência de triângulos. Este conteúdo é explorado por meio de diferentes aplicações em situações bem diversas, assim como

permite um maior aprofundamento de provas e demonstrações matemáticas. Encontra-se, também, a vivência de importantes conceitos de transformações de figuras, tais como: translação, rotação, simetria e homotetias. O Texto de Referência permite ao professor leitor refletir sobre a construção do pensamento matemático desenvolvido a partir da visualização, descrição, raciocínio por continuidade etc.

Os autores.

## Unidade 17

### Matemática e impacto social da tecnologia da informação

Ana Lúcia Braz Dias e Sinval Braga de Freitas



#### Iniciando a nossa conversa

---

A humanidade ao longo do tempo desenvolveu inúmeras formas de uso da tecnologia. Isto tanto cria soluções para alguns dos problemas do homem como gera novos desafios. O uso de recursos tecnológicos da informação como a Internet vem facilitando, por exemplo, o acesso à rede bancária por meio de um terminal de atendimento ao cliente. Trata-se de um facilitador na vida do homem moderno, mas ao mesmo tempo vem trazendo inúmeros problemas de segurança. Conviver com a tecnologia, sabendo utilizá-la de modo adequado é uma habilidade que pode ser desenvolvida na escola, até mesmo nas aulas de Matemática. Nesta Unidade, entre outros temas, discutiremos um pouco sobre essa possibilidade.

Em nosso texto inicial, integrando a Matemática com a realidade, trataremos das senhas de acesso usadas para entrar em rede, ler a caixa postal, conferir o extrato bancário, fazer compras pela Internet, ouvir o correio de voz do celular, entre outras situações.

A Matemática está totalmente presente na criação e na utilização dos recursos tecnológicos, e este fato tem que ser considerado na escola. Os alunos poderão se divertir muito e compreender como os conhecimentos nesta área podem colaborar na melhor e maior participação das situações sociais.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais prevêem que é importante propor ao aluno situações em que ele possa coletar e organizar dados e utilizar recursos visuais adequados (fluxogramas, tabelas e gráficos) para sintetizá-los, comunicá-los e permitir a elaboração de conclusões<sup>1</sup>. E, ainda, a representação e a contagem dos casos possíveis em situações combinatórias. Dentre as atitudes a serem desenvolvidas, ressaltamos a capacidade de investigação e a perseverança na busca de resultados, valorizando o uso de estratégias de verificação e controle de resultados. Assim, nesta Unidade, são propostas algumas atividades em que você, professor, irá refletir sobre o papel da multiplicidade e da quantidade de informação na formação e na resolução de novas formas de problemas sociais, além de algumas situações-problema para início do estudo dos métodos de contagem.

O estudo sobre situações combinatórias, antes dos Parâmetros Curriculares Nacionais, era realizado somente no Ensino Médio. Com as novas propostas, este conteúdo passou a ser objeto de estudo no Ensino Fundamental, desde as séries iniciais até a 8ª série, necessitando de um aprofundamento mais sistematizado pelos professores para ser bem explorado no Ensino Fundamental.

---

1. Os Parâmetros Curriculares Nacionais discutem estas habilidades ao apresentarem os conteúdos para o Ensino Fundamental (1ª parte) e, mais especificamente, ao tratarem dos conceitos e procedimentos para o quarto ciclo em relação ao bloco de conteúdo: Tratamento da Informação.

Como é proposta do Gestar contribuir com o trabalho do professor, disponibilizando idéias para a transposição didática dos conteúdos, trataremos deste assunto nas Unidades 17 e 18, com diferentes abordagens.

Esta Unidade está organizada em três Seções:

### **1. Resolução de uma situação-problema**

Na situação-problema desta Unidade, veremos como o crescimento da complexidade do mundo atual gera alguns problemas sociais inesperados, mas também que a grande quantidade de informação produzida pode ser usada na solução de alguns destes novos problemas.

### **2. Construção do conhecimento matemático em ação**

Nesta Seção, exploraremos o campo conceitual multiplicativo, o raciocínio recursivo e a visualização da multiplicação como repetidas iterações.

### **3. Transposição didática**

Esta Seção discute problemas relacionados ao ensino-aprendizagem de conceitos vistos nas Seções 1 e 2 e sugere ações relacionadas para a sala de aula.

Como as outras Unidades, esta também conterà um Texto de Referência sobre Educação Matemática, que abordará o tema “Visualização e Pensamento Matemático”.



## **Definindo o nosso percurso**

---

14

Ao longo desta Unidade, esperamos que você possa:

1 - Com relação aos seus conhecimentos matemáticos:

- Ser capaz de aplicar o princípio multiplicativo a problemas de contagem.
- Utilizar o diagrama de árvore como forma de representação do princípio multiplicativo. Isto será feito nas Seções 1 e 2.

2 - Com relação aos seus conhecimentos sobre Educação Matemática:

- Aprofundar os seus conhecimentos sobre o campo conceitual multiplicativo.
- Alargar os seus conhecimentos de aplicações e problemas que se relacionam no campo conceitual multiplicativo.
- Considerar problemas multiplicativos como forma de desenvolver o raciocínio combinatório e recursivo dos seus alunos.

Isto será feito em pequenos textos ao longo da Seção 2 e no Texto de Referência.

3 - Com relação à sua atuação em sala de aula:

- Elaborar atividades nas quais os seus alunos possam aplicar o princípio multiplicativo de contagem.
- Elaborar atividades nas quais os seus alunos possam representar e visualizar o crescimento multiplicativo e desenvolver o raciocínio recursivo.

Isto será trabalhado principalmente na Seção 3, mas depende também de seu desenvolvimento pessoal decorrente do estudo da Seção 2 e do Texto de Referência.



## Seção 1

# Resolução de Situação-Problema: Multiplicidade de Possibilidades e a Sociedade Atual



### Objetivo da seção

---

- Refletir sobre o papel da multiplicidade e da quantidade de informação na formação e na resolução de novas formas de problemas sociais.
  - Iniciar-se no estudo dos métodos de contagem.
- 



### Integrando a matemática ao mundo real

---

O uso da tecnologia nas mais variadas esferas da atividade humana vem gerando soluções para muitos problemas, mas vem também criando novos desafios, como, por exemplo, as preocupações com a segurança.

Cada vez mais precisamos inventar senhas de acesso e outras barreiras para realizarmos operações bancárias, utilizarmos serviços e outras atividades, capazes assim de provar a nossa identidade e evitar fraudes.

Cada vez mais o homem moderno se torna escravo das senhas de acesso. A informática, a Internet e os celulares aumentaram em muito o uso destes códigos. São senhas para entrar em rede, ler a caixa postal, conferir o extrato bancário, fazer compras pela Internet, ouvir o correio de voz do celular... Haja memória para decorar tantas senhas!

A senha identifica o verdadeiro dono de uma conta em um sistema e garante acesso a seus recursos. A senha de um sistema é a prova da identidade do usuário; caso caia em mãos erradas, as conseqüências podem ser catastróficas. Por isso, todo cuidado é pouco com a escolha da senha e com a manutenção de seu sigilo.

Por mais que as senhas representem uma forma de segurança, sempre há aqueles que conseguem criar meios de violar o sistema.

Um novo tipo de crime, conhecido como “engenharia social”, está se tornando comum. Ataques via engenharia social são feitos por meio de pesquisas de dados pessoais e outras características relacionadas ao usuário (o time de futebol, a sua data de nascimento, a da esposa, a dos filhos, o nome da atriz predileta etc.). Estes dados coletados são usados para auxiliar na descoberta da senha da vítima. Os criminosos que utilizam esse golpe fazem pesquisas sobre hábitos, gostos, família, emprego e outras áreas da vida da vítima, assim podem se passar pelo usuário. É um verdadeiro “roubo de identidade”.

Outra forma de se apoderar de senhas e que é muito utilizada é a dedução. O criminoso se aproveita da ingenuidade de usuários que deixam senhas em branco ou usam senhas simples como: o próprio nome, “abcdef”, “asdfg”, “123456” e outros tipos de senhas comuns para obter acesso ao sistema.

Senhas deduzidas são geralmente senhas muito simples ou muito usadas. Mas, por que algumas pessoas ainda utilizam senhas tão simples? Um motivo é o medo de esquecer a senha (quando não se consegue pensar em algo que seja ao mesmo tempo complexo mas de fácil lembrança). Outra razão é quando o usuário é pego desprevenido e tem que fazer uma escolha rápida de senha.

Senhas fáceis são o primeiro motivo de sucesso de *crackers*<sup>2</sup> no acesso a sistemas de computadores. O administrador pode forçar o usuário a fazer trocas periódicas de senhas, mas quem vai garantir que ele esteja escolhendo boas senhas para que ninguém as descubra com facilidade?

A seguir, algumas dicas do que sejam senhas<sup>3</sup> ruins e boas:

### Senhas Ruins

- O uso da palavra senha como senha. Isto parece idiota, mas existe!
- Senhas com o mesmo nome do login (joao/joao).
- Senhas compostas por letras ou números em seqüência crescente ou decrescente (abcdef, 123456, 654321 etc.). Estes tipos de senha podem ser adivinhados por dedução e são as primeiras combinações que crackers usam.
- Palavras relacionadas com o gosto pessoal. Por exemplo: “escort”, “vectra”, “subaru”, se a pessoa é amante de carros.
- O nome da esposa, dos filhos, dos familiares, do animal de estimação, do time de futebol, do ídolo da TV/filmes ou qualquer coisa relacionada a familiares ou, indiretamente, ao usuário.
- Idade, data de aniversário, data de casamento, número de identidade, título de eleitor, placa de carro ou qualquer coisa que seja característica do usuário.
- Palavras existentes. Um “ataque de dicionário” poderá descobrir facilmente a sua senha.
- Senhas com menos de oito letras.
- Senhas apenas em minúsculas ou em MAIÚSCULAS.

### Senhas Boas

- Uma senha boa nunca deverá ser lida, mas deverá ser de fácil lembrança. Por exemplo, pense em uma frase importante para você, tipo: “meu sistema operacional preferido é o Linux”. Pegue a primeira letra de cada palavra: “msopeol”. PRONTO, está escolhida uma boa senha: fácil de se lembrar e difícil de ser quebrada por “ataques de dicionário”.
- Uma boa senha deve conter números e letras. A senha acima poderia ser modificada para “msopeol1”.
- Pode conter letras maiúsculas e minúsculas: “msopeoL1”.

2. Pessoas que se especializam em invadir as redes de computadores usadas por corporações e várias outras organizações. O alvo primordial dos *crackers* é o servidor da rede, pois, se eles conseguem acesso a este que geralmente é o mais bem protegido, torna-se muito fácil conseguir acesso ao restante da rede.

3. Fonte: <http://www.pcs.usp.br/~jkinoshi/ftp/foca/foca3/ch-d-contas.html#s-d-contas-cms-senhas>

- Deve conter oito caracteres, sempre que possível. Isso aumenta bastante o número de combinações necessárias para se quebrar uma senha. Mesmo que a senha escolhida não chegue aos oito caracteres mínimos, você poderá combiná-la com números.

**OBS:** NUNCA dê pistas sobre a sua senha! Para você isso pode ser um desafio lançado a outras pessoas e de quase impossível resolução, mas não se esqueça de que muita gente é especializada neste tipo de dedução.



### Atividade 1

---

Considerando as dicas dadas anteriormente, vamos ver como uma boa senha pode aumentar a dificuldade de alguém adivinhá-la por dedução ou por sorte ou, ainda, recorrendo a programas de computador que testam todas as possibilidades para aquela senha.

- a) Invente uma senha de oito caracteres usando as letras do alfabeto. Procure não cair nas armadilhas citadas, como colocar as suas preferências ou os nomes de pessoas da família. Se alguém tentasse descobrir a senha testando todas as possibilidades de senhas de oito caracteres usando letras do alfabeto, quantas possibilidades teriam que ser testadas?
- b) Agora acrescente também números. Em quanto aumentamos as possibilidades a serem testadas?
- c) Finalmente, defina que as letras tanto possam ser maiúsculas ou minúsculas. Como isto aumenta o número de possibilidades?
- d) Você acha que as dicas dadas foram boas? Que outras dicas você daria para aumentar o número de senhas possíveis e assim dificultar as tentativas de adivinhação por parte de pessoas mal intencionadas?

## Seção 2

# Construção do conhecimento matemático em ação: Multiplicidade e Contagem



Objetivo da seção

Ao longo desta Seção, você deverá ser capaz de:

- Utilizar o princípio fundamental de contagem.
- Desenvolver procedimentos sistemáticos para enumerar possibilidades em problemas de contagem.
- Ampliar o conceito de multiplicação, como simples adição de parcelas iguais para o raciocínio combinatório.
- Utilizar diagramas de árvores para representar o princípio multiplicativo.

## Um Princípio Fundamental de Contagem

18

- Hum, vejamos... nestas provas de "verdadeiro ou falso", a primeira resposta é quase sempre "verdadeira".

Isto significa que a próxima será falsa para dar uma balanceada na verdadeira... a seguinte também será falsa para quebrar o padrão.

Aí, mais uma verdadeira e depois duas falsas... depois três verdadeiras juntas... sempre aparecem três verdadeiras seguidas em algum lugar... depois uma falsa, outra verdadeira... Sou tão esperto! Vou gabaritar esta prova!



Adaptação de uma tirinha publicada na revista Linus.

O aluno da ilustração está tentando adivinhar o gabarito de uma prova do tipo “verdadeiro ou falso”. Será que o aluno consegue “gabaritar” a prova assim?

Se a prova tiver 20 questões, quantos gabaritos possíveis existem?

Para examinar esta questão, vamos listar todas as possibilidades de gabarito para algumas provas de “verdadeiro ou falso” ou “V ou F”:

Uma prova com apenas uma questão que tivesse alternativas de respostas V ou F teria dois possíveis gabaritos. Ou a resposta certa (gabarito) seria V, ou seria F.

Uma prova com duas questões teria quatro possíveis gabaritos: VV, VF, FV, FF.

Com três questões, o número de possibilidades cresce para oito: VVV, VVF, VFF, FVV, FVF, FFF.

Com quatro questões, existem 16 possibilidades: VVVV, VVVF, VVFF, VFVV, VFVF, VFFF, FVVV, FVVF, FVFF, FFVV, FFVF, FFFV, FFFF.

O número de gabaritos possíveis cresce muito rapidamente conforme o número de questões aumenta. Listar todas as possibilidades torna-se muito trabalhoso (e entediante).

Precisamos encontrar um modo de descobrir o número de gabaritos possíveis sem que seja necessário contá-los um por um.

Vamos examinar de forma sistemática como procedemos quando tentamos fazer uma lista de todas as possibilidades.

No caso de uma prova com duas questões:

Temos que combinar cada resposta possível para a primeira questão com cada resposta possível para a segunda questão. Veja o Diagrama 1 abaixo:

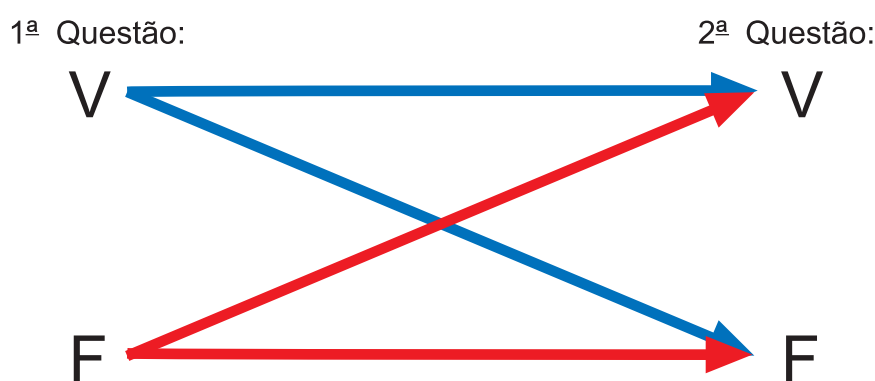


Diagrama 1

As possibilidades resultantes são: VV, VF, FV, FF – representadas no Diagrama 1 por linhas coloridas.

Podemos ilustrar isto de outras formas:

### Diagramas de árvores

A primeira questão tem duas possibilidades: pode ser V ou F.

Para cada uma destas possibilidades, temos que imaginar as possibilidades para a segunda questão:





## Articulando conhecimentos

---

Relembrando o que tratamos no Módulo I, retomamos a idéia de que, ao discutir a Teoria de Quadros, Regine Douady lembra que aprender Matemática é navegar entre as diferentes e possíveis formas de representação de um mesmo objeto matemático. O aprender Matemática contempla a valorização de idéias ligadas à intuição e à percepção espaço/temporal, grandeza e outras. É imprescindível a criação, no espaço da sala de aula, de um fórum democrático, com permanente troca e confronto de saberes, buscando a descoberta entre partícipes na construção do conhecimento. Nesse espaço, podemos encontrar múltiplas formas de resolver uma situação matemática, assim como múltiplas possibilidades de representá-las. Diversas dimensões devem ser consideradas: – o plano das idéias; – o plano das representações mentais; – o plano dos registros; – o plano da comunicação; – o plano da argumentação. É preciso considerar sempre que a construção do conhecimento matemático constitui-se em um longo e complexo processo que por vezes não é trabalhado pela escola de forma plena.

---



## Atividade 2

---

Digamos que você tenha que ajudar os seus alunos a escolher o noivo e a noiva da festa junina da escola. Como vários alunos queriam participar, foi resolvido que a escolha seria por meio de um sorteio.

21

Os candidatos a noivo são: Antônio, Benedito, Carlos e Daniel.

As candidatas a noiva são: Ângela, Beatriz, Célia, Denise, Eunice e Fabrícia.

A turma resolveu sortear primeiro o noivo e depois a noiva.

Fabrícia estava querendo muito que ela e Carlos fossem os escolhidos. Qual a probabilidade de isto acontecer?

- Qual a probabilidade de Carlos ser sorteado?
- Qual a probabilidade de Fabrícia ser sorteada?
- Qual a probabilidade de o casal sorteado ser formado por Carlos e Fabrícia?
- Mostre, em um diagrama de árvores, todas as possibilidades de casais que podem ser formados e responda quantos são ao todo?



## Articulando conhecimentos

---

Na Unidade 7, aprendemos que em uma situação na qual haja  $n$  possibilidades de resultados, onde todos têm a mesma chance de acontecer, a probabilidade de cada um destes resultados é  $1/n$ .

Quando consideramos simultaneamente dois eventos de probabilidade  $p$  e  $q$ , respectivamente, e queremos saber a probabilidade de que os dois aconteçam ao mesmo tempo, a probabilidade de ocorrência simultânea será  $p$  vezes  $q$ . Isto pode ser explicado pelo princípio multiplicativo de contagem. Na Atividade 5, temos um exemplo desta observação.



**Atividade 3**

Vamos examinar agora o caso de uma prova que combine questões de múltipla escolha com questões de “verdadeiro ou falso”, da seguinte forma:

- a) a primeira questão é de múltipla escolha e pode ter uma entre quatro respostas: a, b, c ou d;
- b) a segunda questão é do tipo “verdadeiro ou falso”;
- c) a terceira questão é de múltipla escolha e pode ter uma entre três respostas: a, b, ou c.

Represente as possibilidades para cada questão no diagrama de árvores abaixo (Diagrama 3), colocando os gabaritos resultantes na coluna à direita do diagrama.

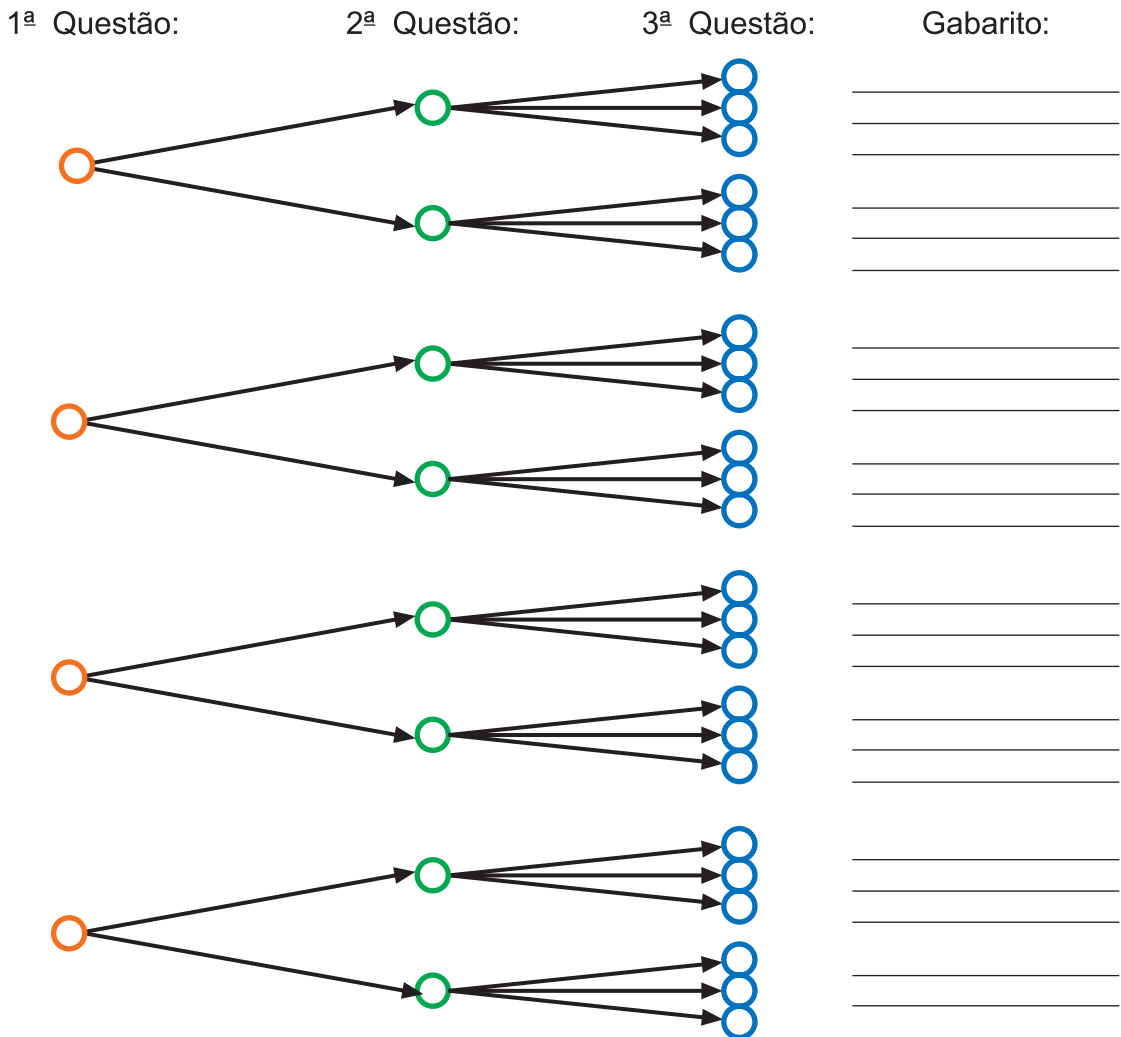


Diagrama 3



Observe o diagrama formado. Há quatro repetições do “tronco” principal da árvore (colocado dentro do retângulo azul, no Diagrama 4); nele aparecem duas repetições de um conjunto menor de galhos (colocado dentro do retângulo vermelho, no Diagrama 4); este conjunto menor de galhos tem três ramos, referentes às três possibilidades da questão 3.

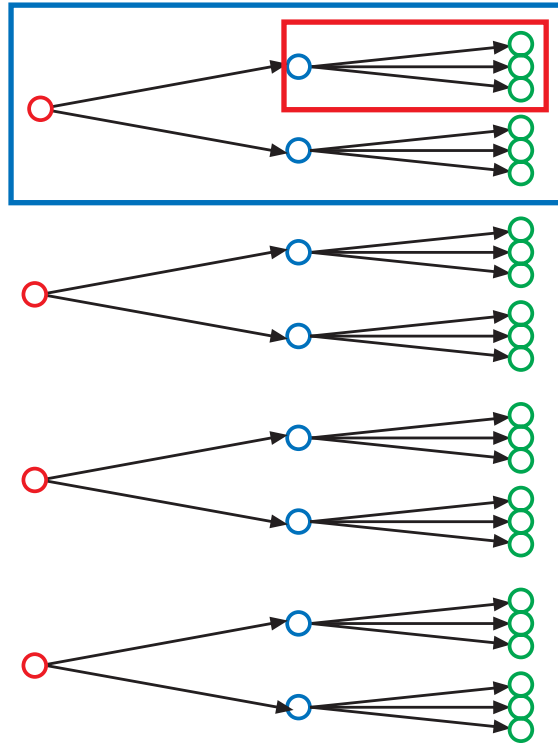


Diagrama 4

### Sintetizando

O conjunto menor de 3 ramos aparece 2 vezes em cada tronco principal, que por sua vez ocorre 4 vezes.

O total de possibilidades pode ser então computado como:

$$4 \times 2 \times 6 = 24 \text{ possíveis gabaritos}$$

Na resolução desta situação-problema, resgatamos o conceito de combinação na multiplicação, conceito este pouco explorado nas séries iniciais, pois o professor privilegia o conceito aditivo.



### Atividade 4

- Se mudássemos a situação retratada na Atividade 3, colocando, na questão 1 da prova, mais uma alternativa – letra “e” –, em quanto seria acrescido o número total de gabaritos possíveis?
- E se, deixando a questão 1 como estava (com quatro possibilidades apenas), colocássemos mais uma alternativa na questão 3 – alternativa “d”? Em quanto seria acrescido o número total de gabaritos possíveis?

Vemos que o acréscimo de uma possibilidade em uma das questões pode não ter o mesmo efeito no total de gabaritos possíveis que o acréscimo de uma possibilidade teria em uma outra questão! Por que será que isto acontece?

No item “a”, o total de possibilidades, que era  $4 \times 2 \times 3$ , passou a ser  $(4 + 1) \times 2 \times 3 = 5 \times 2 \times 3$ .

No item “b”, o total de possibilidades, que era  $4 \times 2 \times 3$ , passou a ser  $4 \times 2 \times (3 + 1) = 4 \times 2 \times 4$ .

A unidade adicionada em uma das questões vai significar o acréscimo de diferentes quantidades no total, pois estamos trabalhando no campo conceitual multiplicativo.

No item “a”, o total de possibilidades, que era  $4 \times 2 \times 3$ , passou a ser  $(4 + 1) \times 2 \times 3 = (4 \times 2 \times 3) + (1 \times 2 \times 3)$ , que é o total que tínhamos anteriormente mais uma vez a quantidade  $(2 \times 3)$ . Os parênteses que colocamos do lado direito da expressão não são necessários, mas estão lá para evidenciar as duas quantidades somadas.

No item “b”, o total de possibilidades, que era  $4 \times 2 \times 3$ , passou a ser  $4 \times 2 \times (3 + 1) = (4 \times 2 \times 3) + (4 \times 2 \times 1)$ , que é o total que tínhamos anteriormente mais uma vez a quantidade  $(4 \times 2)$ .

Ao adicionarmos um item no caso “a”, estamos na verdade adicionando a quantidade  $(2 \times 3)$ . Ao adicionarmos um item no caso “b”, estamos na verdade adicionando a quantidade  $(4 \times 2)$ .

24

### Sintetizando

Ao explicarmos a situação da forma como fizemos acima, estamos tratando a adição como uma soma de parcelas repetidas. Observe que estamos “traduzindo” a multiplicação em termos de uma adição.

Uma forma mais direta de se entender a multiplicação é atribuir a um ou mais dos fatores envolvidos o papel de “operador” – um número que nos dirá quantas iterações ou repetições de uma operação devemos fazer.

Assim, em  $2 \times 3$ , o número 3 representa uma quantidade, enquanto o 2 representa quantas vezes deveremos acrescentar a quantidade 3 – quantas iterações ou repetições serão feitas.

Vamos empregar a interpretação expressa no quadro acima na situação proposta nas atividades anteriores:

- No diagrama de árvore feito para a situação representada na Atividade 3, como já vimos, há quatro repetições do “tronco” principal da árvore (dentro do retângulo azul, no Diagrama 4), pois a situação representada é  $4 \times 2 \times 3$ .
- No item “a” da Atividade 4, no qual adicionamos um item à primeira questão e passamos a ter a situação  $5 \times 2 \times 3$ , acrescentamos uma repetição do “tronco principal”, o que nos daria um diagrama com cinco iterações ou repetições deste “tronco”, como o Diagrama 5 (as partes acrescentadas estão em azul).
- No item “b” da Atividade 4, no qual adicionamos um item à terceira questão e passamos a ter a situação  $4 \times 2 \times 4$ , acrescentamos um “ramo” na extremidade direita da “árvore”, e este novo desenho será repetido oito vezes, como no Diagrama 6 (as partes acrescentadas estão em azul).

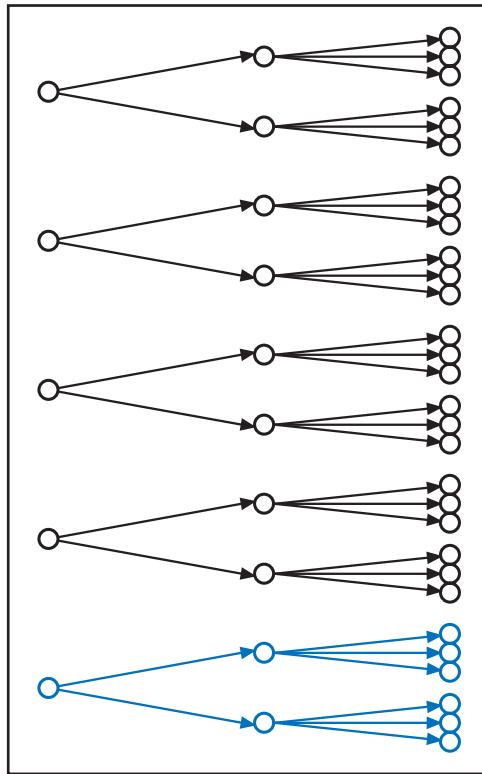


Diagrama 5

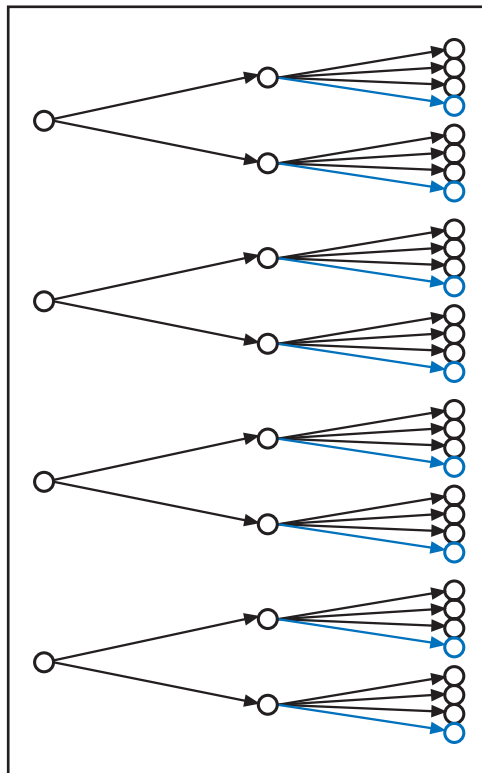


Diagrama 6

Dissemos que, ao adicionarmos um item no caso “a”, estamos na realidade adicionando a quantidade (2 x 3). E que, ao adicionarmos um item no caso “b”, estamos na verdade adicionando a quantidade (4 x 2). Então, na verdade, o que vai influenciar o efeito do acréscimo de uma unidade a mais em um dos fatores é:

- Quantas vezes esta unidade será repetida.
- ou
- A quantidade que esta unidade estará repetindo.



## Atividade 5

- Quantos gabaritos seriam possíveis em uma prova de cinco questões, que fosse estruturada da seguinte forma: quatro alternativas para a questão 1; cinco alternativas para a questão 2; quatro alternativas para a questão 3; cinco alternativas para a questão 4; e três alternativas para a questão 5?
- Se acrescentarmos uma alternativa à questão 1, o número de gabaritos possíveis passaria a ser \_\_\_\_\_
- Se mantivermos a questão 1 com quatro alternativas e acrescentarmos uma alternativa à questão 5, o número de gabaritos possíveis passaria a ser \_\_\_\_\_

Como as possibilidades se multiplicam!

Uma observação pode decorrer da discussão destas atividades:

O Diagrama 5 mostra a unidade acrescentada (a alternativa “e” da questão 1 da prova) como uma repetição a mais da parte em azul (que, por sua vez, representa  $2 \times 3$ ):

$$1 \times 2 \times 3 = 1 \text{ vez } (2 \times 3)$$

Já no Diagrama 6, a unidade acrescentada (a alternativa “d” da questão 3 da prova) é representada como uma unidade repetida oito vezes:

$$(4 \times 2) \times 1 = 8 \text{ vezes a unidade acrescentada.}$$

26

Não poderíamos alternar estas interpretações? Quer dizer, não poderíamos pensar:

- a situação do item “a” como:  $(2 \times 3)$  vezes a unidade acrescentada;
- e
- a situação do item “b” como: 1 vez  $(4 \times 2)$ ?

O que você acha?

É lógico que o número de possibilidades acrescentadas ao problema não se alterará com esta nova interpretação, pela própria comutatividade da multiplicação:

$$1 \times 2 \times 3 = 2 \times 3 \times 1$$

e

$$4 \times 2 \times 1 = 1 \times 4 \times 2$$

Professor, deixamos como desafio a construção de diagramas de árvore destas duas interpretações, para comparar se as possibilidades que elas originam são as mesmas. Para isto, basta trocar a ordem em que as questões se apresentam no diagrama de árvore. As possibilidades originadas se alteram ao desenharmos o diagrama em outra ordem? Vamos pensar nisto mais adiante, quando examinarmos mais a fundo como “ler” um diagrama de árvore.

## Visualizando o Princípio Multiplicativo

Vimos como usar diagramas e tabelas para ajudar-nos a encontrar e a registrar todas as possibilidades quando temos vários fatores combinados, onde cada um pode assumir um certo número de valores.

As representações gráficas são uma forma poderosa de aguçar o nosso senso de como as possibilidades se multiplicam quando consideramos um ou vários fatores a mais. A visualização é sempre uma forma de desenvolver as nossas intuições sobre conceitos matemáticos.

## Diagramas de árvores

Quando usamos um diagrama de árvore para representar uma situação onde se aplica o princípio multiplicativo, como são visualizadas as possibilidades originadas?

Consulte novamente o diagrama 3 e os dados que você agregou a ele. Lá colocamos, à direita, linhas horizontais onde você pôde listar os gabaritos formados.

Onde está representado cada um destes gabaritos no diagrama de árvore que você completou?

Percebemos que cada possibilidade é formada por um caminho diferente, por um conjunto de segmentos que combinam possibilidades particulares de cada questão da prova para formar o gabarito.

Vejamos outro exemplo:

O Diagrama 7, a seguir, mostra as possibilidades geradas ao aplicarmos o princípio multiplicativo à seguinte situação:

“Temos dois tipos de calça: lisa e estampada; dois tipos de blusa: de manga comprida e de manga curta; e dois pares de sapato: um marrom e um preto. Vamos escolher uma calça, uma blusa e um par de sapatos. Quantas escolhas diferentes podemos fazer?”

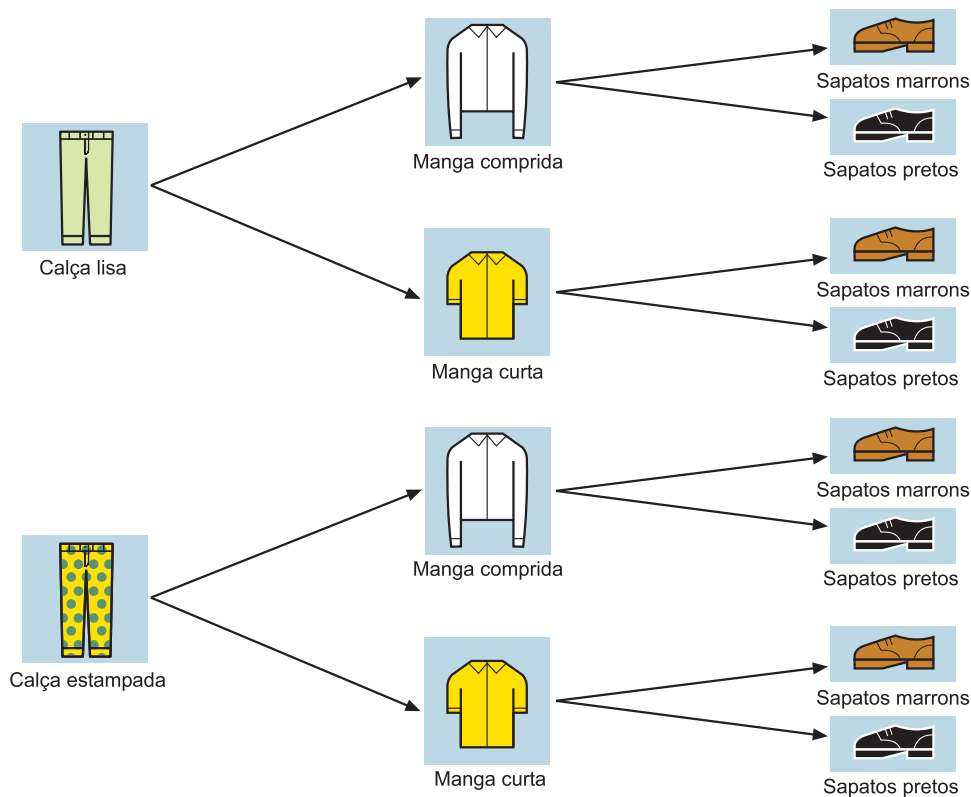
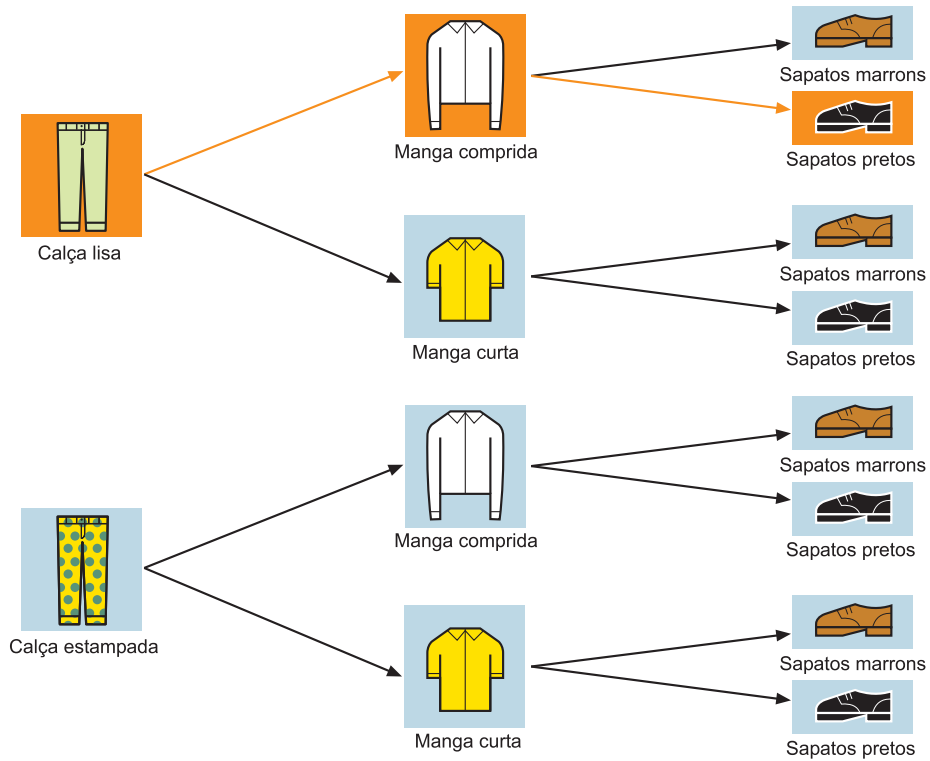


Diagrama 7

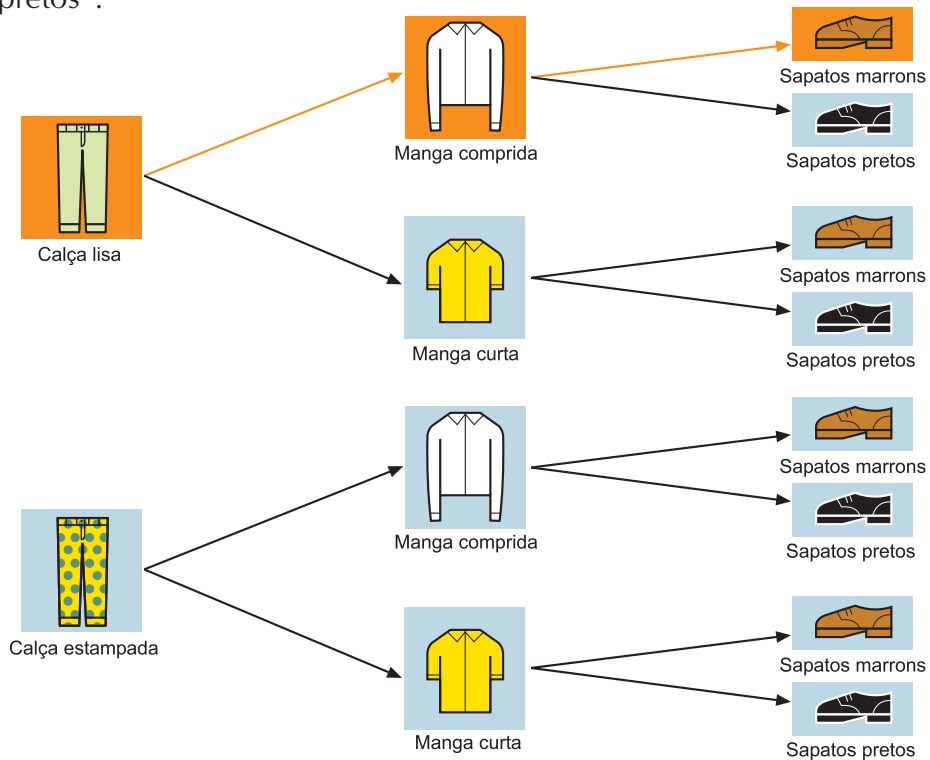
A possibilidade “calça lisa, blusa de manga comprida e sapatos pretos” é representada por um caminho no diagrama. A possibilidade “calça lisa, blusa de manga comprida e sapatos marrons” é representada por outro caminho. Os dois caminhos têm uma parte em comum, como vemos no Diagrama 8, partes “a” e “b”:

Diagrama 8: Visualização de possibilidades no diagrama de árvore



Parte a:  
Visualização da possibilidade  
“calça lisa, blusa de manga comprida  
e sapatos pretos”.

28



Parte b:  
Visualização da possibilidade  
“calça lisa, blusa de manga comprida  
e sapatos marrons”.

Diagrama 8



### Atividade 6

a) Construa um diagrama de árvore para representar a seguinte situação:

“Temos que montar um cardápio para um almoço. Podemos escolher um entre três tipos de carnes: ave, peixe ou boi. Também temos quatro tipos de raízes e queremos usar apenas uma: batata, cenoura, beterraba ou inhame. Além disso, temos três tipos de verduras, dentre as quais vamos escolher uma: agrião, couve ou espinafre”.

b) Use cores diferentes para mostrar onde estão representadas as possibilidades:

1. peixe, beterraba, couve;
2. ave, beterraba, agrião;
3. boi, batata, espinafre.

c) Faça dois novos diagramas para representar:

1. Um acréscimo de uma possibilidade de verdura: alface.
2. Uma nova possibilidade quanto à carne: “sem carne”.

Use cores diferentes para ressaltar as novas possibilidades criadas.



### Atividade 7

29

Ao jogarmos um dado, seis possibilidades de resultados: os números 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Ao lançarmos uma moeda, temos dois possíveis resultados: cara ou coroa. A Figura 1 mostra dois diagramas de árvore das possibilidades que temos ao lançarmos um dado e uma moeda simultaneamente, há diferença entre o diagrama (a) e (b).

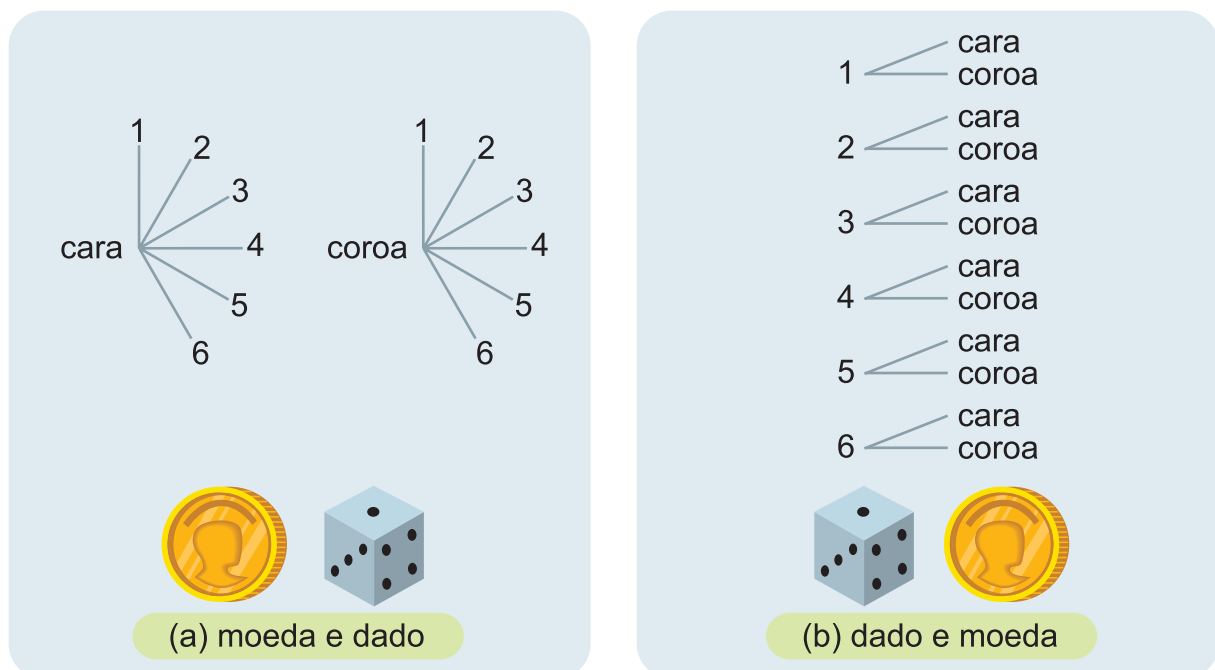


Figura 1

Repare que os diagramas (a) e (b) têm aparências distintas. O diagrama (a) mostra duas repetições das seis possibilidades de resultados do lançamento de um dado. O diagrama (b) mostra seis repetições das duas possibilidades de resultados do lançamento de uma moeda.

No entanto, as possibilidades representadas são as mesmas.

A ordem em que organizamos o diagrama de árvore não altera as possibilidades originadas.



## Resumindo

---

Nesta Seção, vimos que:

- Se temos que considerar  $n$  fatores e, para cada um deles, temos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  possibilidades de escolha, respectivamente, o número total de possibilidades de escolha que temos é:  $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$ . (Princípio fundamental de contagem ou princípio multiplicativo de contagem).
- Uma boa representação é um importante auxílio na resolução de problemas de contagem. Modos de representação originais precisam ser bem construídos e compreendidos para tornarem-se uma ferramenta para identificar e organizar possibilidades. Nesta Unidade, enfocamos o diagrama de árvore como uma forma de representação.
- Se a probabilidade de um evento  $A$  acontecer é  $p$ , e a probabilidade de um evento  $B$  acontecer é  $q$ , a probabilidade de os eventos  $A$  e  $B$  acontecerem simultaneamente é  $p \times q$ .

30

## Seção 3

### Transposição Didática – Princípio Fundamental de Contagem



## Objetivo da seção

---

Ao longo desta Seção, você irá:

- Examinar formas de ajudar os seus alunos a desenvolverem métodos sistemáticos de contagem, utilizando o princípio multiplicativo.
  - Conhecer as principais necessidades e dificuldades dos alunos na utilização do princípio multiplicativo de contagem.
-



Na Seção 2, examinamos o princípio fundamental de contagem e os modos de representação visual do princípio multiplicativo, utilizando diagramas de árvore.

Isto nos levou a ver como multiplicações podem ser vistas como iterações de certos atos ou operações.

O campo conceitual multiplicativo inclui as operações de iteratividade e de recursividade, e estas são habilidades e tipos de raciocínio pouco explorados com os alunos. No entanto, estas habilidades são importantes para o desenvolvimento de habilidades de contagem que não estejam simplesmente baseadas na aplicação de fórmulas.

As pesquisas sobre como ensinar o princípio multiplicativo destacam a importância do uso do diagrama de árvore. Trabalhe com os seus alunos a construção desse tipo de diagrama, propondo problemas de contagem e adicionando gradativamente mais possibilidades aos fatores envolvidos, como fizemos na Seção 2. Isto permitirá que eles desenvolvam o raciocínio recursivo.



### Atividade 8

---

Observe uma rima inglesa infantil, datada do século XVIII, que propõe um interessante problema de contagem. Represente o problema com um diagrama e responda a pergunta que aparece no final da rima:

31

## A Caminho de St. Ives

A caminho de St. Ives,  
Encontrei um homem com sete esposas,  
Cada esposa tinha sete sacos,  
Cada saco tinha sete gatas,  
Cada gata tinha sete filhotes,  
Filhotes, gatas, sacos e esposas,  
Quantos iam a caminho de St. Ives?

Santo Ivo - St. Ives, em sua língua original, é uma pequena cidade inglesa perto de Cambridge, que deve o seu nome ao bispo persa que morreu na localidade por volta de 600.

Esta é uma atividade muito interessante e muito produtiva que você, professor, deve desenvolver com os seus alunos.



### Atividade 9

---

Um problema similar ao visto anteriormente aparece no tratado chinês Manual Aritmético do Mestre Sol, do século III:

Vemos 9 aterros,  
cada aterro tem 9 árvores,  
cada árvore tem 9 ramos,  
cada ramo tem 9 ninhos,  
cada ninho tem 9 pássaros,  
cada pássaro tem 9 filhotes,  
cada filhote tem 9 penas,  
cada pena tem 9 cores.  
Quantos há de cada?

Novamente faça desenhos ilustrando esta situação, como forma de visualização do princípio multiplicativo, e encontre a resposta para a pergunta: “quantos há de cada?”

Proponha em sala de aula outros problemas simples, semelhantes aos das atividades, que envolvam o princípio multiplicativo de contagem em contextos que sejam familiares aos seus alunos. Registre e sistematize as produções de alguns.



### Resumindo

---

Nesta Seção, nós examinamos algumas formas de ajudar os seus alunos a desenvolverem métodos sistemáticos de contagem, utilizando o princípio multiplicativo e algumas estratégias de trabalho para o conhecimento das principais necessidades e dificuldades deles mesmos na utilização do princípio multiplicativo de contagem.

Vimos que o campo conceitual multiplicativo inclui as operações de iteratividade e de recursividade, que são habilidades importantes para o desenvolvimento de situações-problema de contagem que não estejam simplesmente baseadas na aplicação de fórmulas.

Novamente destacamos a importância do uso do diagrama de árvore para ensinar o princípio multiplicativo e a validade dos desenhos para ilustrar e visualizar este princípio.

## Leituras sugeridas

BACKY, A. C.; POPPE, L. M. B.; TAVARES, R.N.O. *Prelúdio à Análise Combinatória*. São Paulo: Nacional, 1975.

Neste livro encontramos alguns interessantes problemas para o início do estudo sobre a análise combinatória.

LIMA, C. P. *Genética: o estudo da herança e da variação biológica*. São Paulo: Ática, 2002.

Este livro apresenta algumas aplicações do raciocínio combinatório à Genética que poderão contribuir com o trabalho do professor, ilustrando como a Matemática é um instrumento de desenvolvimento da ciência.

## Bibliografia

BIGODE, A.J.L. *Matemática hoje é feita assim*. São Paulo: FTD, 2000.

DANTE, L.R. *Tudo é matemática*. São Paulo: Ática, 2002.

DANTE, L.R. *Matemática, contexto e aplicações*. São Paulo: Ática, 2002.

IMENES, L.M.P.; LELLIS, M. *Matemática*. 2ª ed. São Paulo: Scipione, 1997.

LONGEN, A. *Matemática: Uma atividade humana*. 1ª ed. Curitiba: Base Editora, 2003.

NELSEN, R.B. *Proofs Without Words . Exercises in Visual Thinking*. Published and distributed by The Mathematical Association of America, 1993.

PAIVA, M. *Matemática: Conceitos, Linguagem e Aplicações*. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2002.

VASCONCELOS, M.J.; SCORDAMAGLIO, M.T.; CÂNDIDO, S. *Matemática*. Coleção Matemática Ensino Médio. Projeto escola e cidadania para todos. São Paulo: Editora do Brasil, 2004.

### Sites Consultados

<http://jbonline.terra.com.br/jb/papel/cadernos/internet/2002/01/09/jorinf20020109001.html>

<http://www.cs.kent.edu/~potter/wwwace/www610/a-ac.html>

<http://www.malhatlantica.pt/mathis/Problemas/lves/lves.htm>

<http://www.pcs.usp.br/~jkinoshi/ftp/foca/foca3/ch-d-contas.html#s-d-contas-cms-senhas>

## Texto de referência

### Visualização e pensamento matemático<sup>4</sup>

Adaptado de *Proofs without words*<sup>5</sup>

Como parte de uma coletânea de artigos sobre visualização no ensino e na aprendizagem de Matemática, os autores Einsenberg e Dreyfus escreveram um texto onde afirmam:

O grande matemático Lefschetz via a Matemática não como lógica, mas como imagens. A respeito do que considerava construir um ser matemático, ele afirmava que “para ser um acadêmico da Matemática, é preciso nascer... com a habilidade de visualizar”.

HALMOS (*apud* EINSEBERG; DREYFUS, 1993)<sup>6</sup>.

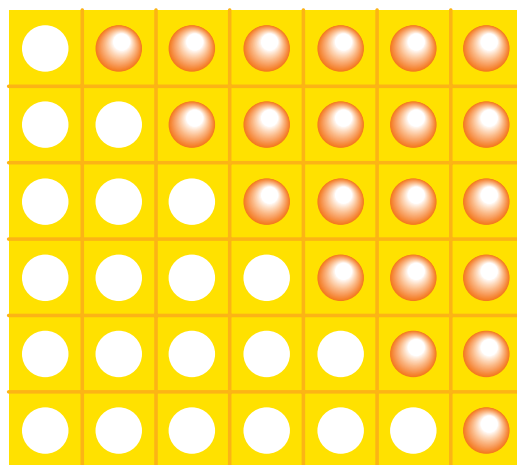
Muitos professores esforçam-se para desenvolver essa capacidade em seus alunos. O matemático Polya, famoso por seu livro *A arte de resolver problemas*, tinha sempre um conselho pedagógico clássico: “desenhe uma figura...”. São também bem conhecidas as posições de Einstein e Poincaré, de que devemos usar as nossas intuições visuais.

O objetivo deste texto é fazer você refletir sobre esse tema. O que você entende por visualização? Você consegue diferenciar a visualização de um objeto do cotidiano da visualização de um objeto matemático? Nesses objetos, estão incluídos sólidos: representações planas, gráficos e padrões numéricos.

Será possível, a partir da capacidade de visualização de objetos matemáticos, desenvolver o pensamento matemático? Vale a pena desenvolver essa capacidade nos alunos? Apresentaremos a seguir uma série de exemplos retirados do livro *Proofs without words*, que é traduzido como: problemas sem palavras. Nos três exemplos, você poderá perceber que existem uma imagem e uma fórmula matemática construída a partir da visualização desta imagem, ou seja, da construção de uma intuição visual.

Você poderá testar e desenvolver a sua própria capacidade de visualização, refletindo sobre a validade da implementação dessa proposta em sua prática pedagógica.

Exemplo 1:



4. Nilza Eigenheer Bertoni (tradução e adaptação).

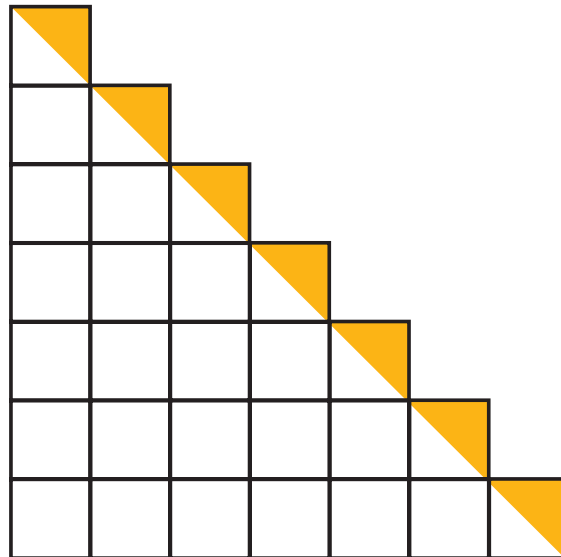
5. Livro *Proofs without words*, de Roger B. Nelsen. *The Mathematical Association of América*.

6. Paul Halmos, matemático norte-americano, que realiza pesquisas sobre o ensino da Matemática por meio de problemas.

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} n (n + 1)$$

Observe que o número de bolas (claras ou escuras) foi indicado pela soma do número de bolas em cada coluna e igualado ao número de bolas que ocupam a metade do retângulo.

Exemplo 2:



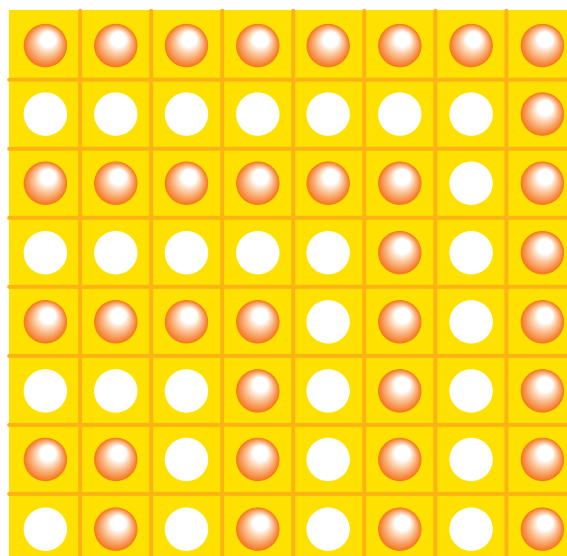
36

No primeiro membro, indique o número total de quadrados (incluindo os que estão divididos), representado pela soma do número de quadrados em cada coluna.

No segundo membro, pense na área do triângulo retângulo branco acrescida das áreas dos triângulos retângulos amarelos. Sendo  $n$  a quantidade de linhas, ou colunas contadas.

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

Exemplo 3:



Agora é com você!

Igual a soma total  $1 + 3 + \dots$  a um valor que você reconhece visualmente e generalize.



### Atividade 9

---

Professor, após esse estudo, busque outros exemplos em que o uso de figuras constituiu-se em elemento fundamental na resolução da situação-problema. Pesquisas<sup>7</sup> mostram que, na resolução de problemas em Matemática, a criação de uma figura auxilia o aluno a melhor representar o caminho que está sendo pensado, dando um suporte intuitivo e permitindo a melhor visualização do objeto matemático.

Oriente os seus alunos em experiências da utilização de sua intuição visual, pesquisando novos padrões numéricos e geométricos. Incentive-os a criar novos desafios.

---

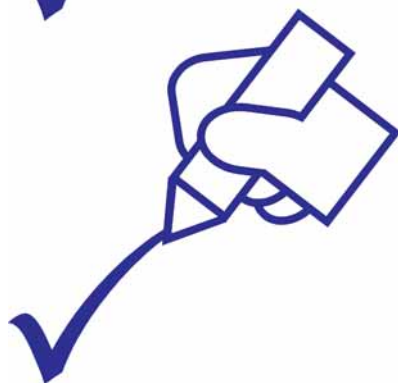
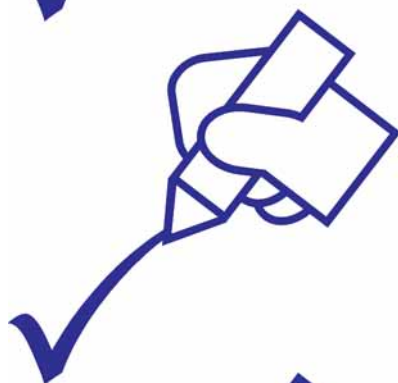
7. DUVAL, R. *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang, 1995.

BOLDA, C. F. *Geometria e visualização: desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração*. 152 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1997.





## Solução das atividades





# Solução das atividades

## Atividade 1

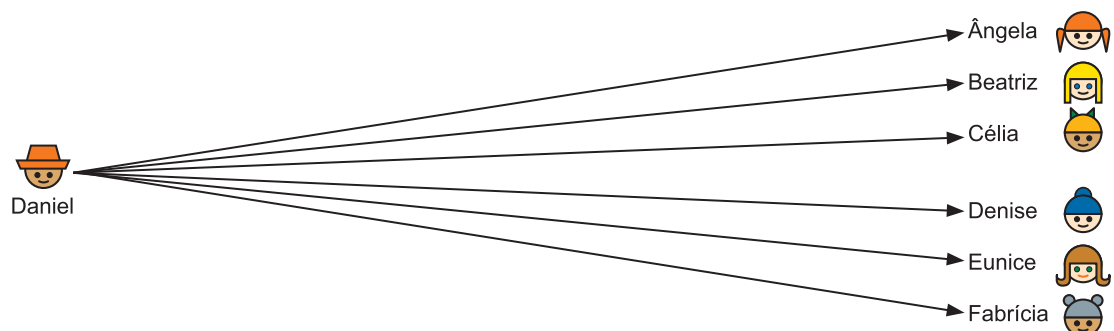
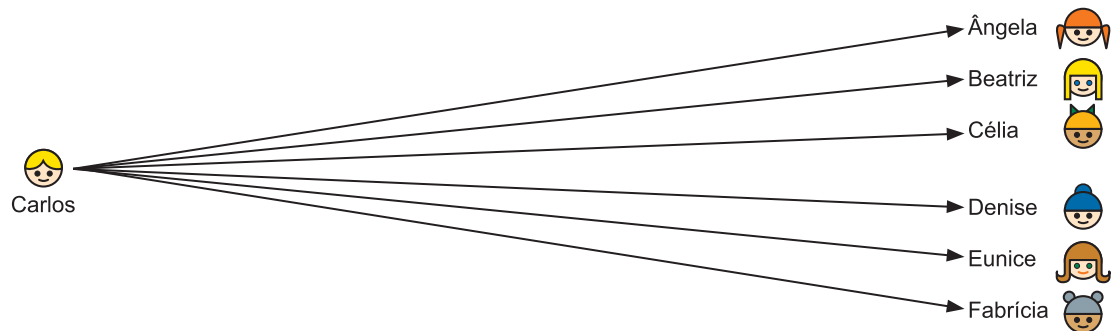
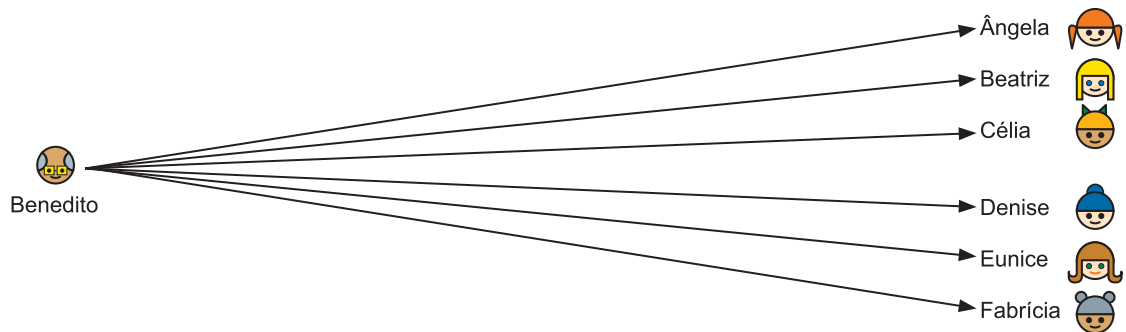
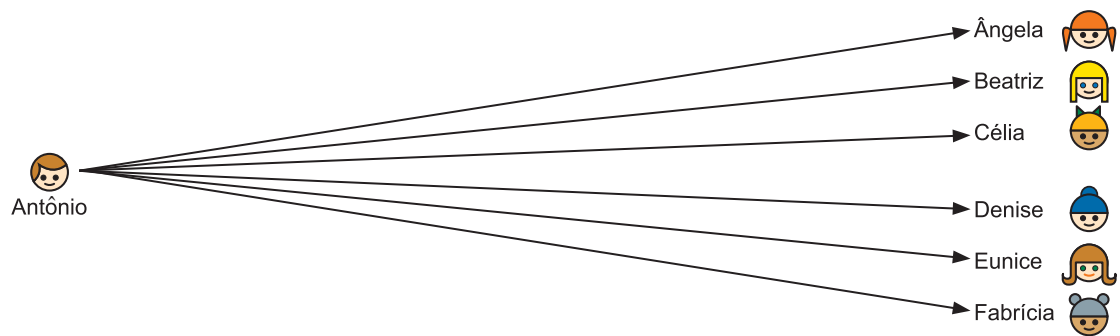
---

Resposta pessoal.

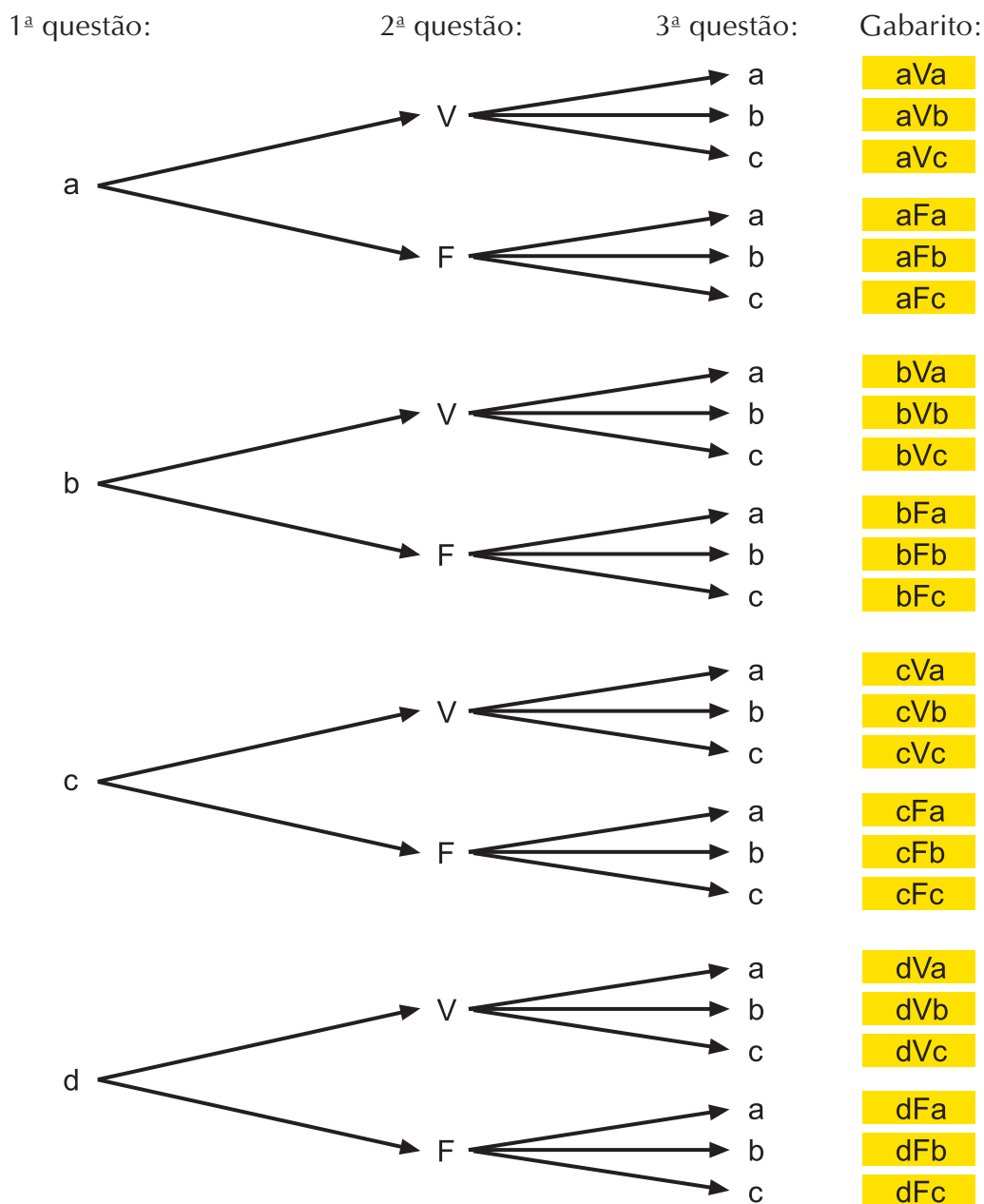
## Atividade 2

---

- a)  $\frac{1}{4}$  ou 25%.
- b)  $\frac{1}{6}$  ou 16,7%.
- c)  $\frac{1}{24}$  ou 4,2%.
- d) 24 casais.



### Atividade 3



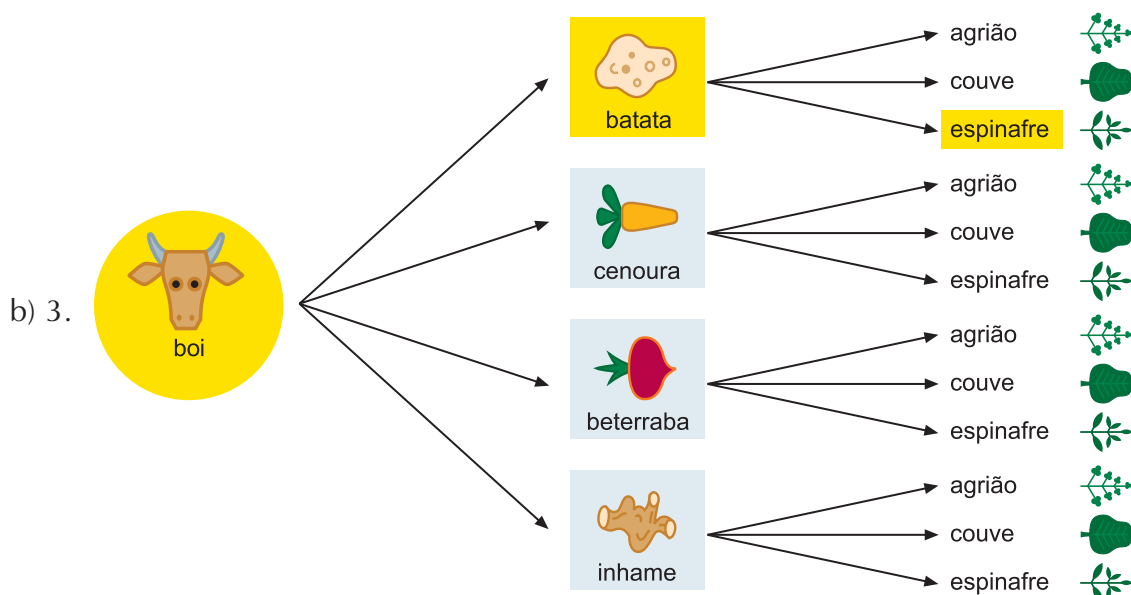
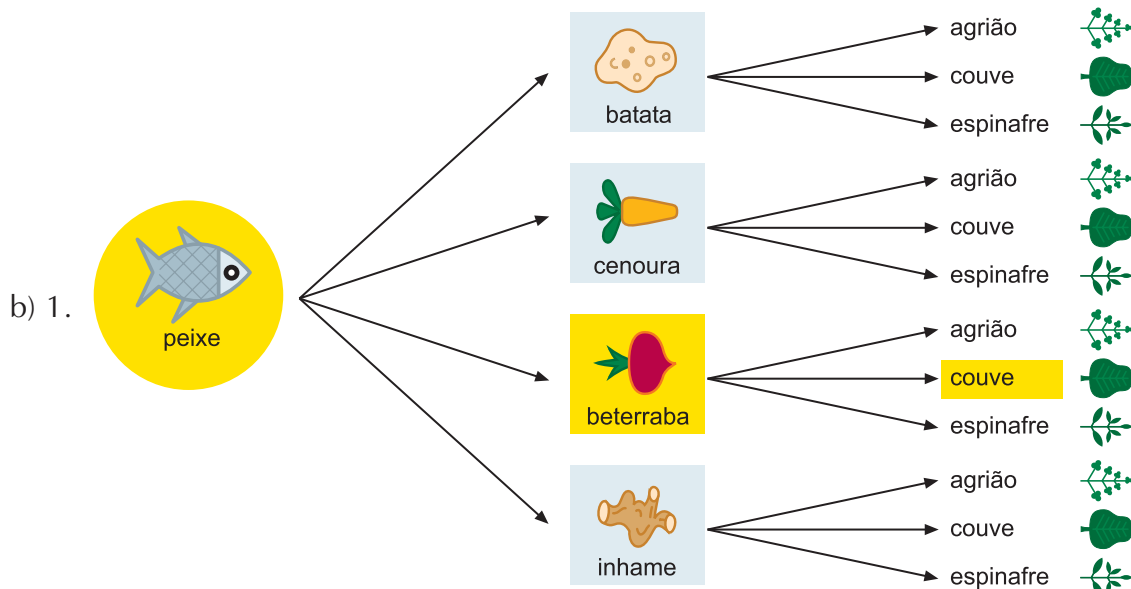
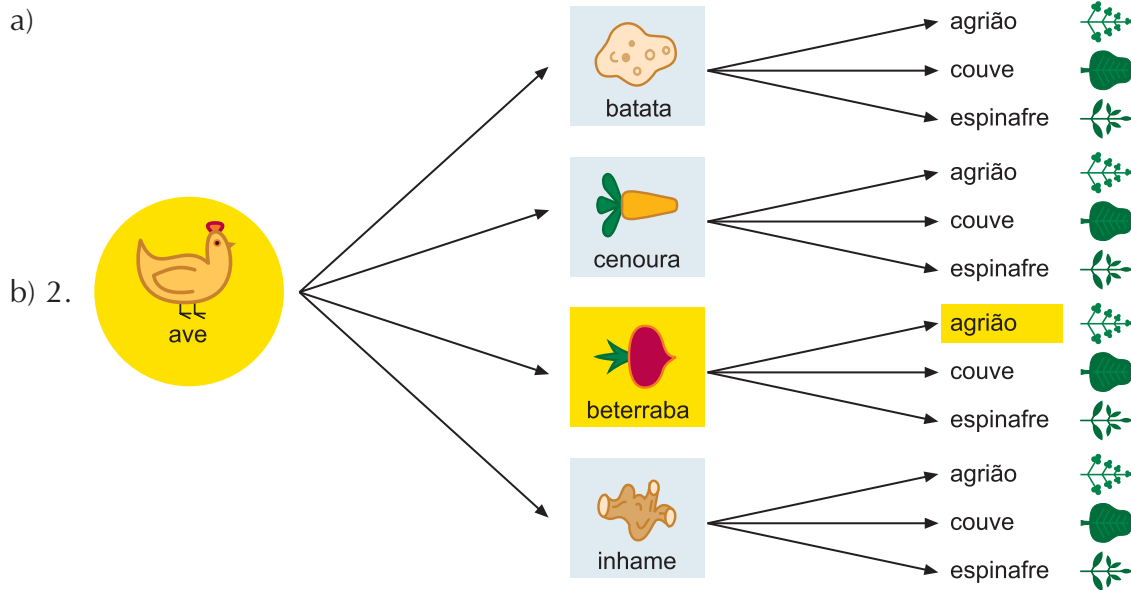
### Atividade 4

A resposta está no texto.

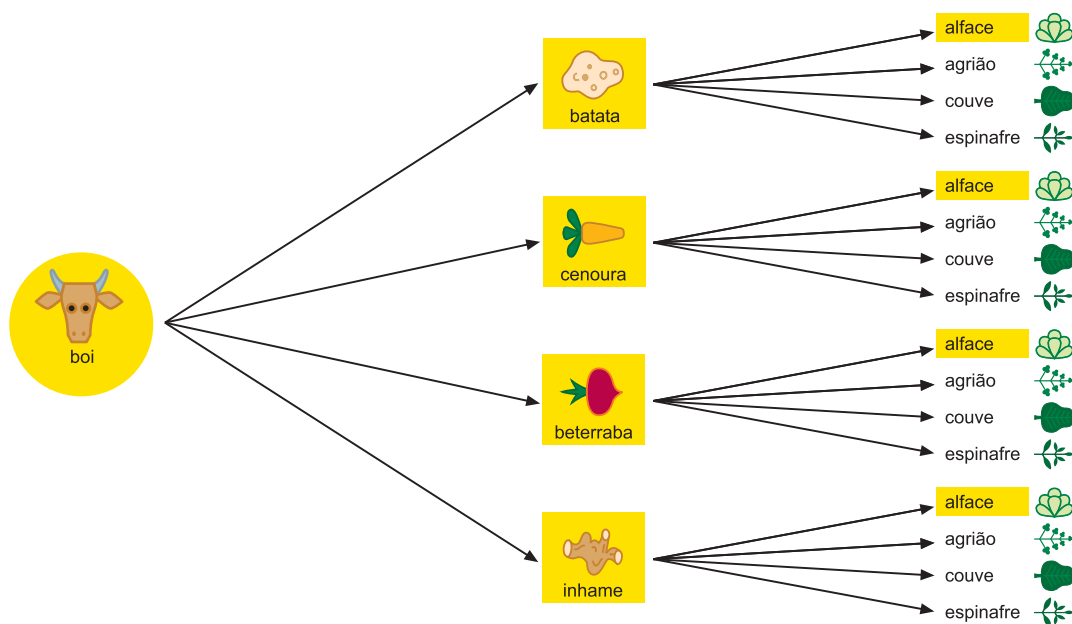
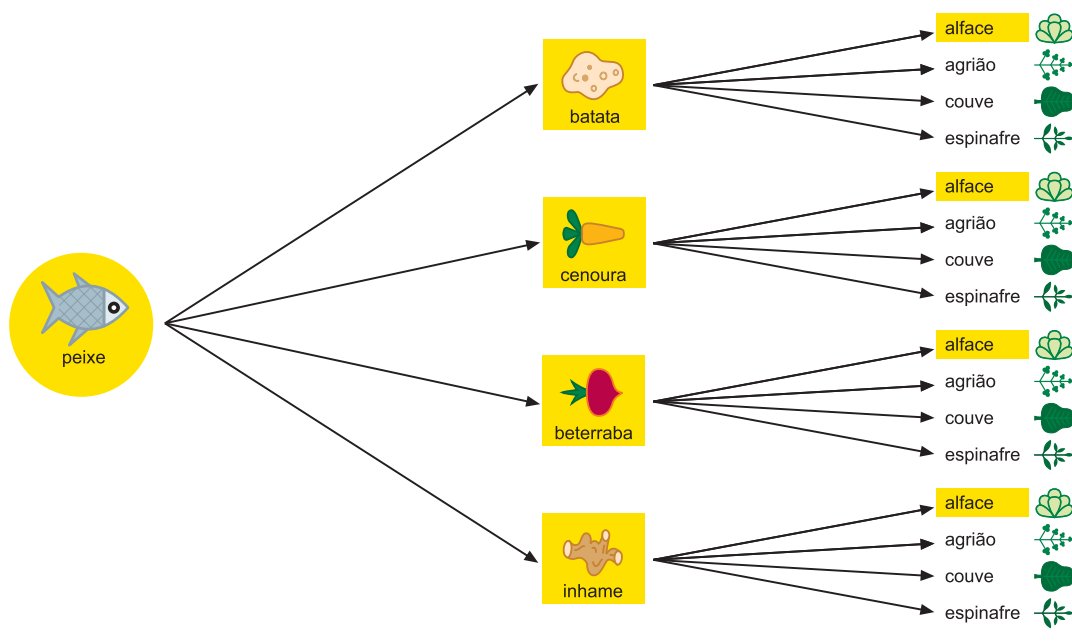
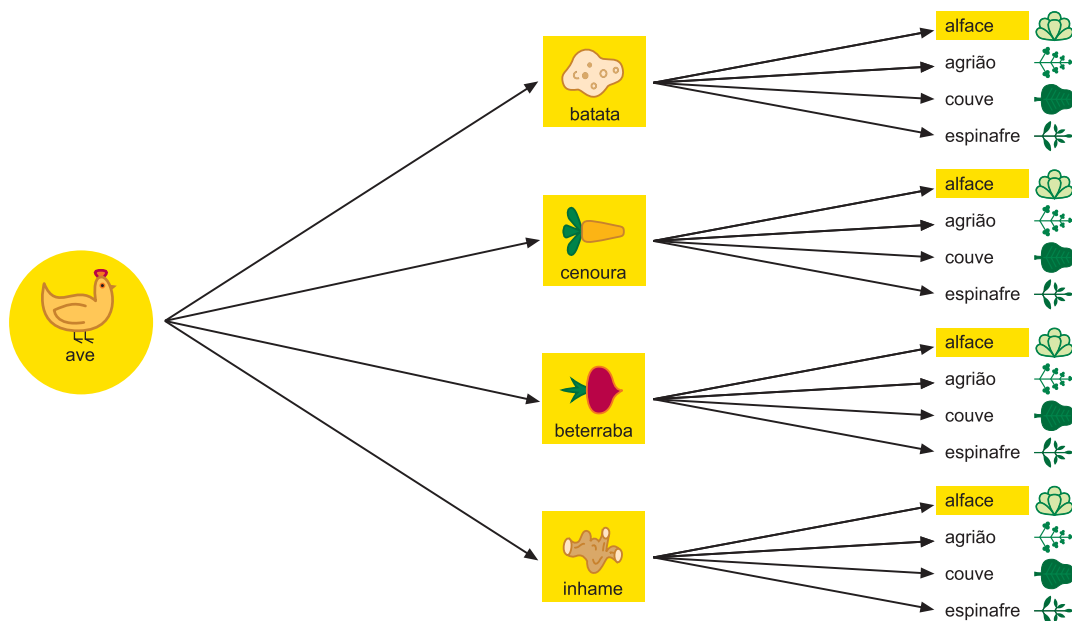
### Atividade 5

- a)  $4 \times 5 \times 4 \times 5 \times 3 = 1200$ .
- b)  $5 \times 5 \times 4 \times 5 \times 3 = 1500$ .
- c)  $4 \times 5 \times 4 \times 5 \times 4 = 1600$ .

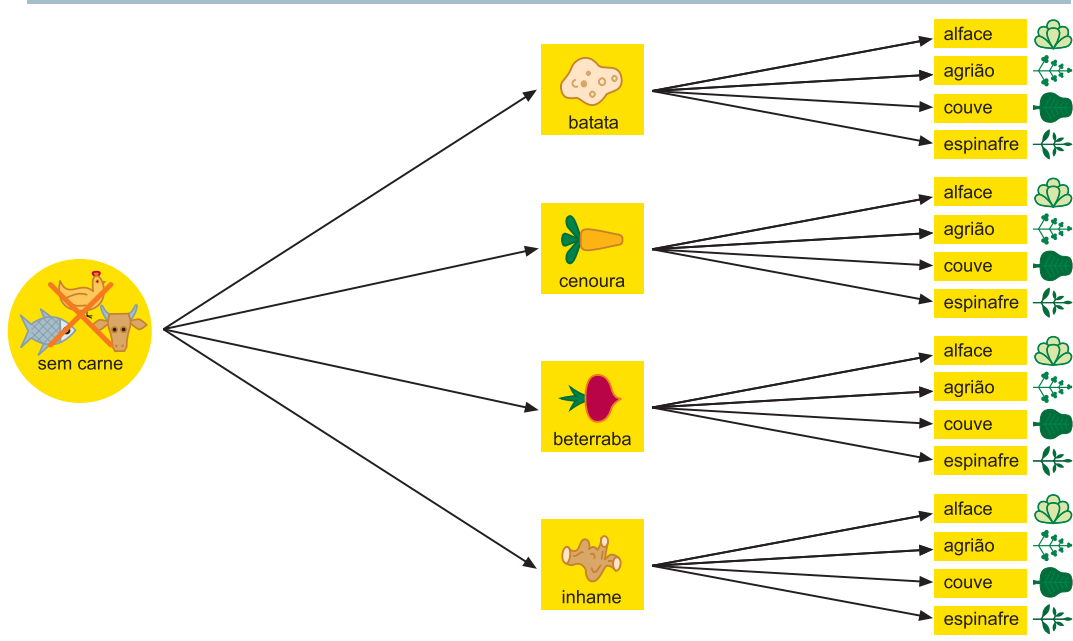
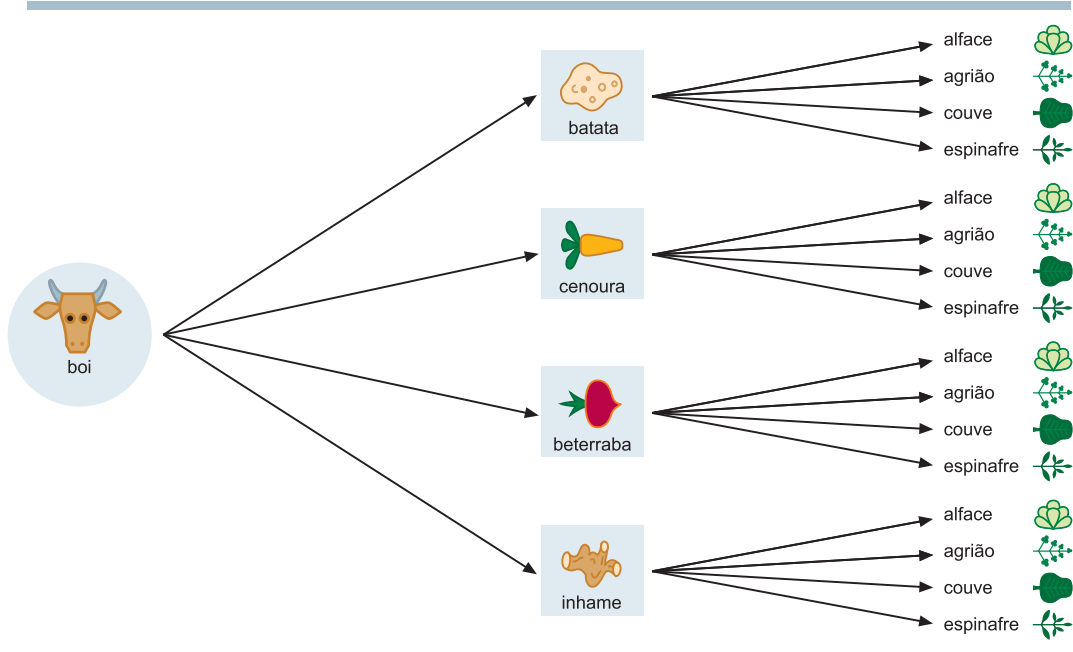
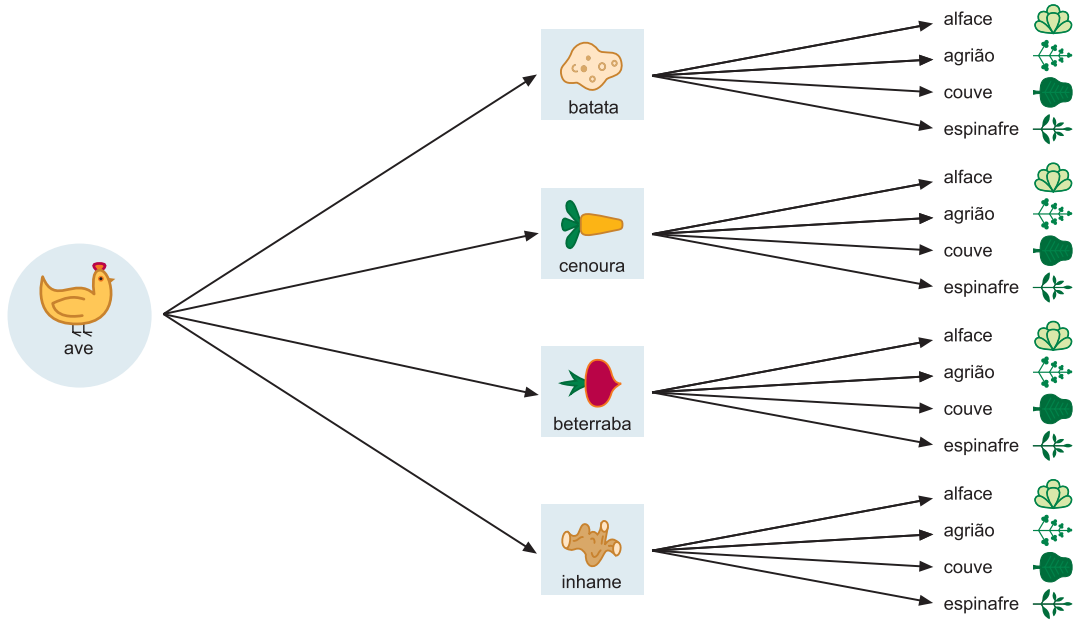
Atividade 6



c) 1.



c) 2.



### Atividade 7

Respondida no texto.

### Atividade 8

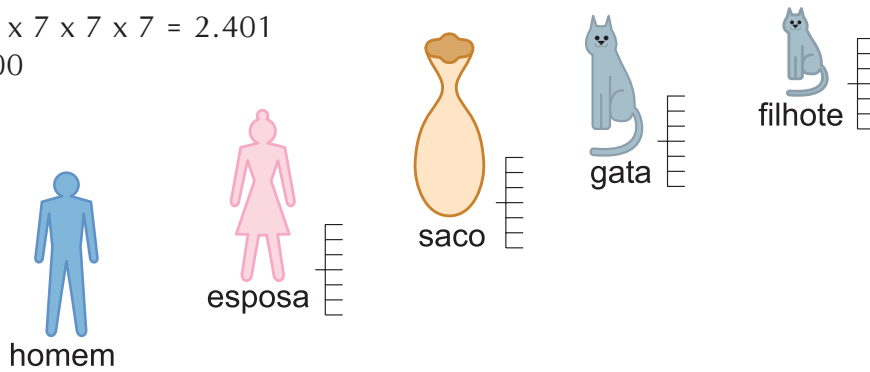
Esposas = 7

Sacos =  $7 \times 7 = 49$

Gatas =  $7 \times 7 \times 7 = 343$

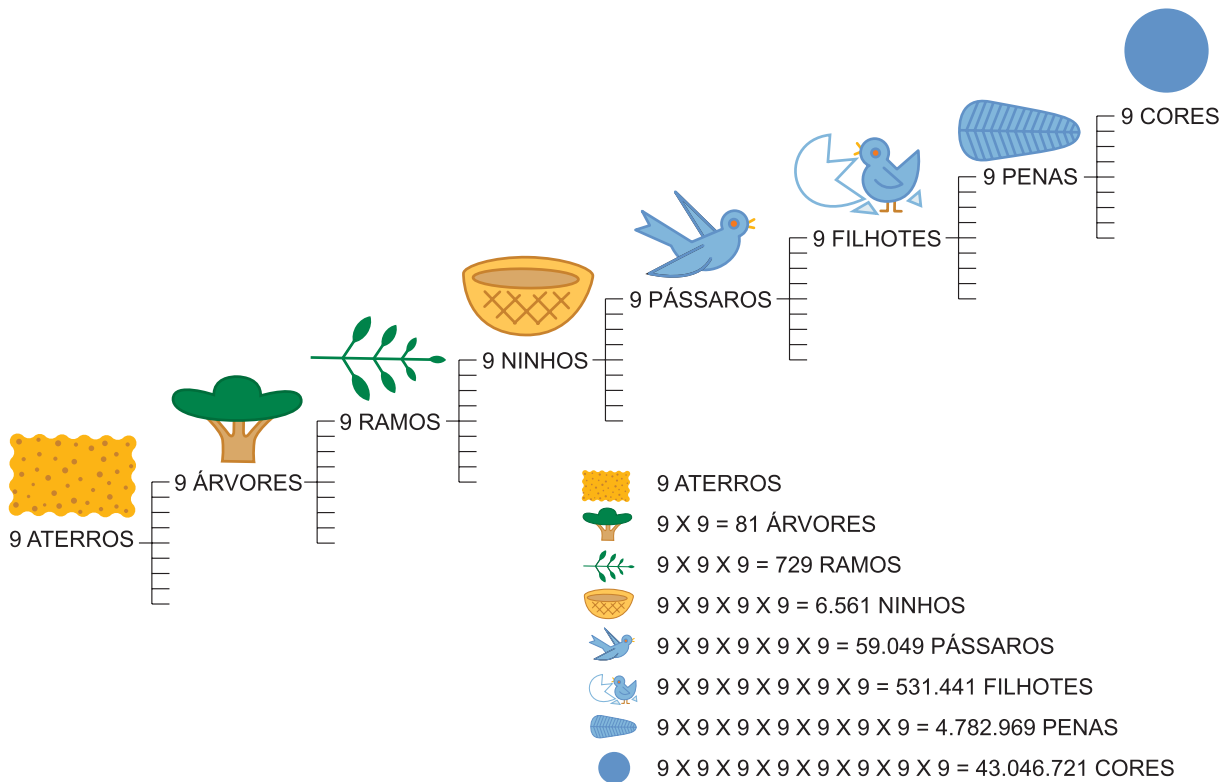
Filhotes =  $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2.401$

Total = 2.800



### Atividade 9

46





## Unidade 18

### Matemática e interações sociais

Ana Lúcia Braz Dias e Sinval Braga de Freitas



Iniciando a  
nossa conversa

Uma das idéias centrais dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) é a de que a educação contenha e se oriente por valores de reconhecimento e apreciação da diversidade cultural. O documento apresenta uma visão afirmativa desta diversidade como riqueza humana a ser explorada e traz um denso material a ser usado nas escolas, em todas as disciplinas. O tema da diversidade não se reduz, no entanto, à valorização construtiva da multiplicidade de culturas e tradições existentes no Brasil, mas abarca também a educação voltada para a quebra do preconceito, da discriminação e do racismo.

Uma das propostas do PCN é o combate à idéia da uniformidade da sociedade brasileira, à propagação do mito de que a sociedade brasileira tenha na homogeneidade uma realidade ou meta.

Incluir no currículo escolar elementos para construir um quadro verdadeiro do que é o Brasil é fundamental para mudar atitudes preconceituosas, educando as crianças em uma atmosfera onde se desenvolva o respeito à alteridade, à tolerância, à apreciação de tradições e a valores alheios.

As diferenças precisam ser vistas como um fato, não somente nas formas de manifestação cultural, mas também nas heranças genéticas de povos que vieram de várias partes do mundo para conviver no Brasil, e que trouxeram pluralidade também à aparência física das pessoas, o que se reflete no acesso aos espaços sociais, na possibilidade de participação na sociedade, nas formas de afirmação social e de experiências diversas de construção de cidadania.

É necessário que sejam pensadas ações permanentes que possibilitem ao aluno perceber essa multiplicidade de relações provenientes da pluralidade cultural existente em nosso país. Em todas as disciplinas, podem-se planejar atividades que permitam identificar, caracterizar, refletir e discutir sobre as diversas formas de inserção social das pessoas que, em suas diferenças, personificam a pluralidade cultural. A Matemática, como todas as outras áreas do conhecimento, pode ajudar a desenhar este quadro, no tratamento das informações existentes sobre as diversas raças do Brasil e o acesso delas à educação, saúde, emprego e boas condições de vida. A análise matemática dos dados que mostram quantitativamente o preconceito, a discriminação e o racismo podem, em muito, contribuir com a formação de idéias e atitudes.

Considerando estas afirmações, a Unidade está organizada em três Seções:

#### 1 – Resolução de uma situação-problema

Na situação-problema desta Unidade, você examinará um modelo matemático, retirado das aplicações da Matemática às Ciências Sociais, que procura relacionar tamanho de grupos

de pessoas com a tendência à geração de conflitos. O problema é apresentado de forma ilustrativa, permitindo que você possa investigar a situação com profundidade gradativa, evitando um pouco a complexidade que as questões sociais apresentam para a matematisação. Buscaremos guiá-lo para o exame de algumas relações e para a revisão de alguns conteúdos presentes neste contexto, tais como: a organização de dados, os problemas de contagem, combinatória e proporcionalidade. A situação-problema foi selecionada com a finalidade de ajudá-lo a perceber a necessidade de utilizarmos formas sistemáticas de contagem, com o objetivo de melhor compreender as questões sociais.

## 2 – Construção do conhecimento matemático em ação

Professor, continuamos nesta Unidade o estudo iniciado na Unidade 17 sobre as formas sistemáticas de contagem.

Nesta Seção, exploraremos os métodos de contagem, o princípio fundamental de contagem e o raciocínio combinatório.

## 3 – Transposição didática

Esta Seção discute problemas relacionados ao ensino-aprendizagem de conceitos vistos nas Seções 1 e 2 e sugere ações relacionadas para a sala de aula.

Como as outras Unidades, esta também conterá um Texto de Referência sobre Educação Matemática, que abordará o tema “Etnomatemática”.



### Definindo o nosso percurso

---

48

Ao longo desta Unidade, esperamos que você possa:

1 - Com relação aos seus conhecimentos matemáticos:

- Resolver situações-problema envolvendo métodos de contagem.
- Explorar o raciocínio combinatório.
- Utilizar a tabela como forma de representação do princípio multiplicativo. Isto será feito nas Seções 1 e 2.

2 - Com relação aos seus conhecimentos sobre Educação Matemática:

- Reconhecer a possibilidade de produção de conhecimento matemático por todos os grupos sociais.
- Perceber a relação entre legitimidade de formas diversas de conhecimento matemático e a posição sócio-econômica dos grupos que as produzem.

3 - Com relação à sua atuação em sala de aula:

- Elaborar atividades nas quais os seus alunos possam desenvolver formas sistemáticas de contagem.
- Formular situações em que métodos de contagem permitam que os alunos exercitem o raciocínio combinatório.

## Seção 1

# Resolução de situação-problema: “Contar para conhecer” – Métodos de contagem como forma de descobrir padrões e relações sociais



### Objetivo da seção

---

- Identificar a importância da Matemática no retrato das relações sociais.
- Examinar e criticar um modelo matemático.
- Rever o conceito de probabilidade.



### Integrando a matemática ao mundo real

---

#### Pluralidade e relações sociais

“Ação afirmativa” e “cotas” são termos amplamente utilizados no cenário atual brasileiro. Fala-se em cotas de 30% para mulheres em partidos políticos, em cotas de 20% de negros nas universidades, de 10% para portadores de deficiências nos cargos públicos etc., como forma de conceder oportunidades mais significativas a estes grupos que não têm tido acesso a estes espaços.

O assunto ainda é tabu, e muita gente prefere evitá-lo considerando que tais medidas só se justifiquem em países como os Estados Unidos e África do Sul, tão famosos na mídia por conflitos entre grupos sociais: grupos raciais lutando por igualdade, mulheres lutando por direitos, homossexuais buscando reconhecimento... Isto tudo parece coisa que só acontece em outros países. O que estará acontecendo com o Brasil?

Muitas pessoas tendem a acreditar que o motivo de esses grupos se manifestarem e dos conflitos virem à tona em outros países é que a situação deles lá deve ser pior do que a que se vive aqui. No entanto, o que faz a questão da convivência entre grupos sociais diversos ser diferente no Brasil não é tanto a natureza ou a magnitude das injustiças sociais existentes, mas uma diferença na percepção e nas crenças das pessoas.

Tradicionalmente, os brasileiros têm-se enamorado tanto da idéia de harmonia entre as raças que se negam a admitir que qualquer injustiça social tenha base na cor ou na aparência das pessoas. As injustiças e discriminações são atribuídas ao que se acostumou designar “preconceito social” em oposição a “preconceito racial”.

Em tempos recentes, porém, a natureza racial das desigualdades tem sido progressivamente demonstrada pelas pesquisas em Ciências Sociais.

Embora negada com indignação em discussões abertas, a discriminação no emprego, na escola e em outras situações do cotidiano tem sido amplamente pesquisada e documentada, ocorrendo tal como nas sociedades segregadas.

## Negros deixam a escola antes dos brancos, diz pesquisa

Estudo feito pelo Inep aponta dois dados preocupantes relacionados à desigualdade racial na educação brasileira. Alunos negros, quando ingressam na escola, param de estudar antes do que os brancos. Além disso, de 1995 a 2001, apresentaram uma queda mais acentuada no desempenho.

O levantamento também reforça o resultado de um trabalho de pesquisadores da PUC (Pontifícia Universidade Católica) do Rio de Janeiro, divulgado em maio. Estudantes negros estão aprendendo menos do que brancos de mesmo nível social e da mesma escola.

“Isso mostra que o preconceito influencia no desempenho do aluno. Existe um racismo difuso que impacta a auto-estima do negro.”, diz Carlos Henrique Araújo, diretor de avaliação da Educação Básica do Inep (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais), responsável pelo estudo.

Baseada em dados do Saeb (Sistema de Avaliação da Educação Básica) de 2001, a pesquisa mostra que, dos 3,7 milhões de alunos matriculados na 4ª série em escolas públicas e privadas, 12% se declararam negros e 44%, brancos.

O percentual de negros diminui para 8% na 8ª série e para apenas 6% no 3º ano do Ensino Médio. O caminho é inverso para brancos: 46% e 54%, respectivamente.

“Os negros são sistematicamente expulsos do sistema de ensino”, diz Araújo.

...Para Araújo, esses resultados mostram que o racismo existe, mesmo não sendo explícito. “O racismo difuso cria uma sensação no aluno de que não conseguirá obter sucesso.”, afirmou.

*Folha de S.Paulo, em Brasília. 15/07/2003 - 04h04.*

50

O que será que vem causando esta alta taxa de evasão de crianças negras da escola? Poderíamos argumentar que o problema é simplesmente econômico – já que as desigualdades econômicas entre brancos e não-brancos são evidentes. Entre os pobres, não apenas as famílias negras estão presentes acima de sua proporção na população geral, como também sua renda per capita está em um nível mais baixo, o que significa que mais pessoas da família devem trabalhar para conseguir uma renda familiar equivalente. As crianças freqüentemente precisam deixar de estudar para “ajudar a família”.

No entanto, pesquisas como a descrita no quadro acima são feitas entre crianças de mesmo nível social e da mesma escola, e ainda assim deixam claras as diferenças entre as taxas de evasão de crianças brancas e negras.

A resposta parece estar, como apontam visões contemporâneas, nas dificuldades de convivência que as crianças negras encontram na escola e na baixa expectativa que os professores têm quanto ao seu sucesso.

As pesquisas passam a ser feitas de modo diferente: ao invés de simplesmente apontarem a desigualdade existente, procuram investigar de perto o dia-a-dia das pessoas, buscando observar as relações interpessoais entre pessoas de grupos raciais distintos: como os coleguinhas brancos tratam a criança negra na escola? Como os professores agem com relação ao aluno negro?

Há também tentativas de **matematizar os conflitos de relacionamento**, criando modelos numéricos que permitam posteriormente o surgimento de políticas públicas numericamente adequadas.

Uma dessas tentativas examinou populações diversas e procurou quantificar os conflitos existentes. Depois criou um modelo matemático que previa que, em um grupo de tamanho  $n$ , a probabilidade de conflitos era proporcional não a  $n$ , mas a  $n^2$ . Qual seria a base matemática para a criação de tal modelo?

## Situação-problema – “Quantos grupos dentro de um grupo?” Matematizando conflitos de relacionamento

Vamos examinar a seguinte situação: por que, em grupos de  $n$  pessoas, a ocorrência de conflitos seria melhor descrita como proporcional ao quadrado de  $n$  do que como proporcional ao número de pessoas no grupo propriamente dito?

Para analisar esta situação, vamos ilustrá-la com casos específicos.



Suponha que, no parquinho da escola, exista um grupo de quatro crianças brincando: João, Maria, Francisco e José.

João se dá bem com Maria e com Francisco, mas não consegue brincar com José sem criar desavenças. Quando estes dois estão juntos, sempre acabam criando problemas.

Já com Francisco, José se dá bem. Com Maria, porém, ele já não gosta muito de brincar. Para ele, “meninas são um aborrecimento!”.

Bem, poderíamos continuar analisando como cada aluno interage com o outro. Mas vai demorar muito para contar a estória toda!

O caso é que, quando os quatro estão juntos, a incidência de desavenças é de duas por dia.

Agora, imagine que chegam no parquinho mais quatro criancinhas: Isabela, Pedro, Juliana e Tamires. “Fulano se dá com cicrano, que briga com beltrano...”. Todo professor sabe como são essas coisas. E quanto mais crianças dentro de uma sala de aula, ou de um parquinho, mais difícil é de se manter a disciplina e de não haver nenhuma briga! Mas será que estas duas variáveis: tamanho do grupo e quantidade de conflitos têm se mostrado proporcionais? Não, não têm. A quantidade de desavenças cresce muito mais rápido do que o tamanho do grupo.

O seu desafio é oferecer uma explicação para isso!



### Atividade 1

Imagine que o número de conflitos no parquinho fosse proporcional ao número de alunos. Como ficaria a Tabela 1? Preencha com os aumentos que deveríamos esperar no número de conflitos:

<b>Varição no grupo que está brincando no parquinho:</b>	<b>Aumento no número de conflitos observados:</b>
Chegaram Jorge e Marcelo	Mais uma briguinha
Chegaram Marta, Priscila, Karen e Felipe	Mais duas desavenças
Mais duas crianças	
Mais oito crianças	

Tabela 1- Registrando os conflitos

Lembre-se de que, para que duas grandezas variem proporcionalmente, uma mesma variação em uma das grandezas deve fazer com que a outra grandeza também varie em quantidades constantes. No caso aqui considerado, se a chegada de duas crianças (variação de “+2” no número de crianças) corresponde a mais uma briga (variação de “+1” no número de conflitos observados), para que estas grandezas variem proporcionalmente, toda vez que o número de crianças variar em “+2”, o número de conflitos observados deverá variar em “+1”. Conseqüentemente, se o número de crianças variar em “+4”, o número de conflitos observados deverá variar em “+2”, que foi o que aconteceu e está representado na segunda linha da Tabela 1.



### Atividade 2

Só que o modelo construído em pesquisa feita com dados reais sobre grandes populações não bate com este tipo de proporcionalidade. Cada pessoa a mais no grupo não aumenta de forma igual o número de conflitos!

Por que será?

Você se lembra da estória que estávamos contando sobre quem se dá bem com quem? Ela estava ficando longa, eram muitos pares de crianças para se descobrir quais costumavam se confrontar e quais não. Continue o trabalho:

- No grupo de João, Maria, Francisco e José, quantos pares de crianças podemos formar? Tente fazer uma lista.
- E quando o grupo aumentou para: João, Maria, Francisco, José, Isabela, Pedro, Juliana e Tamires?

Você deve estar percebendo que a nossa discussão está se baseando na suposição de que os conflitos ocorram entre pares conflitantes. E é nesta suposição que o modelo matemático que citamos se baseou.



### Atividade 3

Complete a Tabela 2. Procure um jeito de contar e de registrar as suas conclusões: Faça listas, diagramas ou calcule mentalmente – o que você achar melhor.

Número de pessoas	Número de pares possíveis	Número de pessoas que chegaram
2	1	+2
3	3	+3
4	6	+4
5	10	+5
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		

Tabela 2

Problemas que envolvem o cálculo do número de agrupamentos que podem ser feitos com os elementos de um conjunto, submetidos a certas condições, são resolvidos por meio de métodos que constituem a **análise combinatória**.

Será que existe um modo de se quantificar os pares sem a necessidade de realmente se contar os pares? Quer dizer, será que você consegue deduzir uma fórmula em termos de  $n$  que o permita determinar o número de pares possíveis em um grupo de tamanho  $n$  qualquer? Tente!



## Atividade 4

Vamos investigar o crescimento do número de pares possíveis em relação ao número de pessoas no grupo:

a) Coloque, no Gráfico 1, os dados da Tabela 2:

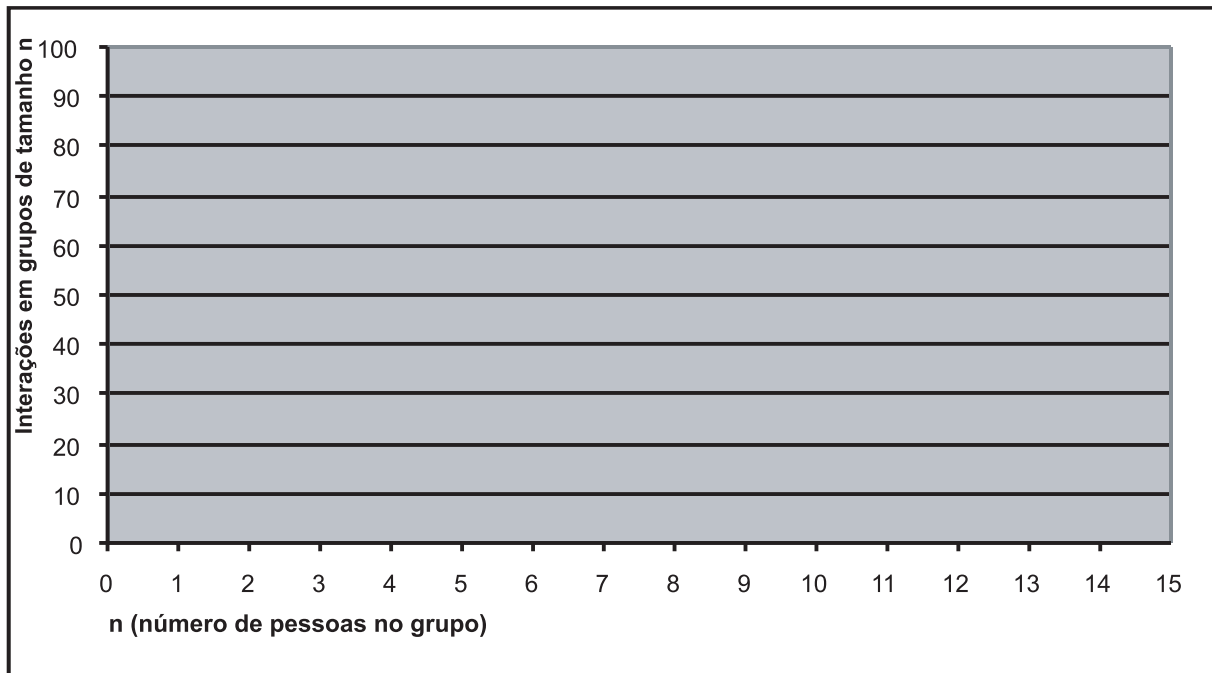


Gráfico 1

54

b) O que lhe parece? Parece uma boa aproximação dizer que o número de pares possíveis no grupo está crescendo proporcionalmente ao quadrado do número de pessoas no grupo? A função quadrática tem gráfico em forma de parábola. Para investigar a questão, que tal colocar também no Gráfico 1 os pontos relativos ao quadrado de  $n$ ?

c) Duas grandezas são proporcionais quando a razão entre elas permanece constante. Dê uma olhada na razão entre o número de pares possíveis no grupo e o quadrado do número de pessoas no grupo (colocamos estes dados na Tabela 3 para ajudá-lo em seus cálculos). O que você observa? Qual a sua opinião? O modelo oferece uma aproximação satisfatória? Podemos dizer que conforme aumenta a quantidade de pessoas em um grupo, e supondo que os conflitos surjam devido a interações entre pares, a quantidade de conflitos cresce proporcionalmente ao quadrado do tamanho do grupo?



Número de pessoas (n )	Número de pares possíveis (p )	$N^2$	$\frac{n^2}{p}$
2	1	4	4
3	3	9	3
4	6	16	2,66666667
5	10	25	2,5
6	15	36	2,4
7	21	49	2,33333333
8	28	64	2,28571429
9	36	81	2,25
10	45	100	2,22222222
11	55	121	2,2
12	66	144	2,18181818
13	78	169	2,16666667
14	91	196	2,15384615
15	105	225	2,14285714
16	120	256	2,13333333
17	136	289	2,125
18	153	324	2,11764706
19	171	361	2,11111111
20	190	400	2,10526316
21	210	441	2,1
22	231	484	2,0952381
23	253	529	2,09090909
24	276	576	2,08695652
25	300	625	2,08333333
26	325	676	2,08
27	351	729	2,07692308
28	378	784	2,07407407
29	406	841	2,07142857
30	435	900	2,06896552
31	465	961	2,06666667
32	496	1024	2,06451613
33	528	1089	2,0625
34	561	1156	2,06060606
35	595	1225	2,05882353
36	630	1296	2,05714286
37	666	1369	2,05555556
38	703	1444	2,05405405
39	741	1521	2,05263158
40	780	1600	2,05128205

## Ampliando o nosso registro em tabelas

Na Unidade 17, apresentamos uma situação-problema em que construímos uma tabela para enumerar todos os cruzamentos possíveis entre as possibilidades de dois fatores, por exemplo: duas questões de prova, dois gêneros (menino e menina).

E se tivermos mais do que dois fatores para trabalhar? Será que poderemos usar tabelas para nos ajudar a visualizar como isto aumentaria o número de possibilidades – bem como a organizar todas as possibilidades possíveis e não nos perder na contagem?

Você pode procurar outros meios de fazer isto.

Colocamos algumas idéias a seguir:



### Atividade 5

Digamos que, além de escolher o noivo e a noiva para o casamento da festa junina, precisemos escolher o padre. Os alunos que estão dispostos a ser o “padre” são: Augusto(A), Bruna(B) e Cristina(C).

Para cada casal encontrado na Atividade 2, da Unidade 17, abrimos três possibilidades de “padre”. Quantos trios diferentes de noivo, noiva e padre vamos ter?

56

Você já deve ter construído, na Atividade 2, uma tabela para representar todos os casais possíveis. Talvez você tenha feito uma tabela como a abaixo, onde colocamos um fator e as suas possibilidades na horizontal (na primeira linha), outro fator e as suas possibilidades na vertical (primeira coluna). Os possíveis cruzamentos são visualizados nas células interiores, que sombreamos de amarelo. Como estas células estão organizadas em 6 linhas e 4 colunas (uma tabela 6 x 4), são 24 possibilidades no total.

Noivo \ Noiva	Antônio (A)	Benedito (B)	Carlos (C)	Daniel (D)
Ângela (A)				
Beatriz (B)				
Célia (C)				
Denise (D)				
Eunice (E)				
Fabírcia (F)				

Tabela 4

Ao acrescentarmos um fator a mais – quem será o padre –, com três possibilidades, como aumenta o número de elencos possíveis para o casamento da festa junina?

Precisamos fazer um novo cruzamento de cada uma das 6 x 4 possibilidades de casais com cada possibilidade para “padre”.

As tabelas que vimos até agora usam duas “direções” ou dimensões para organizar dois fatores. Como poderíamos estender esta idéia para registrar três fatores? Como ficaria uma tabela de três entradas? Você tem alguma sugestão?

Podemos visualizar tabelas “empilhadas” ou colocadas lado a lado:

Cristina	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				
E				
F				

Tabela 5

Bruna	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				
E				
F				

Tabela 6

Augusto	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				
E				
F				

Tabela 7

Augusto	Bruna	Cristina
A	A	A
B	B	B
C	C	C
D	D	D
A	A	A
B	B	B
C	C	C
D	D	D
E	E	E
F	F	F

Tabela 8

Nos dois exemplos acima, vemos o padrão 6 x 4 das células amarelas se repetirem 3 vezes, uma para cada possível “padre”.

58

O total de possibilidades fica então representado pelas células amarelas – não vamos contar as células dos cabeçalhos.

$$6 \times 4 \times 3 = 72$$

É claro que podemos simplificar as tabelas desprezando os cabeçalhos anteriores. Ainda assim podemos ver o padrão de 3 vezes 6 x 4:

A			B			C		

Tabela 9



Vamos ver repetido 4 vezes o padrão que tínhamos antes, uma vez para cada turma. Podemos imaginar as três tabelas empilhadas que tínhamos, guardadas agora em 4 arquivos diferentes, um para cada turma:

TURMA A	TURMA B	TURMA C	TURMA D
C	C	C	C
A	A	A	A
B	B	B	B
C	C	C	C
D	D	D	D
A	A	A	A
B	B	B	B
C	C	C	C
D	D	D	D
E	E	E	E
F	F	F	F
B	B	B	B
A	A	A	A
B	B	B	B
C	C	C	C
D	D	D	D
A	A	A	A
B	B	B	B
C	C	C	C
D	D	D	D
E	E	E	E
F	F	F	F
A	A	A	A
B	B	B	B
C	C	C	C
D	D	D	D
E	E	E	E
F	F	F	F

Tabela 11

As células amarelas agora são  $6 \times 4 \times 3 \times 4 = 288$ .

## Seção 2

# Construção do conhecimento matemático em ação: Combinações



### Objetivo da seção

---

Ao longo desta Seção, você deverá ser capaz de:

- Resolver situações-problema envolvendo métodos de contagem.
  - Utilizar tabelas para representar o princípio multiplicativo.
  - Utilizar métodos de contagem para determinar probabilidade.
- 

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), encontramos o bloco de conteúdos denominado “Tratamento da Informação”, onde são agrupadas noções de Estatística, Probabilidade e Combinatória, com ênfase nos Problemas de Contagem envolvendo o princípio multiplicativo. Nesta Unidade estão sendo retomados os problemas nos quais se aplicam o princípio fundamental de contagem e que envolvem o raciocínio combinatório, porém utilizaremos a tabela como uma outra forma de representação das possibilidades de combinação. A continuidade deste conteúdo justifica-se por este estar presente no contexto social atual e ser muito útil na análise de dados e na tomada de decisões em diferentes situações onde se deve combinar fatores e características diferenciadas.

Um exemplo de como colocar em ação o conteúdo pode ser observado na situação-problema da Atividade 6, onde temos que pensar na melhor maneira de formar grupos com crianças: se há três crianças em uma fila, de quantas formas elas podem ser distribuídas? Onde, para não perdermos as contas, devemos aplicar alguns princípios de contagem, escrevendo sistematicamente as possibilidades.

61



### Atividade 6

---

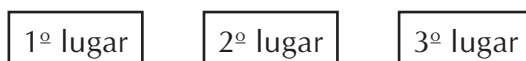


Observando as crianças no parque de diversões, em uma fila para brincar no pula-pula, vi que elas mudavam de lugar, procurando ficar perto de seus colegas para poderem pular juntos. Elas estavam agitadas; quem estava na frente até aceitava ceder a vez para poder pular com um coleguinha diferente, mas também não valia ficar tão atrás assim. Enquanto a sua vez não chegava, as crianças passavam bastante tempo procurando a melhor distribuição, ou seja, a melhor maneira de formarem grupos com os mais amigos, muitas vezes caindo em distribuições já consideradas.

Se há três crianças em uma fila, de quantas formas elas podem ser distribuídas?

Para não nos perdermos, como aconteceu com as crianças, repetindo as arrumações ou possivelmente esquecendo algumas, vamos escrever todas as possibilidades de forma organizada.

Vejam os:



Digamos que as crianças sejam: Alberto, Bruno e Carlos.

Vamos começar escolhendo quem vamos colocar no primeiro lugar. Lembre-se, queremos saber de quantas formas, no total, podemos arranjar as crianças. Então todos têm a chance de ficar no primeiro lugar.

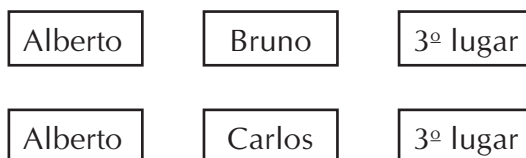
62

São três crianças. Então há três possibilidades para o 1º lugar da fila. Vamos começar por Alberto.



Uma vez escolhido Alberto para o 1º lugar da fila, quantas possibilidades temos para o 2º lugar? Como Alberto não pode mais ser escolhido, pois está no 1º lugar, temos duas possibilidades: Bruno ou Carlos.

Duas possibilidades:



Depois de escolhermos quem ficará no 2º lugar, o 3º lugar ficará obrigatoriamente escolhido: a outra criança ficará em terceiro.

Depois precisaremos repetir o procedimento para o caso de Bruno e Carlos ficarem em primeiro. Ao final, ficamos com seis possibilidades:



1º lugar	2º lugar	3º lugar
Alberto	Bruno	Carlos
Alberto	Carlos	Bruno
Bruno	Alberto	Carlos
Bruno	Carlos	Alberto
Carlos	Alberto	Bruno
Carlos	Bruno	Alberto

Tabela 12

Vejamos, em um diagrama de árvore, como se dão estas possibilidades.

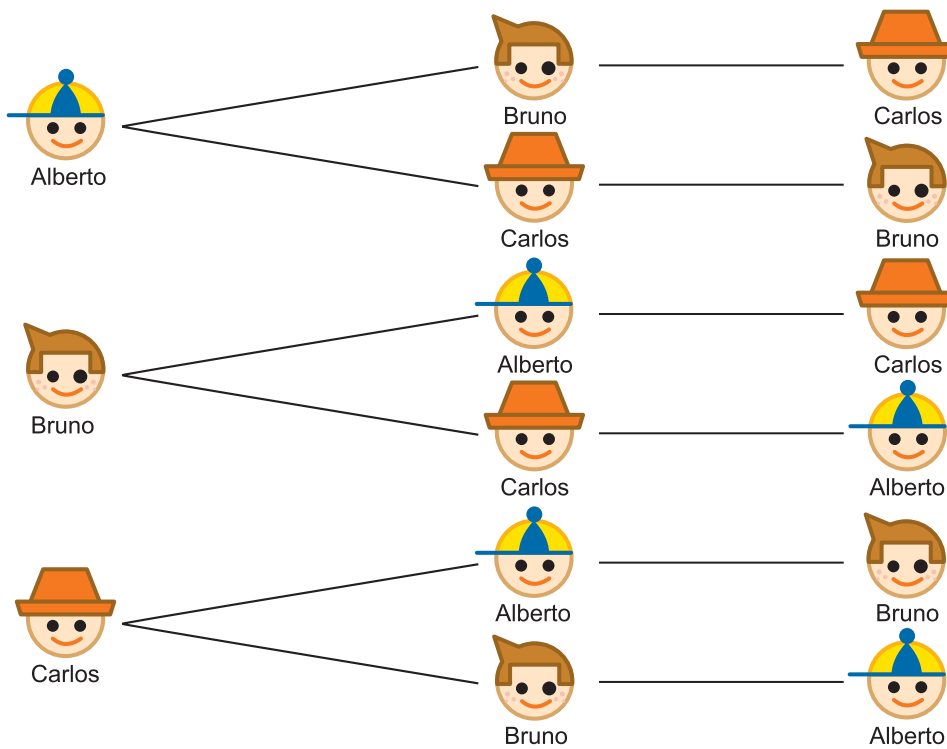


Diagrama 1



**Um recado para sala de aula**

A árvore de possibilidades é um instrumento importante utilizado no estudo de Combinatória; auxilia na visualização das possibilidades de como combinar os elementos envolvidos na situação. Pense em como explorar este instrumento em suas aulas, oportunizando ao aluno o exercício do raciocínio combinatório e a sistematização de formas de contagem.

Em muitas situações reais encontramos a possibilidade de formular problemas deste tipo: de quantas formas podemos organizar um grupo de objetos? Dizemos que estamos fazendo uma permutação de um conjunto de objetos (ou pessoas, ou itens), quando procuramos todos os arranjos possíveis destes objetos, cada arranjo contendo cada elemento uma vez, e sendo a ordem em que os elementos estão dispostos a única diferença entre dois destes arranjos.

Às vezes procuramos saber quais são estes diferentes arranjos; outras vezes, nos interessa apenas saber quantos deles há.

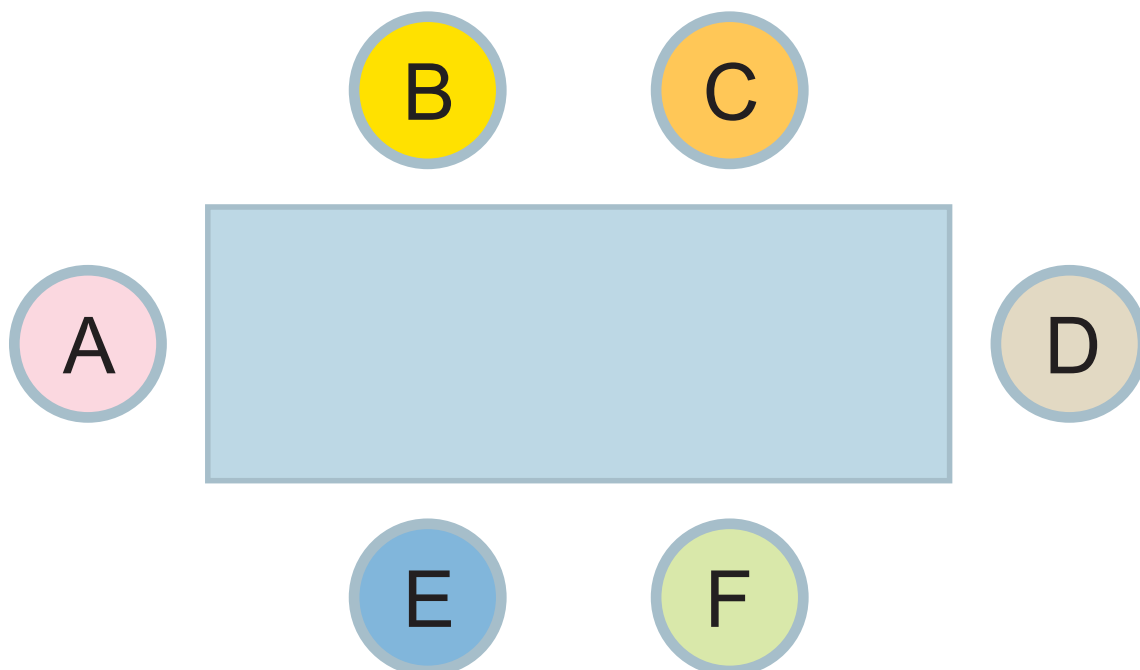


### Atividade 7

64

Professor, você deve ter observado que a distribuição das pessoas à mesa neste jantar parece não ter sido muito bem feita! Parece que todos preferiam sentar-se em lugares diferentes.

De quantas maneiras as seis pessoas do jantar mostrado na figura poderiam ser distribuídas, se mudarmos a ordem em que elas estão assentadas?





## Articulando conhecimentos

---

A história da Matemática nos permite conhecer quais foram as situações-problema que levaram à construção dos conceitos. Veja, por exemplo, que a análise combinatória surgiu dos jogos de azar. Os métodos de contagem foram sendo elaborados a partir da necessidade de se calcular o número de possibilidades existentes nos jogos. Grandes matemáticos estudaram este tema: Niccollo Fontana (1500-1557), conhecido como Tartaglia, Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662).

---

A possibilidade da realização de contagens e da sistematização de métodos de contagens em nosso dia-a-dia é muito freqüente, embora muitas vezes não estejamos atentos a isto. Veja, na Atividade a seguir, uma situação em que um simples princípio de contagem pode simplificar o nosso cálculo de opções para a escolha de meios de transporte.



## Atividade 8

---

Em 1999, era possível fazer uma viagem de ida e volta de São Paulo ao Rio de Janeiro utilizando trem, avião, ônibus ou carro. Hoje o trem está ativo apenas para carga. Quantas opções de viagem tinha uma pessoa que escolhesse um desses meios de transporte para ir e um para voltar?

65

O princípio de contagem utilizado nesta Atividade é simples, mas muito importante, pois pode resolver situações do nosso cotidiano. São muitos os resultados que podem ser previstos, bem como as possibilidades a serem estudadas, levando-se em conta esse modo de pensar.

Professor, ao realizar compras de móveis, você certamente deve ter planejado a melhor compra, pensando no espaço disponível para a colocação do móvel, na necessidade e real utilidade do móvel, na sua beleza (todos gostam de um ambiente bonito e confortável) e também no seu preço (será que posso pagar? A prestação cabe no meu orçamento?). Na Atividade a seguir, temos opções de mesas e cadeiras para você montar um cantinho para os seus estudos. Veja:



## Atividade 9

---

Quantas opções diferentes tem um consumidor que quer comprar uma das cadeiras e duas das mesas diferentes anunciadas a seguir? Em qual delas ele gasta mais? E menos<sup>1</sup>?



Mesa Estante  
R\$ 150,00



Mesa Compacta  
R\$ 107,00



Mesa Classic  
R\$ 75,00



Cadeira Giratória  
R\$ 51,00



Cadeira Diretor  
R\$ 119,00



Cadeira Classic  
R\$ 117,00

66



## Um recado para sala de aula

---

Você deve estar percebendo que a presença da análise combinatória em nosso dia-a-dia é bem maior do que muitas vezes imaginamos. Assim, não faz sentido este conteúdo ser trabalhado de modo estanque, descontextualizado. Trabalhando com análise combinatória você estará envolvendo o conceito de números, a ação de contar, as construções de padrões, a generalização de padrões, possibilitando a elaboração de fórmulas que nos permitem contar de forma mais rápida e eficiente. Os seus alunos podem divertir-se muito realizando problemas de contagem e combinação.

---

1. Questão adaptada do livro Matemática. Coleção Matemática Ensino Médio. Projeto Escola e Cidadania para todos – ver Bibliografia.

Nas Atividades a seguir, você estudará outras possibilidades de exemplificar e explorar a idéia de análise combinatória, observando a senha do cartão de uma conta corrente em um banco. Você pode simular esta situação com os seus alunos.



### Atividade 10

---

Uma pessoa, ao abrir uma conta corrente em um banco, deve escolher uma senha composta por quatro algarismos sem repetição para utilizar o seu cartão. Se esta pessoa gosta dos algarismos 7, 3, 5, 8 e deseja colocá-los em uma certa ordem para formar a senha, pergunte-se: qual é o número total de senhas que podem ser formadas com esses algarismos?



### Atividade 11

---

Suponha agora que um banco utilize dez opções de dígitos (0, 1, 2, ..., 9) para a composição da senha do cartão do cliente. A senha do cliente é dada por uma seqüência de quatro dígitos distintos. Se uma pessoa esqueceu a senha do cartão e quer tentar descobri-la, quantas tentativas deverá fazer (no máximo) para conseguir?

67



### Resumindo

---

Nesta Seção, os conteúdos de Matemática trabalhados foram:

- Métodos e princípios de contagem.
- Raciocínio combinatório.
- Aplicação da idéia de proporcionalidade.
- Utilização de tabelas para representar o princípio multiplicativo.
- Utilização de métodos de contagem para determinar probabilidade.

## Seção 3

# Transposição Didática – Princípio Multiplicativo de Contagem



### Objetivo da seção

Ao longo desta Seção, você irá:

- Conhecer diferentes tipos de problemas de contagem.
- Elaborar atividades nas quais os seus alunos possam desenvolver formas sistemáticas de contagem.

Combinatória é a matemática da contagem. Mais especificamente, é a arte de enumerar todos os possíveis modos nos quais um dado número de objetos pode ser misturado ou agrupado, de forma a haver a certeza de que não se deixará escapar nenhum resultado possível em sua contagem.

Os problemas resolvidos em combinatória podem envolver simplesmente uma reestruturação dos objetos dados (mudando a ordem em que se encontram) ou podem envolver a seleção de amostras, ou formação de grupos menores de objetos tirados do grupo original.

68

Quando o problema envolve a seleção de amostras, às vezes se permite a repetição de um ou mais elementos na amostra; às vezes, não.

Às vezes o problema considera importante a ordem em que os objetos aparecem na amostra; às vezes, não.

De acordo com esses dois aspectos, quantos tipos de problemas podemos formar?

Ordem é importante? Pode haver repetição?	Sim	Não
Sim	<b>Com repetição e com ordem</b>	<b>Com repetição e sem ordem</b>
Não	<b>Sem repetição e com ordem</b>	<b>Sem repetição e sem ordem</b>

Tabela 13

Vemos que há então quatro tipos básicos de problemas que podemos propor para os alunos. É importante que eles consigam trabalhar e propor estratégias próprias de solução para estes quatro tipos de problemas. O ensino deve desenvolver o raciocínio combina-

tório dos alunos e a sua habilidade de propor estratégias próprias de resolução de problemas, ao invés de enfatizar a aplicação de fórmulas prontas para problemas identificados por terminologia específica (você talvez já tenha tido que gastar tempo identificando se um problema é permutação, arranjo ou combinação, e decorando fórmulas para cada um destes casos – não vamos exigir isso dos alunos de 5ª a 8ª séries! Isso será objeto de aprendizagem no Ensino Médio.).

Pesquisadores<sup>2</sup> fizeram uma análise das principais características que podem ser variadas em problemas de combinatória para formar novos tipos de problemas, esquematizando-as de forma a ajudar professores a elaborar exemplos representativos de cada tipo de problema para os seus alunos.

De acordo com esta análise, os problemas de combinatória podem ser de três tipos: a) de seleção; b) de distribuição; e c) de partição.

a) Em problemas de **seleção**, é dado um grupo de objetos dos quais se pede para selecionar, escolher, tirar amostras, extrair ou formar grupos menores de objetos.

Por exemplo:

*Há quatro bolas numeradas em uma caixa, com os dígitos 2, 4, 7 e 9. Retiramos uma bola e anotamos o número que está escrito nela. Então colocamos a bola de volta na caixa. Repetimos este processo até formar um número de três dígitos. Por exemplo, podemos obter o número 222. Quantos números diferentes podemos formar desta maneira<sup>3</sup>?*

b) Em problemas de **distribuição**, é dado um grupo de objetos e se pede para que se distribua, atribua, guarde, ou se aloque alguns deles em um determinado número de lugares, como no exemplo abaixo:

*Suponha que tenhamos três convites idênticos, que podemos colocar em quatro envelopes diferentes: um amarelo, um azul, um vermelho e um verde. Só podemos colocar um convite em cada envelope. Por exemplo, podemos colocar um convite no envelope amarelo, um no azul e outro no verde, deixando o vermelho vazio. De quantas maneiras diferentes podemos fazer isto?*

Muitos aspectos destes problemas podem ser variados para formar problemas de tipos e níveis de dificuldade diferentes. Por exemplo:

- Os objetos a serem distribuídos podem ser iguais (como no exemplo dado) ou não.
  - Os lugares ou recipientes (envelopes, como no exemplo dado) podem ser iguais ou não (no exemplo dado, eles eram diferentes).
  - A ordem em que os objetos ocupam os recipientes pode ser importante ou não (no exemplo dado, a ordem não era importante porque os convites eram idênticos).
  - Pode haver um número máximo de objetos permitidos em cada recipiente ou não (no exemplo dado, só era permitido um convite por envelope).
  - Pode ser permitido ficar com recipientes vazios nos resultados ou não.
- c) Em problemas de **partição**, pedimos para repartir, dividir, decompor um grupo de objetos em subgrupos.

2. Dubois (1984); Carmen Batanero, Juan D. Godino e Virginia Navarro-Pelayo (1997).

3. Os problemas dados nesta Seção foram extraídos de Carmen Batanero, Juan D. Godino e Virginia Navarro-Pelayo (1997).

Por exemplo:

*João e Maria têm quatro figurinhas numeradas de 1 a 4. Eles decidem repartir suas figurinhas, ficando cada um com duas. Por exemplo, Maria poderia ficar com as figurinhas 1 e 2, e João com as figurinhas 3 e 4. De quantos modos eles podem repartir as figurinhas entre si, desta forma?*

ou

*Quatro crianças – João, Maria, José e Aline – foram passar férias na casa da vovó. A avó deles tem dois quartos na casa onde pode acomodar as crianças – uma suíte e um quarto de hóspedes. De quantas formas a vovó pode acomodar as crianças? Por exemplo, ela pode colocar todas as crianças no quarto de hóspedes. Ou pode colocar as meninas na suíte e os meninos no quarto de hóspedes. Quantas arrumações diferentes ela pode fazer?*

Alguém que tenha estudado análise combinatória mais a fundo pode reconhecer no problema das quatro crianças na casa da vovó um arranjo de dois objetos (os quartos disponíveis) tomados quatro a quatro, com possibilidade de repetição (um quarto para cada criança). Por exemplo, podemos atribuir, para João, Maria, José e Aline, “suíte, suíte, suíte e quarto de hóspedes”, respectivamente<sup>4</sup>.

Mas o aluno de 8ª série pode resolver este problema sem saber disso.

Ele pode, por exemplo, separar o problema nas seguintes possibilidades<sup>5</sup>.

- quatro crianças no quarto de hóspedes e nenhuma criança na suíte;
- três crianças no quarto de hóspedes e uma criança na suíte;
- duas crianças no quarto de hóspedes e duas crianças na suíte;
- uma criança no quarto de hóspedes e três crianças na suíte;
- nenhuma criança no quarto de hóspedes e quatro crianças na suíte.

E, para cada um destes casos, exaurir todas as possibilidades, jogando com os nomes das crianças.

70



### Articulando conhecimentos

Professor, ressaltamos aqui dois pontos importantes:

- Nesta proposta, trabalhamos na perspectiva da existência de um **Currículo em Rede**, em que é muito importante que as idéias sejam gradativamente lançadas, pois os conceitos não se formam em um único momento, muito menos de modo isolado, e encontram-se interligados, e a sua formação dá-se por um processo complexo e demorado, o que exigirá que eles sejam retomados sempre em novas atividades, em várias situações-problema. É incoerente, nesta perspectiva teórica e metodológica, pensar em um único momento de explicitação conceitual. Assim, as idéias, no currículo em rede, são lançadas, amadurecidas, transferidas, desestabilizadas e resgatadas.

4. Não é nosso objetivo aprender a diferença entre o que é chamado combinação, arranjo ou permutação – por isso não vamos entrar em detalhes aqui. O nosso objetivo é que você desenvolva estratégias para resolver diferentes problemas.

5. Adaptação da solução feita por uma aluna de 14 anos e relatada em Batanero *et al*, 1997.



- É importante promover uma articulação entre conceito e procedimento. Observe que os registros não servem apenas para comunicar as idéias matemáticas dentro de um grupo, mas também podem e devem constituir-se em ferramenta do processo do pensamento matemático: o registro ajuda o sujeito a refletir, levantar hipóteses, replanejar os seus procedimentos. Antes mesmo de ser um objeto de comunicação ao outro, o registro na atividade matemática deve servir de instrumento para o próprio aluno refletir sobre os seus processos de construção do conhecimento matemático.

Um dos principais motivos que levam alunos a cometerem erros na contagem de possibilidades é a falta de uma forma sistemática de representação e registro de todas as possibilidades.

É importante ajudar os seus alunos a perceberem a necessidade da adoção de uma forma de registro que os possibilite enumerar todos os possíveis modos nos quais um dado número de objetos pode ser agrupado, de forma a ter a certeza de não deixar escapar nenhum resultado possível em sua contagem.

Uma das formas em que isto pode ser feito é fornecendo atividades semi-estruturadas, onde tabelas ou listas já estão montadas ou parcialmente preenchidas e com as quais os alunos podem trabalhar para completar o registro dos resultados possíveis.

Na Atividade 12, a tabela já fornece uma forma sistemática que garante que todas as possibilidades serão catalogadas.



**Atividade 12**

Professor, utilize a tabela abaixo para representar os resultados possíveis, completando a última coluna com os devidos desenhos.























				desenhe a face resultante					desenhe a face resultante
•						•	•		
	•					•		•	
		•					•	•	
			•		•	•	•		
•	•				•		•	•	
•		•			•	•		•	
•			•			•	•	•	

Tabela 14

Professor, experimente pedir aos seus alunos que eles criem situações envolvendo contagens e probabilidades e promova na classe uma troca entre eles, permitindo que cada um resolva o que foi proposto pelo colega.



## Resumindo

Nesta Seção, vimos que:

- Combinatória é a matemática da contagem. Possibilita a enumeração de todos os possíveis modos de combinar um dado número de objetos e desenvolver formas sistemáticas de contagem.
- O ensino deve desenvolver o raciocínio combinatório do aluno e a sua habilidade de propor estratégias próprias de resolução de problemas, ao invés de enfatizar a aplicação de fórmulas prontas.
- Os tipos de problemas que podemos formar considerando a importância da ordem, ou se pode ou não haver repetição.
- Pesquisadores mostraram que os problemas de combinatória podem ser de três tipos:
  - problemas de seleção: é dado um grupo de objetos dos quais se pede para selecionar, escolher, tirar amostras, extrair, ou formar grupos menores de objetos;
  - problemas de distribuição: é dado um grupo de objetos e se pede para distribuir, atribuir, guardar, ou alocar alguns deles em um determinado número de lugares;
  - problemas de partição: pedimos para repartir, dividir, decompor um grupo de objetos em subgrupos.
- Alguns erros cometidos pelos alunos na contagem de possibilidades são consequência da falta de uma forma sistemática de representação e registro de todas as possibilidades.
- É importante fornecer atividades semi-estruturadas, onde tabelas ou listas já estão montadas ou parcialmente preenchidas e com as quais os alunos podem trabalhar para completar o registro dos resultados possíveis.

## Leituras sugeridas

D' AMBRÓSIO, U. *Etnomatemática – Elo entre as tradições e a modernidade*. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

O autor desenvolve conceitos sobre a essência da teoria Etnomatemática, trazendo uma abrangente visão humanística da matemática.

## Bibliografia

DANTE, L.R. *Tudo é matemática*. São Paulo: Ática, 2002.

DANTE, L.R. *Matemática contexto e aplicações*. São Paulo: Ática, 2002.

IMENES, L.M.P.; LELLIS, M. *Matemática*. 2ª ed. São Paulo: Scipione, 1997.

LONGEN, A. *Matemática: Uma atividade humana*. 1ª ed. Curitiba: Base Editora, 2003.

PAIVA, M. *Matemática Conceitos, Linguagem e Aplicações*. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2002.

VASCONCELOS, M.J.; SCORDAMAGLIO, M.T.; CÂNDIDO, S. *Matemática*. Coleção Matemática Ensino Médio. Projeto escola e cidadania para todos. São Paulo: Editora do Brasil, 2004.

### Sites Consultados

<http://www.educacional.com.br>

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/geometria.htm>

<http://vello.sites.uol.com.br/ubi.htm>

## Texto de referência

### Etnomatemática

Ubiratan d'Ambrósio\*

Temos evidências de uma espécie, um tipo de australopiteco, que viveu há cerca de 2,5 milhões de anos e utilizou instrumentos de pedra lascada para descarnar animais. É fácil entender que, ao se alimentar de um animal abatido, a existência de um instrumento, como uma pedra lascada, permite raspar o osso, e assim não só aproveitar todos os pedacinhos, mas também retirar dos ossos nutrientes que não seriam acessíveis ao comer só com os dentes. A espécie passou a ter mais alimento, de maior valor nutritivo. Esse parece ter sido um fator decisivo no aprimoramento do cérebro das espécies que dominaram essa tecnologia.

O que tem isso a ver com Etnomatemática?

Na hora em que esse australopiteco escolheu e lascou um pedaço de pedra, com o objetivo de descarnar um osso, a sua mente matemática se revelou. Para selecionar a pedra, é necessário avaliar as suas dimensões e lascá-la o necessário e o suficiente para cumprir os objetivos a que ela se destina, exige avaliar e comparar dimensões. Mas avaliar e comparar dimensões é uma das manifestações mais elementares do pensamento matemático. Esse é um primeiro exemplo de como o homem desenvolve os instrumentos materiais e intelectuais para lidar com o seu ambiente. Um primeiro exemplo de Etnomatemática é aquela desenvolvida pelos australopitecos do neolítico.

O homem busca explicações para todos os fenômenos da natureza e, naturalmente, associa essas explicações ao que vê mas não entende: clima, dia e noite, astros no céu. O que está acontecendo e o que se percebe e se sente a todo instante podem ser indicadores do que vai acontecer. Esse é o mistério. Como perguntar ao divino o que vai acontecer? Através de técnicas de “consulta” ao divino. Essas técnicas são as chamadas artes divinatórias. Como influenciar o divino para que aconteça o desejável, o necessário, o agradável? Através de culto, sacrifício, magia.

As religiões são sistemas de conhecimento que permitem mergulhar no passado, explicando as causas primeiras, desenvolvendo um sentido de história, organizando tradições e influenciando o futuro. O conhecimento das tradições é compartilhado pelo grupo. Continuar a pertencer ao grupo após a morte depende de assumir, em vida, o comportamento que responda ao conhecimento compartilhado. Esse comportamento, compatível e aceito pelo grupo, é subordinado a parâmetros que chamamos de valores.

Uma das coisas mais importantes no nosso relacionamento com o meio ambiente é a obtenção de nutrição e de proteção das intempéries. Conhecendo o meio ambiente, temos condições de fazer com que a capacidade de proteger e nutrir dependa menos de fatores como o tempo. Ao dominar técnicas de agricultura e de pastoreio e de construções, os homens puderam permanecer num mesmo local, nascer e morrer no mesmo local. Perceberam o tempo

---

\* Professor Emérito de Matemática da Universidade Estadual de Campinas / UNICAMP. Presidente da Sociedade Brasileira de História da Matemática. Desenvolve pesquisas sobre Etnomatemática. As mais recentes publicações estão disponíveis no site: <http://vellow.sites.uol.com.br/ubi.htm>.

necessário para a germinação e para a gestação, o tempo que decorre do plantio à colheita. Num certo momento, uma configuração no céu coincide com plantinhas que começam a brotar. É uma mensagem divina. Aprende-se a interpretar essas mensagens que geralmente são traduzidas em períodos característicos do que chamamos as estações do ano.

A inseminação foi mais difícil de ser percebida, mas o tempo que vai da gestação ao nascimento é mais facilmente reconhecido. A regularidade do ciclo menstrual e o relacionamento de sua interrupção com a gestação são logo reconhecidos. O reconhecimento, e registro, do ciclo menstrual, associado às fases da Lua, parece ter sido uma das primeiras formas de Etnomatemática.

A agricultura teve grande influência na história das idéias dos povos da bacia do Mediterrâneo. As teorias que permitem saber quais os momentos adequados para o plantio surgem subordinadas às tradições. Chamar essas estações e festejar a sua chegada, como um apelo e posterior agradecimento ao responsável pela regularidade, um divino, marcam os primeiros momentos de culto e de religião. A associação de religião com a Astronomia, com a agricultura e com a fertilidade é óbvia.

A Matemática começa a se organizar como um instrumento de análise das condições do céu e das necessidades do cotidiano. Em todos os rincões do planeta e em todos os tempos, foram desenvolvendo-se idéias matemáticas importantes na criação de sistemas de conhecimento e, conseqüentemente, comportamentos necessários para lidar com o ambiente, para sobreviver e para explicar o visível e o invisível.

A cultura, que é o conjunto de comportamentos compatibilizados e de conhecimentos compartilhados, inclui valores. Numa mesma cultura, os indivíduos dão as mesmas explicações e utilizam os mesmos instrumentos materiais e intelectuais no seu dia-a-dia. O conjunto desses instrumentos se manifesta nas maneiras, nos modos, nas habilidades, nas artes, nas técnicas, nas *ticas* de lidar com o ambiente, de entender e explicar fatos e fenômenos, de ensinar e compartilhar tudo isso, que é o *matema* próprio ao grupo, à comunidade, ao *etno*. O conjunto de *ticas* de *matema* num determinado *etno* é o que chamo Etnomatemática. Claro, em ambientes diferentes, as Etnomatemáticas são diferentes.

Uma das coisas principais que aparecem no início do pensamento matemático são as maneiras de contar o tempo. Na História da Matemática (e agora falo da matemática acadêmica), que tem a sua origem na Grécia, os grandes nomes são ligados à Astronomia. A geometria, na sua origem e no próprio nome, está relacionada com as medições de terreno. Como nos conta Heródoto, a geometria foi apreendida dos egípcios, onde era mais do que uma simples medição de terreno, tendo tudo a ver com o sistema de taxaçoão de áreas produtivas. Por trás desse desenvolvimento, vemos todo um sistema de produção e uma estrutura econômica, social e política, exigindo medições da terra e, ao mesmo tempo, aritmética para lidar com a economia e com a contagem dos tempos.

Enquanto esse sistema de conhecimento se desenvolvia, há mais de 2.500 anos, nas civilizações em torno do Mediterrâneo, os indígenas aqui da Amazônia estavam também tentando conhecer e lidar com o seu ambiente, desenvolvendo sistemas de produção e sistemas sociais que igualmente necessitavam de medições de espaço e de tempo. Igualmente, os esquimós, as civilizações andinas e aquelas da China, da Índia, da África sub-Sahara, enfim, de todo o planeta. Todas estavam desenvolvendo as suas maneiras de conhecer.

Sistema de conhecimento é o conjunto de respostas que um grupo dá aos pulsões de sobrevivência e de transcendência, inerentes à espécie humana. São os fazeres e os saberes de uma cultura.

Há cerca de 2.500 anos, surge uma alternância de poder na região do Mediterrâneo. Egípcios e babilônicos alternam a sua hegemonia, subordinando o seu conhecimento e comportamento a um amplo politeísmo. São desafiados pela grande inovação, proposta pelos judeus, de um deus único e abstrato. Os gregos e, logo a seguir, os romanos, igualmente politeístas, expandem o domínio do Mediterrâneo para o leste, conquistando civilizações milenares, como as da Pérsia e as da Índia, e para o norte europeu, conquistando os povos bárbaros. Grécia e Roma impõem os seus sistemas de conhecimento e a sua organização social e política. Com a adoção do monoteísmo cristão, Roma impõe a sua ciência, tecnologia, filosofia, política e religião à grande parte da Eurásia acima do Trópico de Câncer.

O Império Romano, impondo as suas maneiras de responder aos pulsões de sobrevivência e de transcendência, mostrou-se eficiente no encontro com outras culturas, tendo sucesso na conquista e na expansão. O apogeu desse sucesso se dá na transição do século XV para o século XVI. Em cerca de 25 anos, navegadores da Espanha e de Portugal circunavegaram o globo. Foram logo acompanhados por outras nações européias e, através dos mares, foram para o Norte, Sul, Leste, Oeste, para todos os lados, conquistando povos e levando as explicações e modos de lidar com o ambiente, modos e estilos de produção e de poder. Iniciou-se o processo de globalização do planeta.

Claro que, ao falarmos em conquista, estamos admitindo um conquistador e um conquistado. O conquistador não pode deixar o conquistado se manifestar. A estratégia fundamental no processo de conquista de um indivíduo, grupo ou cultura (dominador) é manter o outro indivíduo, grupo ou cultura (dominado) inferiorizado. Uma forma, muito eficaz, de manter um indivíduo, grupo ou cultura inferiorizado é enfraquecer as raízes que dão força à cultura, removendo os vínculos históricos e a historicidade do dominado. Essa é a estratégia mais eficiente para efetivar a conquista.

A remoção da historicidade implica a remoção da língua, da produção, da religião, da autoridade, do reconhecimento da terra e da natureza e dos sistemas de explicação em geral. Por exemplo, hoje qualquer índio sabe o Pai Nosso e crê em Deus e em Cristo, embora todo esse sistema não tenha nada a ver com as suas tradições. Ao remover o sistema de produção, o dominado passa a comer e a gostar do que o dominador come. Os sistemas de sobrevivência e de transcendência são substituídos. Os sistemas dos conquistados foram simplesmente eliminados e, em alguns casos, o próprio indivíduo conquistado foi eliminado, numa evidente prática de genocídio.

Durante cerca de 300 anos criou-se a figura do culturalmente excluído. Não só a cultura foi eliminada, mas também indivíduos dessa cultura, como aconteceu com os indígenas na costa Atlântica das Américas e no Caribe, que foram exterminados. Em poucos casos, alguns indivíduos sobreviveram. Ou foram cooptados e assimilados à cultura do dominador ou se mantiveram como grupos culturais marginalizados e excluídos. Uma cultura latente, muitas vezes disfarçada ou clandestina, se manteve nessa clandestinidade durante o período da colonização.

Nas escolas ocorre uma situação semelhante. A escola ampliou-se, acolhendo jovens do povo, aos quais se oferece a possibilidade de acesso social. Mas esse acesso se dá em função de resultados que são uma modalidade de cooptação. Sistemas adequados para a seleção dos que vão merecer acesso são criados e justificados por convenientes teorias de comportamento e de aprendizagem. Um instrumento seletivo de grande importância é a linguagem. O latim foi padrão, depois substituído pela norma culta da linguagem. Mas não só a linguagem. Logo a Matemática assumiu o papel de instrumento de seleção. Ainda

hoje, quantas crianças se inibem ao falar porque sabem que falam errado e, como não são capazes de falar certo, silenciam. E quantas crianças ainda são punidas por fazerem contas com os dedos!

O indivíduo passa alguns anos adquirindo as suas raízes culturais. Ao chegar à escola, normalmente existe um processo de aprimorar, transformar e substituir essas raízes. É o que se passa no processo de conversão religiosa. O momento de encontro cultural tem uma dinâmica muito complexa. Esse encontro se dá entre povos, como se passou na conquista e na colonização, entre grupos e, igualmente, no encontro da criança ou do jovem, o qual tem as suas raízes culturais, com a outra cultura, a cultura da escola, com a qual o professor se identifica. O processo civilizatório, e podemos dizer o mesmo do processo escolar, é essencialmente a condução dessa dinâmica. Geralmente tem resultados negativos e perversos que se manifestam sobretudo no exercício de poder e na eliminação ou exclusão do dominado. Poderia também ter resultados positivos e criativos que se manifestam na criação do novo.

Tanto a conversão quanto a exclusão dependem de o indivíduo esquecer e mesmo rejeitar as suas raízes. Mas um indivíduo sem raízes é como uma árvore sem raízes ou uma casa sem alicerces. O indivíduo tem que ter um referencial, e esse referencial se situa nas suas raízes, não nas raízes de outros. Se não tiver raízes, ao cair se agarra a outro e entra num processo de dependência, campo fértil para a manifestação perversa de poder de um indivíduo sobre outro.

A Etnomatemática se encaixa nessa reflexão sobre a descolonização e a verdadeira abertura de possibilidades de acesso para o subordinado, para o marginalizado e para o excluído. A estratégia mais promissora para a educação nas sociedades em transição da subordinação para a autonomia é restaurar a dignidade de seus indivíduos, reconhecendo e respeitando as suas raízes. Essa é, no meu pensar, a vertente mais importante da etnomatemática. Reconhecer e respeitar as raízes de um indivíduo não significa ignorar e rejeitar as raízes do outro, mas, num processo de síntese, reforçar as suas próprias raízes.

78

No caso da Educação Matemática, a proposta da Etnomatemática não significa a rejeição da matemática acadêmica, como sugere o título tão infeliz que o jornal *Chronicle of Higher Education* deu para uma excelente matéria que publicou sobre Etnomatemática: “Good Bye, Pythagoras”. Não se trata de ignorar nem rejeitar a matemática acadêmica, simbolizada por Pitágoras. Por circunstâncias históricas, gostemos ou não, os povos que, a partir do século XVI, conquistaram e colonizaram todo o planeta, tiveram sucesso graças ao conhecimento e comportamento que se apoiava em Pitágoras e seus companheiros da bacia do Mediterrâneo. Hoje, esse conhecimento e comportamento, incorporados na modernidade, conduzem nosso dia-a-dia. Não se trata de ignorar nem rejeitar conhecimento e comportamento modernos. Mas sim de aprimorá-los, incorporando a ele valores de humanidade, sintetizados numa ética de respeito, solidariedade e cooperação.

Conhecer e assimilar a cultura do dominador se torna positivo, desde que as raízes do dominado sejam fortes. Na Educação Matemática, a Etnomatemática pode fortalecer essas raízes. De um ponto de vista utilitário, o qual não deixa de ser muito importante como uma das metas da escola, é um grande equívoco pensar que a Etnomatemática pode substituir uma “boa matemática acadêmica”, que é essencial para um indivíduo ser atuante no mundo moderno. A Etnomatemática terá utilidade muito limitada na sociedade moderna. Mas, igualmente, muito da matemática acadêmica



é absolutamente inútil na sociedade moderna. Quando digo “boa matemática acadêmica”, estou excluindo o que é desinteressante, obsoleto e inútil e que, infelizmente, domina os programas vigentes.

É óbvio que uma “boa matemática acadêmica” será conseguida se deixarmos de lado muito do que está nos programas sem outra justificativa que não um conservadorismo danoso e uma justificativa de caráter propedêutico: “é necessário aprender *isso* para adquirir base para poder aprender *aquilo*”. O fato é que o *aquilo* deve cair fora e, com maior razão, o *isso*.

Por exemplo, é inadmissível pensar hoje em aritmética e álgebra sem a plena utilização de calculadoras. O raciocínio quantitativo, que dominou a Educação Matemática e a própria Matemática a partir da Baixa Idade Média, está hoje integrado nas calculadoras e computadores. O raciocínio qualitativo é a grande contribuição para ramos da Matemática que se desenvolveram na segunda metade do século XX, tais como estatística, probabilidades, programação, modelagem, fuzzies e fractais.

O raciocínio qualitativo, também chamado analítico, esboçado a partir do século XVII, deve ser incorporado aos programas, naturalmente com ampla utilização de computadores. Esse tipo de raciocínio é essencial para se chegar a uma nova organização da sociedade e é o que permite exercer crítica e análise do mundo em que vivemos.

A Etnomatemática privilegia o raciocínio qualitativo. Um enfoque etnomatemático sempre está ligado a uma questão maior, de natureza ambiental ou de produção, e a etnomatemática raramente se apresenta desvinculada de outras manifestações culturais, tais como arte e religião. A Etnomatemática se enquadra perfeitamente numa concepção multicultural e holística de educação.

O multiculturalismo está se tornando a característica mais marcante da educação atual. Com a grande mobilidade de pessoas e famílias, as relações interculturais serão muito intensas. O encontro intercultural gera conflitos que só poderão ser resolvidos a partir de uma ética que resulta do indivíduo conhecer-se e conhecer a sua cultura e respeitar a cultura do outro. O respeito virá do conhecimento. De outra maneira, o comportamento revelará arrogância, superioridade e prepotência, o que resulta, inevitavelmente, em confronto e violência.

A nossa missão de educadores tem como prioridade absoluta obter PAZ nas gerações seguintes. Não podemos nos esquecer de que as gerações futuras viverão num ambiente multicultural, as suas relações serão interculturais e o seu dia-a-dia será impregnado de tecnologia. Talvez convivam humanos com indivíduos clonados e transgênicos e mesmo com andróides. Um cenário de ficção, como se vê nos filmes “Caçador de Andróides” e “Matrix”, pode se tornar realidade. Não sabemos como lidar com isso.

As gerações futuras é que vão organizar o mundo do futuro. Não sabemos o que fazer num futuro tão diferente. A maneira como as gerações passadas lidaram com o futuro, ancoradas em todo o conhecimento oferecido pela modernidade, originou o nosso presente. Um presente angustiante, de iniquidades, injustiças, arrogância, exclusão, destruição ambiental, conflitos inter e intraculturais, guerras. Não é isso que quero legar para os meus bisnetos e tataranetos e gerações futuras.

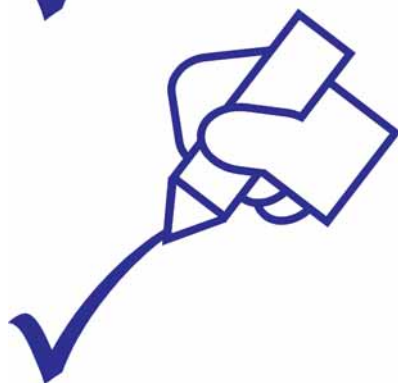
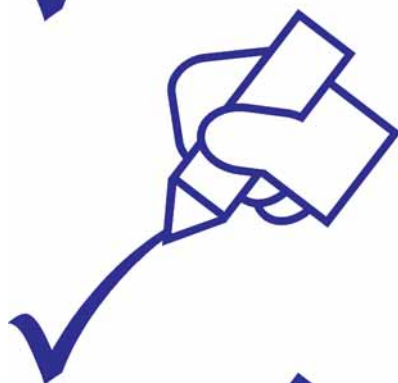
A educação nessa transição não pode focalizar a mera transmissão de conteúdos obsoletos, na sua maioria desinteressantes e inúteis no momento atual, e inconseqüentes na construção de uma nova sociedade. O melhor que podemos fazer para as nossas

crianças é oferecer a elas os instrumentos comunicativos, analíticos e materiais para que elas possam viver, com capacidade de crítica, numa sociedade multicultural e impregnada de tecnologia.

A proposta pedagógica da Etnomatemática é fazer da Matemática algo vivo, lidando com situações reais no tempo (agora) e no espaço (aqui). E, por meio da crítica, questionar o aqui e o agora. Ao fazer isso, mergulhamos nas raízes culturais e praticamos dinâmica cultural.

Por tudo isso, eu vejo a Etnomatemática como um caminho para uma educação renovada, capaz de preparar gerações futuras para construir uma civilização mais feliz.

## Solução das atividades





## Solução das atividades

### Atividade 1

<b>Varição no grupo que está brincando no parquinho</b>	<b>Aumento no número de conflitos observados</b>
Chegaram Jorge e Marcelo	Mais uma briguinha
Chegaram Marta, Priscila, Karen e Felipe	Mais duas desavenças
Mais duas crianças	Mais uma briga
Mais oito crianças	Mais quatro brigas

### Atividade 2

a) 6 pares.

João	Maria Francisco José	João e Maria João e Francisco João e José
Maria	Francisco José	Maria e Francisco Maria e José
Francisco	José	Francisco e José

83

b) São 28 pares.

João	Maria Francisco José Isabela Pedro Juliana Tamires	João e Maria João e Francisco João e José João e Isabela João e Pedro João e Juliana João e Tamires
Maria	Francisco José Isabela Pedro Juliana Tamires	Maria e Francisco Maria e José Maria e Isabela Maria e Pedro Maria e Juliana Maria e Tamires

Francisco	José Isabela Pedro Juliana Tamires	Francisco e José Francisco e Isabela Francisco e Pedro Francisco e Juliana Francisco e Tamires
José	Isabela Pedro Juliana Tamires	José e Isabela José e Pedro José e Juliana José e Tamires
Isabela	Pedro Juliana Tamires	Isabela e Pedro Isabela e Juliana Isabela e Tamires
Pedro	Juliana Tamires	Pedro e Juliana Pedro e Tamires
Juliana	Tamires	Juliana e Tamires

### Atividade 3

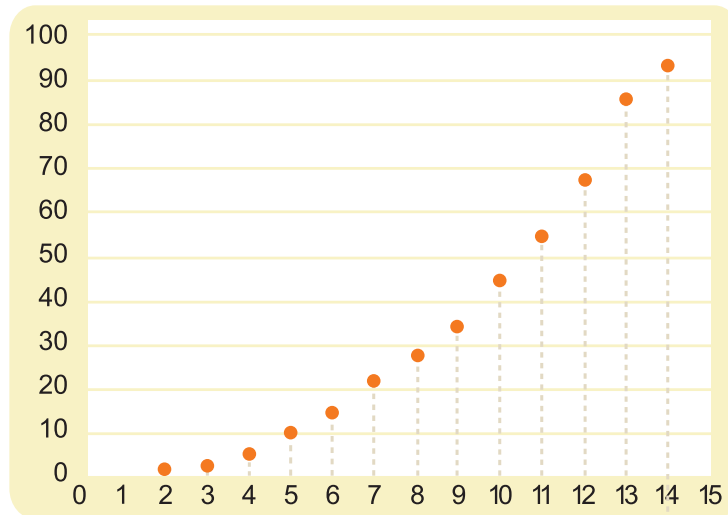
Número de pessoas	Número de pares possíveis	Número de pessoas que chegaram
2	1	+2
3	3	+3
4	6	+4
5	10	+5
6	15	+6
7	21	+7
8	28	+8
9	36	+9
10	45	+10
11	55	+11
12	66	+12
13	78	+13
14	91	+14

$$\text{Número de pares possíveis} = \frac{n(n-1)}{2}$$

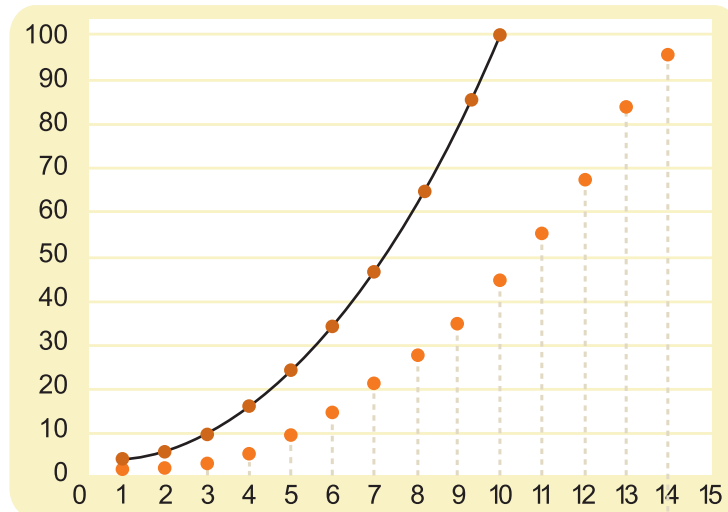
Onde  $n$  = número de pessoas.

#### Atividade 4

##### a) Gráfico 1



##### b) Gráfico 2



Comparando os dois gráficos, podemos concluir que é uma boa aproximação dizer que o número de pares possíveis no grupo está crescendo proporcionalmente ao quadrado do número de pessoas no grupo.

c) A razão entre essas grandezas não permanece constante, por isso não são proporcionais, porém, com a construção do Gráfico 2, pudemos observar a aproximação satisfatória de que quando aumenta a quantidade de pessoas em um grupo, e supondo que os conflitos surjam devido a interações entre pares, a quantidade de conflitos cresce proporcionalmente ao quadrado do tamanho do grupo.

**Atividade 5**

Foi resolvida junto com o professor.

**Atividade 6**

Foi resolvida junto com o professor.

**Atividade 7**

720 maneiras.

**Atividade 8**

16 opções.

Ida	Volta	Ida	Volta
Trem	Trem Avião Ônibus Carro	Ônibus	Trem Avião Ônibus Carro
Avião	Trem Avião Ônibus Carro	Carro	Trem Avião Ônibus Carro

**Atividade 9**

Cadeira Giratória	Mesa Estante Mesa Compacta
	Mesa Estante Mesa Classic
	Mesa Compacta Mesa Classic
Cadeira Diretor	Mesa Estante Mesa Compacta
	Mesa Estante Mesa Classic
	Mesa Compacta Mesa Classic
Cadeira Classic	Mesa Estante Mesa Compacta
	Mesa Estante Mesa Classic
	Mesa Compacta Mesa Classic



Gastará mais comprando: uma Cadeira Diretor – Mesa Estante e Mesa Compacta – R\$ 376,00.

Gastará menos comprando: uma Cadeira Giratória – Mesa Compacta e Mesa Classic – R\$ 233,00.

**Atividade 10**

24 senhas possíveis.

**Atividade 11**

As seqüências serão do tipo  $xyzs$ . Para a primeira posição, teremos 10 alternativas; para a segunda, 9; para a terceira, 8; e para a quarta, 7. Podemos aplicar a fórmula de arranjos, mas, pelo princípio fundamental de contagem, chegaremos ao mesmo resultado:  $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ .

**Atividade 12**

The image shows two 7x5 grids used for a combinatorics activity. Each grid has columns for different features: glasses, hair, mustache, and a chair, and a final column for the resulting face. The first grid shows combinations where the chair is either a director's chair or a rotating chair. The second grid shows combinations where the chair is either a director's chair or a classic table.

Glasses	Hair	Mustache	Chair	Resulting Face
•				Director's Chair, Glasses, Hair, Mustache
	•			Director's Chair, Glasses, Hair, No Mustache
		•		Director's Chair, Glasses, No Hair, Mustache
			•	Director's Chair, Glasses, No Hair, No Mustache
•	•			Director's Chair, No Glasses, Hair, Mustache
•		•		Director's Chair, No Glasses, No Hair, Mustache
•			•	Director's Chair, No Glasses, No Hair, No Mustache

Glasses	Hair	Mustache	Chair	Resulting Face
	•	•		Director's Chair, No Glasses, Hair, Mustache
	•		•	Director's Chair, No Glasses, Hair, No Mustache
		•	•	Director's Chair, No Glasses, No Hair, Mustache
•	•	•		Director's Chair, Glasses, Hair, Mustache
•		•	•	Director's Chair, Glasses, No Hair, Mustache
•	•		•	Director's Chair, Glasses, Hair, No Mustache
	•	•	•	Director's Chair, No Glasses, Hair, No Mustache



## Unidade 19

# Explorando conceitos matemáticos em uma discussão sobre a reutilização e o uso de novas tecnologias

Celso de Oliveira Faria



### Iniciando a nossa conversa

---

Lembremos a organização das nossas Unidades:

#### 1 – Resolução de uma situação-problema

A Unidade propõe uma nova situação-problema relacionada à reutilização de embalagens, o que levará ao uso de conhecimentos relacionados à geometria.

#### 2 – Construção do conhecimento matemático em ação

Na Seção 2, você verá como a situação-problema permitirá o estudo das equações quadráticas e de alguns métodos de resolução. Para isso, serão utilizadas várias estratégias, incluindo o uso de calculadora e de computador. Então, serão propostas algumas atividades matemáticas no computador.

#### 3 – Transposição Didática

A Seção 3 discute problemas relacionados ao ensino-aprendizagem de conceitos vistos nas Seções 1 e 2 e sugere ações relacionadas para a sala de aula.

Como as outras Unidades, esta também conterà um Texto de Referência sobre Educação Matemática, que abordará o tema “Educação Matemática e Informática: caminho e utopias de inclusão”, que consiste na análise do uso da calculadora e do computador nas aulas de Matemática.

89



### Definindo o nosso percurso

---

Esperamos que, ao longo desta Unidade, você possa:

1 - Com relação aos seus conhecimentos matemáticos:

- Vivenciar a resolução de uma situação-problema que diz respeito ao conhecimento geométrico como estratégia para mobilizar conhecimentos, construir conceitos em ação e desenvolver habilidades relacionadas a:
  - volume máximo de uma caixa planificada;
  - estratégias variadas para a resolução da equação quadrática;
  - o uso de calculadoras e planilhas eletrônicas para o estudo de alguns gráficos;
  - o uso de *software* livre para o estudo de relações na circunferência.

Esses conhecimentos serão desenvolvidos nas Seções 1 e 2.

2 - Com relação aos seus conhecimentos sobre Educação Matemática:

- Adquir conhecimentos sobre:
  - o uso da calculadora e de *softwares* livres na sala de aula.

3 - Com relação à sua situação em sala de aula:

- Conhecer e produzir, de acordo com os temas tratados, situações didáticas adequadas à série em que atua.

Esse objetivo será tratado na Seção 3.

## Seção 1

### Uma situação-problema: destacando e estudando o volume máximo de uma caixa

90



**Objetivo da seção**

Esperamos que, ao longo desta Seção, você possa:

- Propor uma solução para a situação.
- Determinar experimentalmente um modelo de caixa que seja reutilizada.
- Elaborar uma estratégia para determinar um volume máximo de uma caixa planejada reutilizada.



**Integrando a matemática ao mundo real**

Leia o texto a seguir da Revista Nova Escola de 2001:

#### **Consumir é destruir**

“Gastar ou corroer até a destruição; devorar; destruir; extinguir.” Que tal usar essa definição, extraída do Dicionário Aurélio, para começar um trabalho em classe sobre o que é consumir com responsabilidade? “Cabe a todo professor ensinar que o conceito

de consumo responsável significa permitir que as futuras gerações usufruam dos mesmos recursos naturais de que dispomos atualmente”, diz a psicóloga Vera Marta Junqueira, diretora de Estudos e Pesquisas da Fundação de Proteção e Defesa do Consumidor, o Procon. Ou seja, de nada adianta “querer levar vantagem”, como preconizava um velho comercial de cigarros. Se a gente fizer tudo o que tiver vontade agora, a chance de não sobrar nada é grande.

Em 1998, o Procon realizou uma pesquisa intitulada “Consumidor e Meio Ambiente”. Ela revela que, embora seja uma preocupação de muitos, a natureza ainda não influencia as atitudes cotidianas. Em alguns casos, faltam informações básicas. “É comum as pessoas dissociarem a eletricidade da quantidade de água nas represas, por exemplo”, afirma Vera. “Sem falar na noção, largamente difundida, de que vivemos num país onde a abundância impera.” O mesmo ocorre com o lixo. Quem sabe explicar o que acontece depois que colocamos o saco do lado de fora do portão de casa ou no depósito do edifício em que moramos?

Por isso, é preciso mudar hábitos. Só assim vamos conseguir um novo modelo de desenvolvimento. Não basta ir a um supermercado e olhar o preço e a data de validade dos produtos. Tão importante quanto, é pensar no impacto que eles causam na natureza. Exatamente como fazem as escolas da rede municipal de São José dos Campos, a 97 quilômetros de São Paulo. No projeto de consumo responsável, os professores levam a garotada ao aterro sanitário da cidade para que todos vejam, com os próprios olhos, como boa parte das compras do carrinho vão direto para o lixo e que, portanto, compensa escolher determinadas embalagens em detrimento de outras.

Um bom conceito a trabalhar é a chamada equação dos 3R:

- **Reduzir** – consumir menos é fundamental. Hoje, o Brasil produz 88 milhões de toneladas de lixo por ano, cerca de 440 quilos por habitante.
- **Reutilizar** – é impossível reduzir a zero a geração de resíduos. Mas, muito do que jogamos fora deveria ser mais bem reaproveitado. Potes e vasilhames de vidro e caixas de papelão podem ser úteis em casa ou nas indústrias de reciclagem. E o destino de restos de comida, como cascas e folhas, tinha de ser a compostagem.
- **Reciclar** – o “erre” mais conhecido é sinônimo de economia de matérias-primas. Vidro, papel, plástico e metal representam, em média, 50% do lixo que vai para os aterros. Além disso, a reciclagem pode virar dinheiro. O economista Sabetai Calderoni, do Núcleo de Políticas Estratégicas da USP e autor do livro “Os Bilhões Perdidos no Lixo”, calcula em 5,8 bilhões de reais por ano o total que o Brasil deixa de arrecadar com materiais recicláveis. Uma fortuna equivalente a dezessete vezes o orçamento do Ministério do Meio Ambiente.

Saber usar essa equação é ensinar a poupar o planeta. “Nas cidades, temos muito a aprender sobre a relação com a natureza”, afirma Christopher Flavin, presidente do Worldwatch Institute. “Toda ação tem uma consequência, e o aluno precisa refletir sobre isso”, emenda Maluh Barciotte. Ela oferece um “truque” para envolver a garotada: estimular as consultas ao serviço de atendimento ao cliente para conhecer melhor as empresas.

[http://novaescola.abril.com.br/ed/144\\_ago01/html/repcapa2.htm](http://novaescola.abril.com.br/ed/144_ago01/html/repcapa2.htm), publicado no dia 26/05/2005.

Questões relativas à preservação do meio ambiente têm sido freqüentes no dia-a-dia. Muitos assuntos são tratados por nós com distanciamento. Não temos nenhuma iniciativa em alterar o nosso cotidiano. Um exemplo é o apresentado no texto, onde não se atenta para o fato de que uma lâmpada acesa desnecessariamente possa envolver o desperdício de água.



### Atividade 1

---

Que tipos de economias feitas por você, sua família e a escola podem gerar algum tipo de preservação ao meio ambiente?

Algumas ações podem gerar trabalhos interessantes. Tais como latas de alumínio que podem ser usadas em vários trabalhos. Ou garrafas pet de refrigerante que podem ser usadas até para a confecção de enfeites para a casa.



No quesito “reutilizar”, dos 3R, podemos reaproveitar caixas de papelão de leite e suco.

## Situação-problema

Separe uma caixa de papelão de suco e mostre como transformá-la em uma caixa para guardar congelados ou alimentos na geladeira.



### Atividade 2

---

Pegue uma caixa igual à de cima, uma tesoura (e se precisar, use cola e régua) e a transforme em uma caixa para guardar congelados.

Desenhe o formato da caixa que confeccionou.

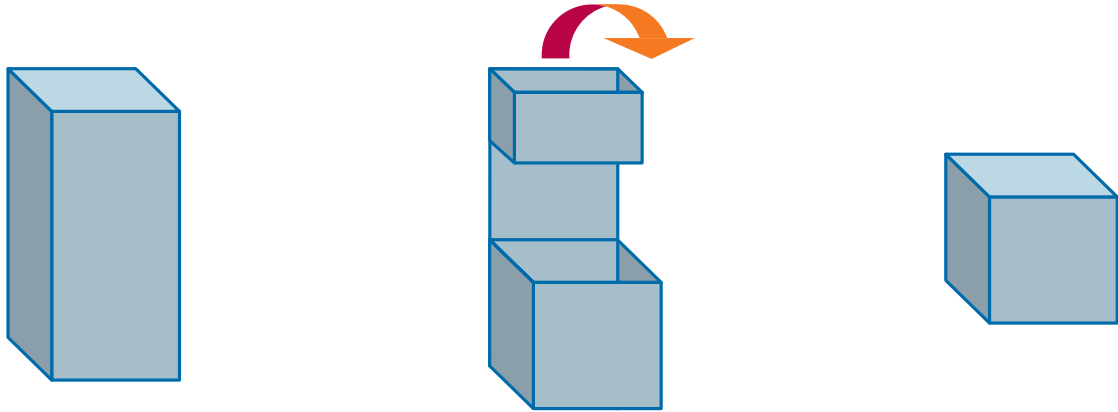
A caixa que você criou tem tampa? Lembre-se de que é fundamental que caixas usadas para guardar alimentos em freezer ou geladeira tenham tampas. Pense mais um pouco e aprimore o modelo usando a borda da caixa como tampa. (Não recorte ainda. Faça um desenho para o seu novo modelo).



### Atividade 3

---

Ao lermos um livro sobre reutilização, encontramos o seguinte modelo feito por um grupo de estudantes:



- Este modelo é melhor do que o que foi feito por você? Ou seja, reutiliza todo o material, usa poucos cortes e tem tampa?
- Faça este modelo com a caixa de suco e calcule o volume.



### Atividade 4

---

94

- Instrua seus alunos sobre a confecção do modelo anterior. Por exemplo, a que distância da base deve ser feito o corte da parte de cima, a qual será usada como encaixe.
- Repita essas instruções para os seus alunos ou para alguém da sua casa e veja se todos entenderam e se a sua explicação é suficiente.



### Atividade 5

---

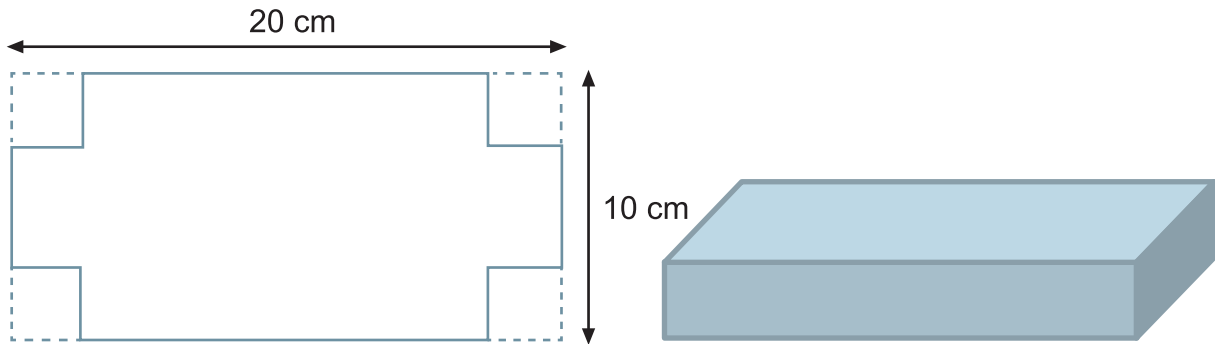
Com alguma criatividade é possível fazer uma série de reutilizações com as embalagens de produtos que compramos no mercado. Pegue, agora, uma caixa qualquer da sua casa. Pode ser de leite ou de outro produto que venha em caixa e vamos tentar reutilizá-la para guardar alguma coisa ou até mesmo para virar um enfeite.

#### Atenção

É importante ler as instruções das embalagens para verificar se estas podem ser reutilizadas. Por exemplo, em caixas de sabão em pó está escrito que a embalagem não pode ser reutilizada para outro fim. Leia as instruções e reutilize apenas as caixas permitidas. Talvez a caixa de sabão em pó possa ser reutilizada para guardar prendedores de roupa ou para outras coisas que não envolvam alimentação.



A tarefa a ser feita por você é a seguinte: planifique a caixa que conseguiu, corte as suas laterais e monte uma outra sem tampa, conforme o modelo abaixo. O desafio é conseguir o maior volume possível com essa caixa. Para os cálculos, utilize uma calculadora.



Depois de trabalhar, escreva aqui as dimensões da caixa planificada e qual o volume obtido por você.

## Seção 2

### Entendendo o uso de planilhas eletrônicas para a resolução de equações quadráticas



Objetivo da seção

---

Esperamos que, ao longo desta Seção, você possa:

- Construir os seguintes conhecimentos matemáticos em ação:
    - o uso de planilhas eletrônicas para a resolução de equações;
    - a resolução de equações quadráticas por vários métodos;
    - o uso de *software* livre de geometria para estudar os ângulos na circunferência.
  - Em relação à Educação Matemática você estará vendo:
    - o uso do computador e da calculadora na sala de aula.
- 

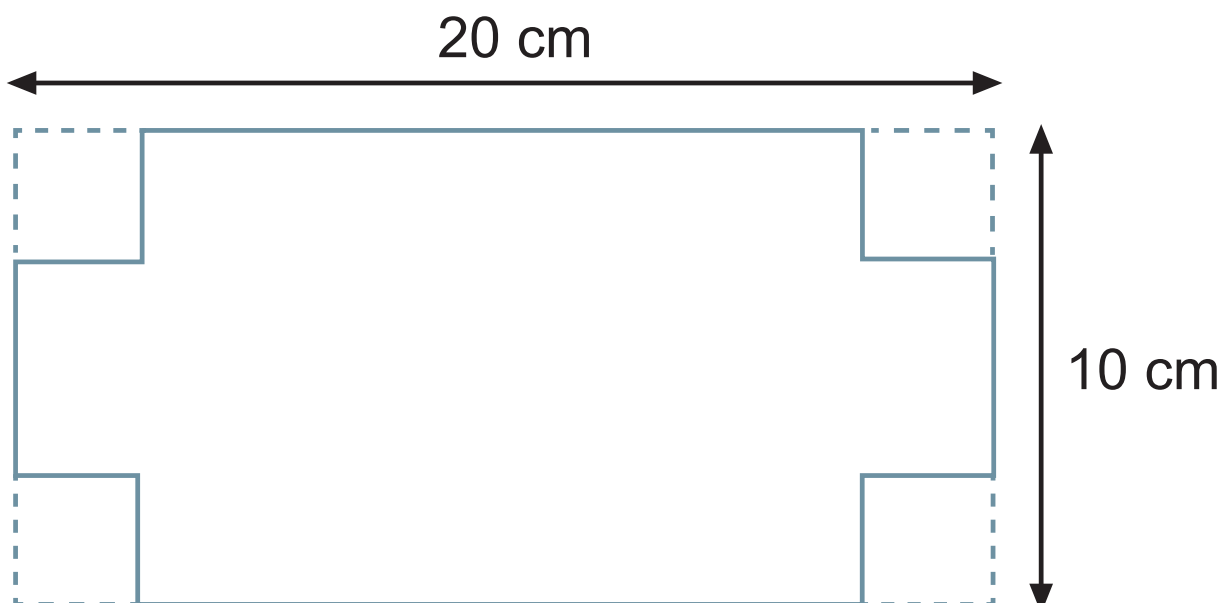
96



Atividade 6

---

Voltando ao problema do volume, use o retângulo abaixo, varie o tamanho do quadrado das quinas e encontre o volume máximo. Use uma calculadora para fazer os cálculos.



Registre aqui os seus resultados:

Tamanho do lado do quadrado da quina	Volume da caixa

Tamanho do lado do quadrado da quina	Volume da caixa

Tabela 1

Qual o volume máximo encontrado?

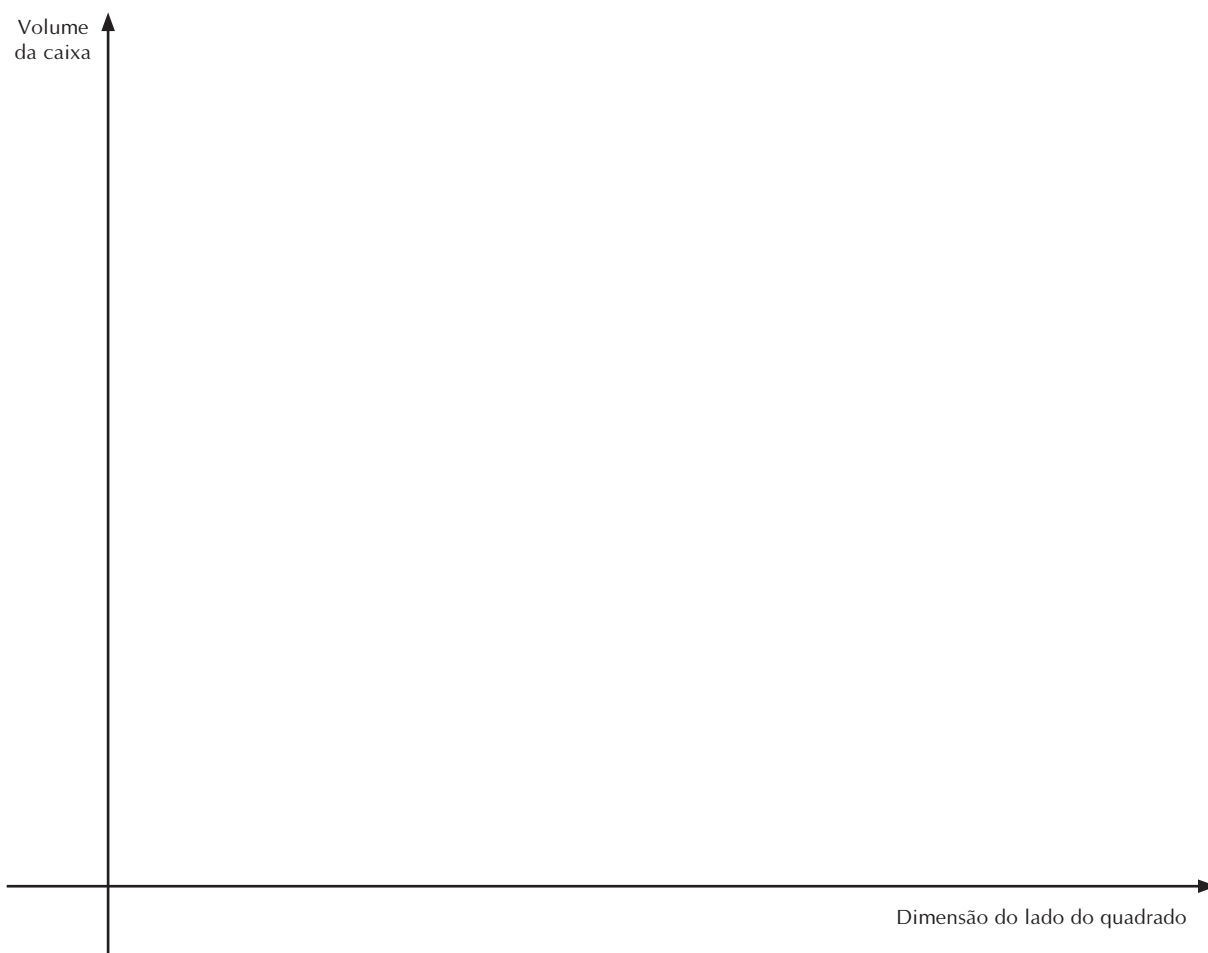
**Sintetizando**

Você deve ter observado que o tamanho do quadrado das quinas influencia diretamente na altura da caixa ao ser montada. Como se trata de um quadrado, o tamanho do lado do quadrado é igual ao da altura da caixa. Quanto menor o tamanho do lado do quadrado, menor a altura e vice-versa.



### Atividade 7

A partir dos dados da Tabela 1 da Atividade 6, apresente graficamente os resultados e assinale o volume máximo.



### Atividade 8

Vamos escrever a função que representa o volume da caixa.

- a) A representação algébrica da área da base da caixa é \_\_\_\_\_ .
- b) Do volume é \_\_\_\_\_ .
- c) Desenvolva a expressão e a coloque na forma geral. Isto é, com os expoentes das variáveis em ordem decrescente.



O estudo de funções já foi apresentado em TP anteriores. É importante lembrar que a análise de padrões e funções envolve as habilidades de reconhecer, descrever e generalizar. Dessa forma, a construção de modelos matemáticos permite prever comportamentos de fenômenos do mundo real que apresentam algum tipo de regularidade.

As representações gráficas, tabelas de dados, expressões ou equações são fundamentais para perceber e interpretar relações. Na situação discutida até aqui, você pode representar a relação por meio de gráfico, tabela de dados e expressão. Com isso, você percebeu que as funções são compostas por variáveis que têm uma relação dinâmica, ou seja, alterações em uma das variáveis conduzem a alterações em outras. E também percebeu que o aumento irrestrito de uma variável nem sempre conduz a um aumento proporcional e também irrestrito. Por isso, conceitos como valor máximo e mínimo são fundamentais para o estudo das funções.

Assim como nas equações, o grau de uma função polinomial está relacionado com o maior expoente da variável. Isso quando a função está colocada na sua forma geral.

Você deve ter percebido que a função encontrada é do terceiro grau. Agora, vamos, então, fazer o gráfico por meio de tabela. Para isso, podemos usar duas formas:

1. Construa uma tabela e substitua o  $x$  por valores entre 0,5 e 3, variando 0,1 entre cada valor. Para isso use calculadora.
2. Sugerimos que você use uma planilha eletrônica do computador da sua casa ou escola. Temos planilhas do Linux, *software* gratuito que muitas escolas usam, ou o Excell da Microsoft. Recomendamos que se continue a tarefa na planilha. Isso será muito importante para o seu desenvolvimento e para, quem sabe, você usar depois com os seus alunos.

99

## Vamos agora aprender a fazer o cálculo na planilha

As planilhas são compostas por linhas e colunas. As linhas são representadas por números (1,2,3, ...); e as colunas, por letras (A,B,C,...). No encontro das duas, temos as células, no caso do desenho a seguir, a célula é A1 – linha 1, coluna A.

	A	B	C
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

Célula A1

Vamos completar a coluna A com os valores de  $x$ . Basta você digitar os valores, conforme mostramos abaixo:

	A	B
1	x	
2	0,5	
3	0,6	
4	0,7	
5	0,8	
6	0,9	
7	1	
8	1,1	
9	1,2	
10	1,3	
11	1,4	
12	1,5	
13	1,6	
14	1,7	
15	1,8	
16	1,9	
17	2	
18	2,1	

Complete até o 3.

Em seguida, vamos pensar um pouco em como seria a forma literal da expressão. Ou seja, se o valor digitado na coluna A for  $x$ , como será a expressão que calculará. Se você ficar em dúvida, dê uma olhada nos cálculos anteriores.

Agora, digite na coluna B a fórmula que será usada pelo cálculo. Ao invés de usarmos a incógnita  $x$ , vamos usar o nome da célula que encontra o valor.

	A	B	C	D
1	x	y		
2	0,5	=(20-2*A2)*(10-2*A2)*A2		
3	0,6			
4	0,7			
5	0,8			
6	0,9			
7	1			
8	1,1			

$= (20 - 2 * A2) * (10 - 2 * A2) * A2$

Toda célula que é usada para fórmula deve começar com "=".

A variável  $x$  deverá ser substituída pela célula que encontra o valor, no primeiro caso: A2.

A multiplicação é representada por "\*".

Terminando de digitar e apertando “enter”, será calculado o valor determinado. Para fazer o cálculo nas outras linhas, existe o recurso de cópia automática da célula. Veja como ela é feita:

	A	B
1	x	y
2	0,5	85,5
3	0,6	
4	0,7	

Quadrado a ser clicado.

Ao se clicar sobre a célula B2, surge um retângulo que possui um quadrado na parte inferior esquerda. Clique nesse quadrado e segure. Vá descendo na coluna B, e a fórmula será copiada para cada célula da coluna A.

	A	B	C
1	x	y	
2	0,5	85,5	
3	0,6	99,264	
4	0,7	111,972	
5	0,8	123,648	
6	0,9	134,316	
7	1	144	
8	1,1		
9	1,2		

101

Soltando o mouse, o cálculo é feito.  
Segure até a célula onde estiver o número 3.


Por um dos métodos usados por você, o volume máximo é quanto?

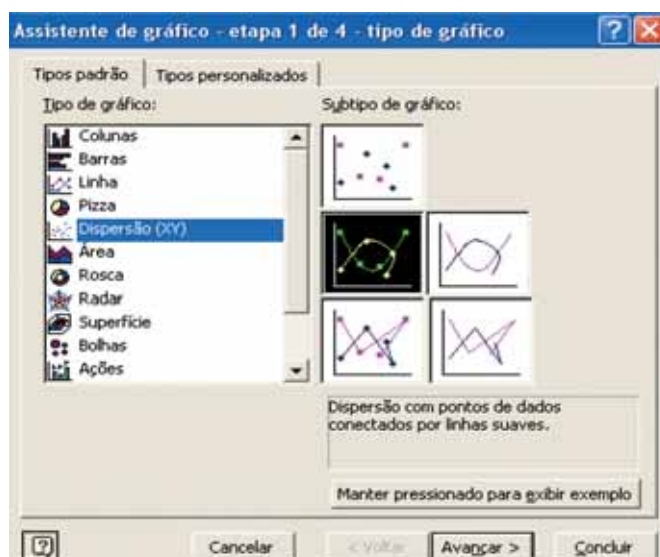


### Atividade 9

Vamos agora fazer a representação gráfica dos resultados obtidos. Uma das maneiras é pelo papel e pela forma que já conhecemos. A outra é usando a própria planilha. Mais uma vez, sugerimos que você procure usar a planilha.

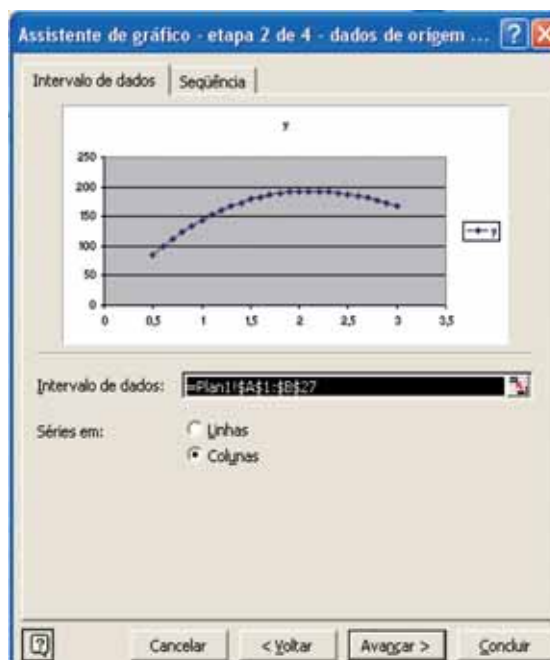
Vamos fazer a representação gráfica dos dados.

1. Clique na célula A1 e, sem soltá-la, vá até a célula B27. Assim, você terá toda a tabela selecionada.
2. Clique no Assistente de Gráficos, no botão .
3. Na abertura do Assistente de Gráficos, sugerimos a escolha do gráfico do tipo de dispersão. Depois, clique em Avançar.



102

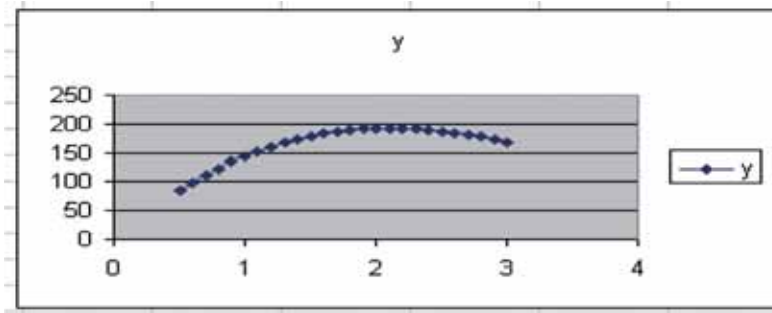
4. Clicando em Avançar, aparece a tela:



Clique em Avançar.

5. Na próxima tela, clique mais uma vez em Avançar e, na última tela, clique em Concluir. Assim você terá o seu gráfico pronto.





Sugerimos que você explore um pouco o Assistente e veja as opções que ele oferece.

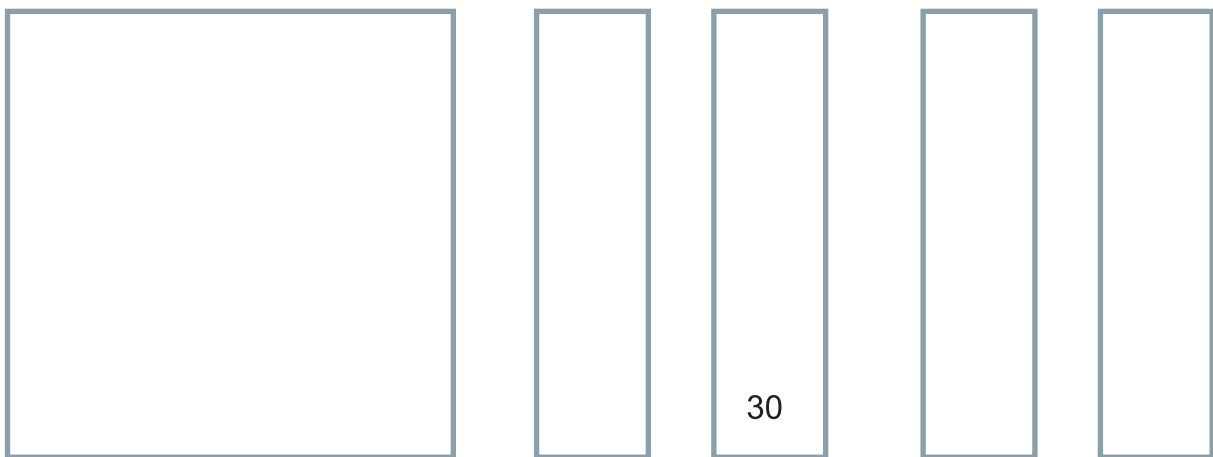
Você já deve ter observado que o ponto mais alto do gráfico representa o volume máximo da caixa. Então, valem as perguntas: É mais fácil observar o ponto mais alto pela tabela ou pelo gráfico? Será que o valor observado na tabela é realmente o valor máximo assumido? Você não acha que, dependendo da função e do intervalo, a tabela pode não mostrar o ponto máximo ou mínimo corretamente? E no gráfico, isso também acontece?



### Atividade 10

Agora pensemos na seguinte situação: foi construída uma caixa com o reaproveitamento de outras caixas recolhidas por um grupo de alunos. A área final e total da caixa planejada é de  $1\text{m}^2$ . Os alunos lembram que usaram outros pedaços de caixas para construir a nova. Para isso, usaram quatro tiras de 30 cm nas laterais, mas não se lembravam do comprimento. No entanto, as tiras se encaixaram corretamente na caixa inicial.

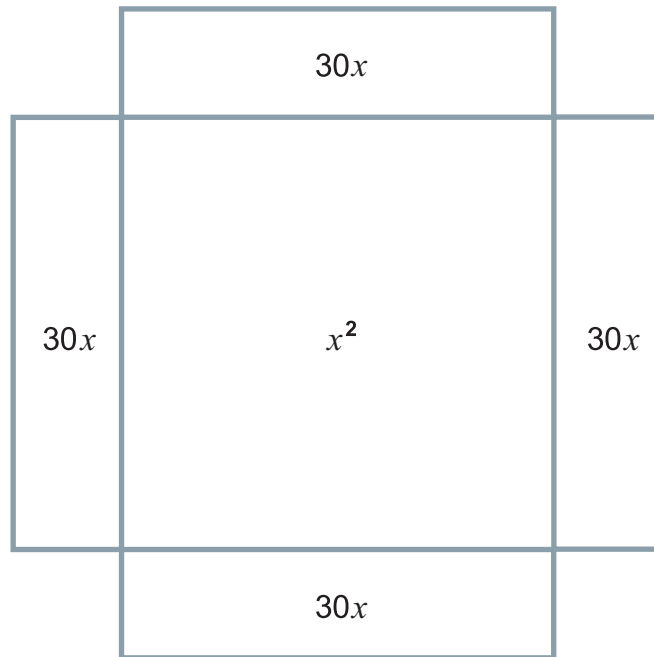
Então, a situação pode ser representada assim:



Caixa inicial

Tiras

A caixa final obtida era como esta:



a) Faça a representação algébrica da situação acima:

104

b) Vamos resolver a situação usando um gráfico. Para começo de conversa, faça uma tabela variando de 10 a 70, de 5 em 5. Para os cálculos, use calculadora ou planilha eletrônica. Se utilizar um computador, imprima o gráfico e o coloque aqui. Ou copie abaixo.

c) Observando o gráfico, você pode dizer qual é o tamanho aproximado do lado do quadrado?



## Aprendendo sobre Educação Matemática

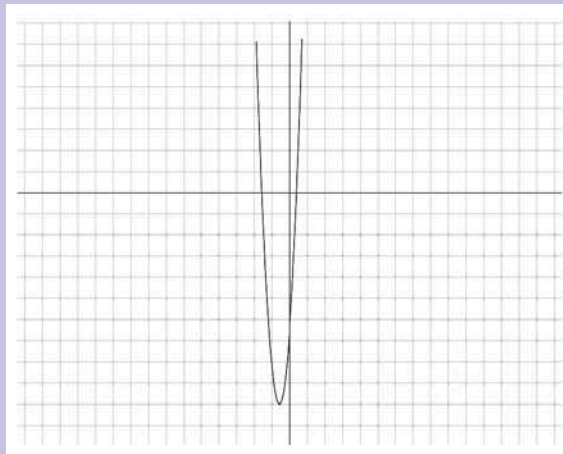
A possibilidade do uso de *softwares* para o ensino e o estudo da Matemática é uma perspectiva que tem aparecido em vários estudos da atualidade. Na verdade, alguns pesquisadores consideram que isso pode mudar até mesmo a forma de se conceber a Matemática.

Se considerarmos que o desenvolvimento da álgebra, como conhecemos hoje, deu-se por causa da tecnologia que existia e existe hoje – argila, papel, lápis – o aparecimento da informática deve mudar consideravelmente o seu estudo. A dificuldade na confecção de um gráfico e da análise gráfica de um resultado era muito maior do que a da análise algébrica. Hoje em dia, isso já não acontece.

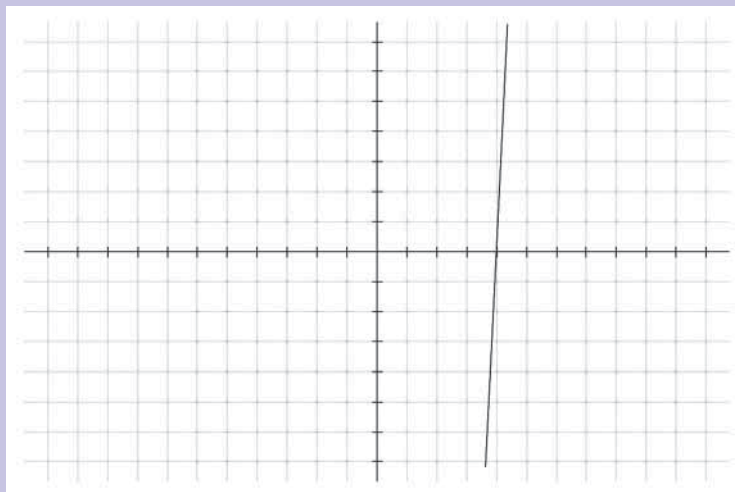
As novas tecnologias permitem fazer uma representação gráfica em questão de minutos e muito mais facilmente do que um cálculo algébrico.

Para resolver o problema anterior, usamos um programa de fácil acesso e gratuito, o *Winplot*. Pode ser conseguido facilmente pela Internet.

Com ele podemos construir o gráfico e perceber, por exemplo, que a resposta do problema, o zero da função que desejamos como resposta, está à esquerda do eixo  $y$ , pois isto envolve medida e não existem medidas negativas.



E aproximando temos o seguinte resultado:



### Para saber mais

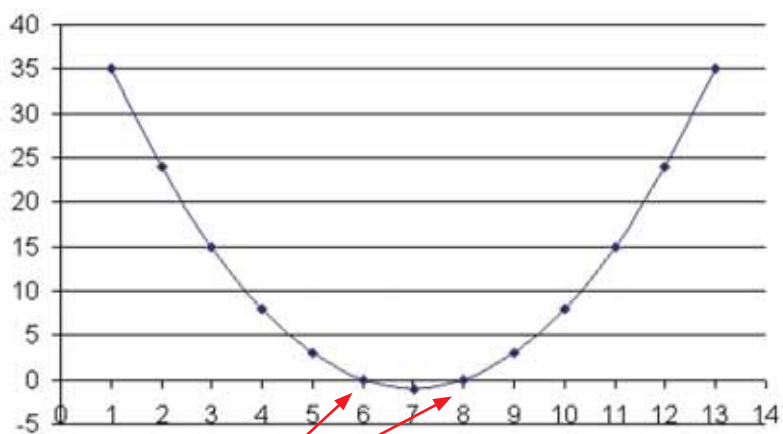
O **Winplot** foi criado pelo professor Richard Parris, da Philips Exeter Academy, por volta de 1985. O **Winplot** faz parte de uma série de *softwares* matemáticos gratuitos criados por Parris. As vantagens do programa são muitas, dentre elas: é fácil de usar, é excelente para montagens rápidas nas áreas em que pode atuar e cabe em um disquete. Como ferramenta *didática* para o ensino da Geometria Analítica (plana e espacial), o **Winplot** é um dos *softwares* mais completos. Além da versão original, em inglês, ele possui versões em mais seis idiomas, incluindo o português. No Brasil, o trabalho de tradução resultou da iniciativa e do empenho de Adelmo Ribeiro de Jesus.

Existem várias maneiras de se resolver uma equação quadrática, uma delas é usando gráficos, quando há fácil acesso a computadores.

Por exemplo, ao resolvermos a equação  $x^2 - 14x + 48 = 0$ , podemos considerar a função  $f(x) = x^2 - 14x + 48$ . E os valores, ou o valor, de  $x$  em que  $f(x) = 0$  são as raízes, ou raiz, da equação.

	A	B
1	x	y
2	1	35
3	2	24
4	3	15
5	4	8
6	5	3
7	6	0
8	7	-1
9	8	0
10	9	3
11	10	8
12	11	15
13	12	24
14	13	35
15		

Quando  $x$  é igual a 6 e 8, a função é igual a zero, ou seja,  $f(x) = 0$ .



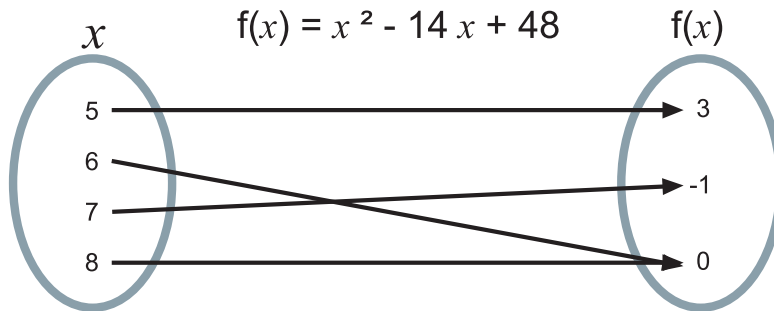
Neste ponto:  
 $f(x) = x^2 - 14x + 48 = 0$



## Articulando conhecimentos

No exemplo anterior, ao resolvermos a equação  $x^2 - 14x + 48 = 0$ , usamos a função  $f(x) = x^2 - 14x + 48$ , logo, procuramos na tabela e na representação gráfica o  $f(x)=0$ . Logo, usando-se o conceito de função, a raiz da equação é o  $x$ , para um valor determinado da função. Achou confuso? Vamos com calma para você entender melhor.

Quando você resolveu a equação, os valores 6 e 8 fizeram a expressão valer 0:



Mas isso poderia ser feito de outra forma. Por exemplo, poderíamos considerar:  $x^2 - 14x = -48$ . A função seria  $f(x) = x^2 - 14x$ , e o valor de  $x$  será determinado quando  $f(x) = -48$ . Também encontraríamos os valores 6 e 8.



## Atividade 11

107

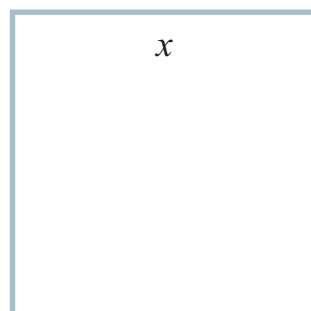
Resolva a equação  $x^2 - 3x - 4 = 0$ , usando uma tabela ou gráfico. Varie os valores de  $x$  de -2 a 5. Pense em várias funções possíveis para resolver o problema.



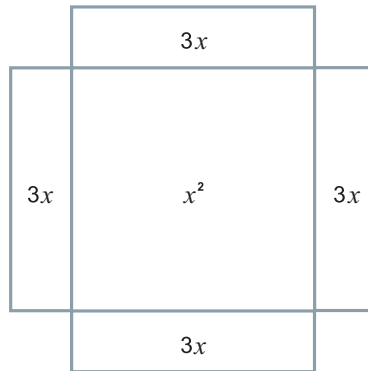
## Atividade 12

Um dos primeiros métodos usados para resolver a equação quadrática foi o raciocínio geométrico. Você o conhece? Alguns autores falam que esse método de resolução foi o mesmo usado por Al-Khowarizmi, um dos grandes matemáticos da álgebra. Vamos resolver a equação:  $x^2 + 12x - 28 = 0$ .

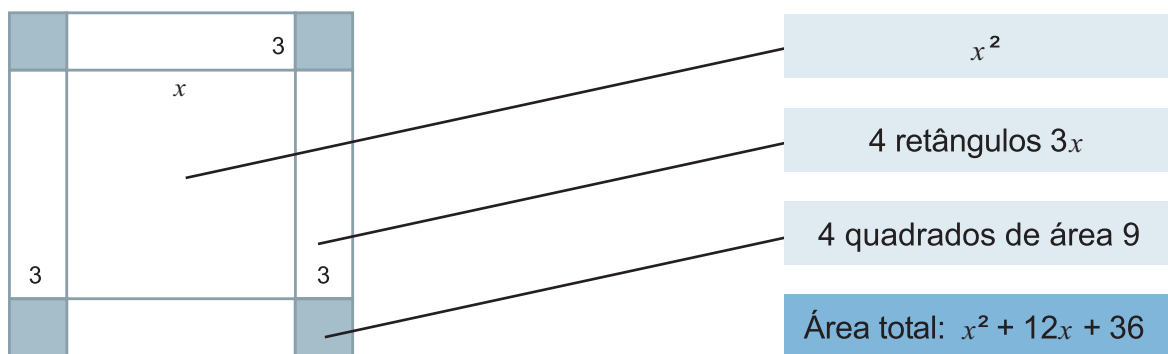
a) Primeiro vamos construir um quadrado qualquer e chamar os seus lados de  $x$ :



b) Em seguida, vamos construir, em cada um dos lados deste quadrado, retângulos de lado 3, para termos o total de  $12x$ .



c) Em seguida, vamos completar o quadrado.



108

A equação inicial é  $x^2 + 12x - 28 = 0$ , ou melhor,  $x^2 + 12x = 28$ .

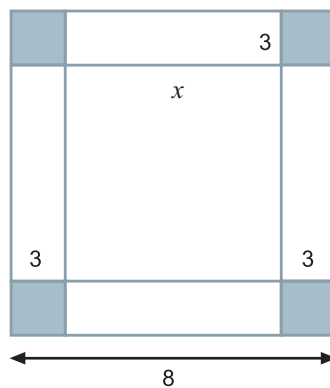
O quadrado perfeito que se aproxima da primeira parte da equação é  $x^2 + 12x + 36$ . Mas, como temos que  $x^2 + 12x = 28$ , devemos somar 36 aos dois membros para obtermos o  $(x + 6)^2$ :

$$x^2 + 12x + 36 = 28 + 36$$

$$x^2 + 12x + 36 = 64.$$

Pois, se resolvermos a equação acima, encontramos o  $x^2 + 12x = 28$ .

Então, a área do quadrado grande é 64, ou seja, cada lado mede 8.



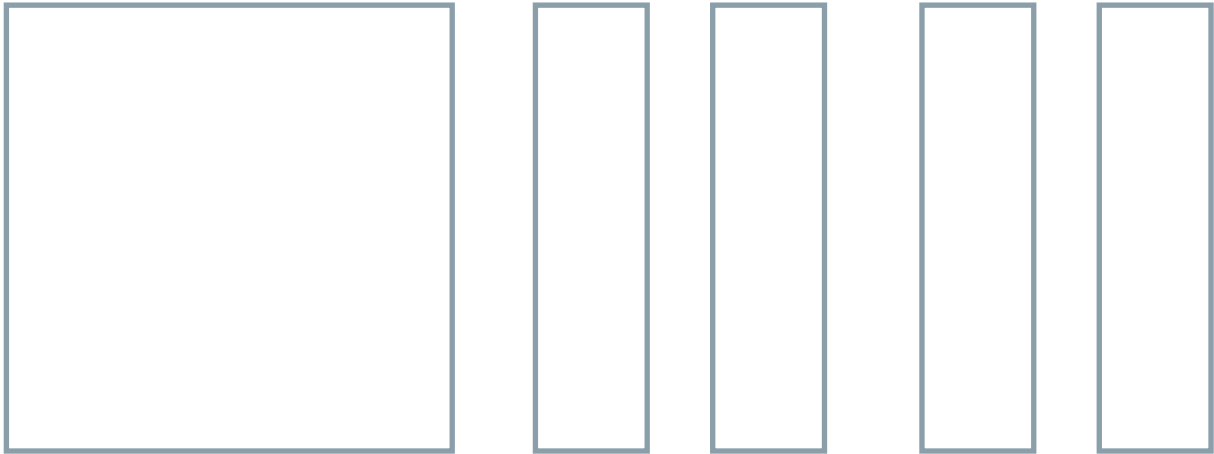
Como o lado mede  $x + 6$ , podemos concluir que  $x + 6 = 8$ . Então,  $x = 2$ .

Observando esse método, você acha que é possível resolver todas as equações por ele?



### Um recado para sala de aula

Para trabalhar esta Atividade com os seus alunos, use material manipulável. Faça, com cartolina, papel cartaz ou outro tipo de papel rígido, peças com as quais o estudante possa completar o quadrado pela manipulação.



109



### Atividade 13

Um outro método de resolução para a equação quadrática, parecido com o anterior, é o de completar os quadrados, os quais têm como objetivo transformar toda a equação em um quadrado perfeito.

Vamos resolver a equação  $x^2 - 10x + 21 = 0$ :

Sabemos que, quando elevamos ao quadrado a soma de dois termos, temos:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2 \times x \times a + a^2$$

Para facilitar, sugerimos que se faça o quadrado perfeito apenas com termos que possuem incógnita. Então, reescrevemos a equação assim:

$$x^2 - 10x = -21.$$

Analise a situação e complete o quadrado.

$$x^2 - 2 \times x \times \underline{\quad} + \underline{\quad} = -21 + \underline{\quad}$$

Não se esqueça de que o valor adicionado não estava na primeira equação, assim é preciso acrescentá-lo, ou tirá-lo, do outro membro para manter a equivalência.

Depois de completar o quadrado, resolva a equação.



## Articulando conhecimentos

A fatoração pode ser usada em várias situações para a resolução de equações quadráticas. É comum muitos professores acharem mais complicado trabalhar esse enfoque com os seus alunos. Porém, ele é muito mais significativo e é possível que o aluno encontre as soluções mais intuitivamente.

Veja alguns exemplos:

$$1) \quad x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x^2 - 3x = 10$$

$$x^2 - 2x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm \sqrt{\frac{49}{4}}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm \frac{7}{2}$$

$$x = -2$$

$$x = 5$$

A resolução das equações incompletas pode ser feita por meio da fatoração.

110

$$2) \text{ Partindo da relação em que } (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + (a \times b)$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$(x + 2)(x - 8) = 0$$

$$x = -2$$

$$x = 8$$



## Atividade 14

Voltemos à equação apresentada na Atividade 11,  $x^2 - 3x - 4 = 0$ . Resolva-a por algum dos métodos algébricos vistos até aqui, em qual conclusão você pode chegar?





## Um recado para sala de aula

É muito comum encontrarmos alunos que relacionam a representação gráfica com a não solução da equação no conjunto dos Reais. Por exemplo, na equação mostrada, como a função não toca o eixo  $x$ , ela não tem zeros da função, logo não tem raízes Reais. Porém, existe a representação gráfica da função.



## Articulando conhecimentos

Você já deve ter observado que os métodos de fatoração não são suficientes para todas as equações. Por isso, foi desenvolvido um método que foi chamado de Báskara, apesar de não ter sido ele o matemático responsável pelo modelo. A partir do que foi estudado até aqui, procure uma forma de chegar ao modelo:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sugerimos que você dê uma olhada na Revista do Professor de Matemática (nº 43, 1999), que traz vários métodos de resolução de equação do 2º grau no decorrer da história por vários povos. Na Internet é possível acessar pelo:

[http://bibvirt.futuro.usp.br/textos/periodicos/revista\\_do\\_professor\\_de\\_matematica/vol\\_0\\_no\\_43](http://bibvirt.futuro.usp.br/textos/periodicos/revista_do_professor_de_matematica/vol_0_no_43)

111



## Atividade 15

Nós vimos, nas Atividades anteriores, a importância das novas tecnologias no ensino da Matemática. Algumas delas facilitam a aprendizagem e podem ajudar na visualização de algumas propriedades da Matemática. No ensino de Geometria, isto é mais visível ainda. Com determinados programas, é possível mostrar algumas propriedades matemáticas importantes e que, com outras tecnologias, como lápis, papel, compasso, são de difícil visualização.

Alguns programas são bastante usados em Geometria. Como um exemplo, temos: o Cabri-geomètre e o Geometricks. Outro que é muito usado é o Régua e Compasso, que tem uma característica fundamental para o usuário: é gratuito e pode ser encontrado na Internet.

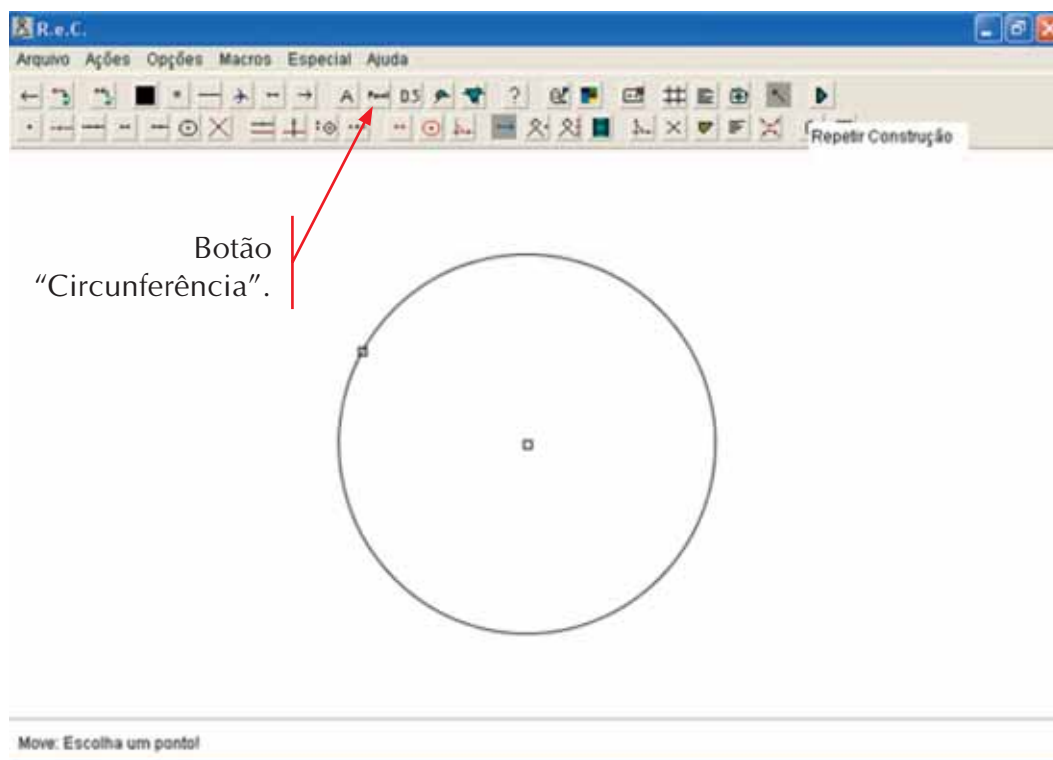
No site <http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/software/softw.htm>, você pode copiar uma série de programas gratuitos para uso em sala de aula. Sugerimos que peça a ajuda do responsável pelo laboratório de informática da escola para baixar alguns desses programas.

Vamos trabalhar nesta Atividade com o Régua e Compasso. Peça ajuda ao responsável pelo laboratório da escola e mãos à obra. O desafio do Gestar é fazer com que você,

além de revisar algumas aplicações de Matemática, aprenda algo mais: o uso das novas tecnologias, incluindo uma nova ferramenta.

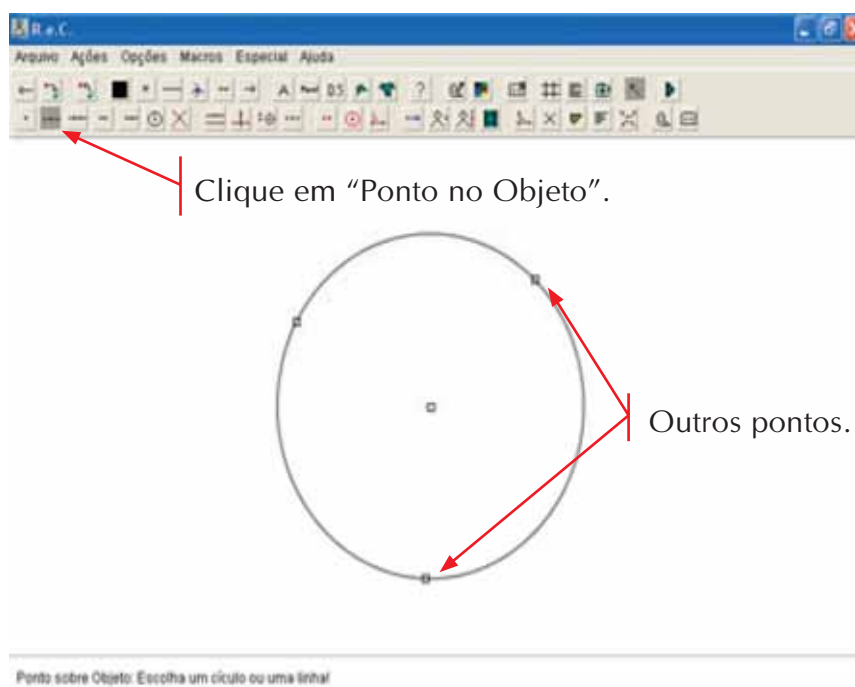
Vamos construir uma atividade sobre o valor do ângulo inscrito e central da circunferência? Então, siga os passos:

1) Clique em “Circunferência” e marque o centro da circunferência. Marque outro ponto. Você terá construído a sua circunferência.

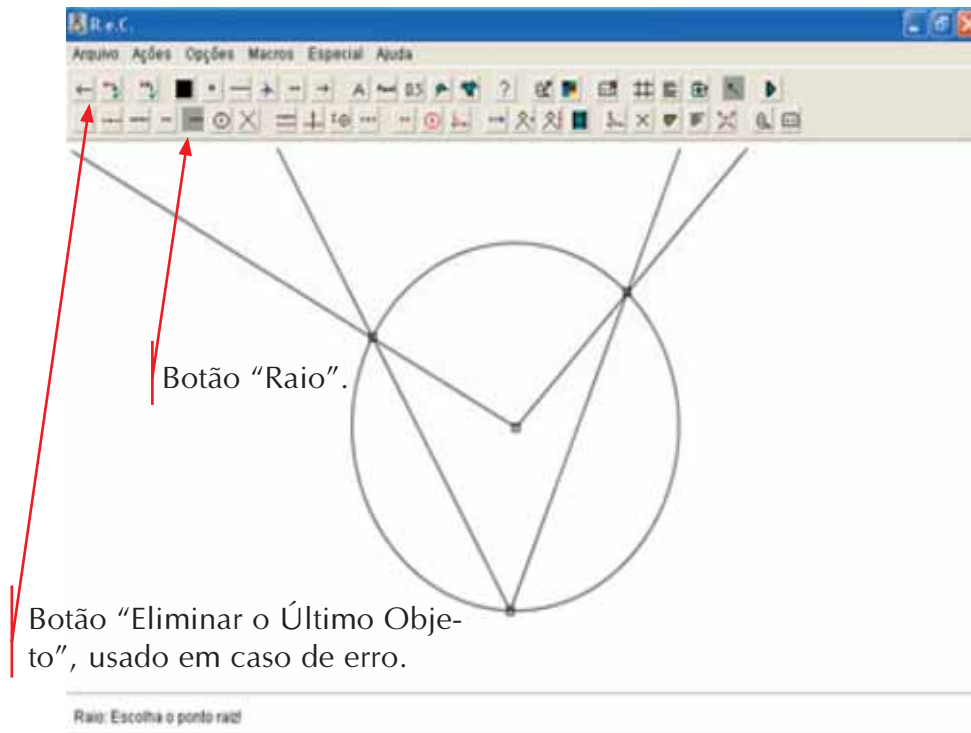


112

2) Crie dois outros pontos na circunferência. Para isso, existe a função “Ponto no Objeto”, assim, esse botão não sairá da circunferência. Clique, primeiro, em “Ponto no Objeto” e, depois, clique em um ponto qualquer da circunferência.

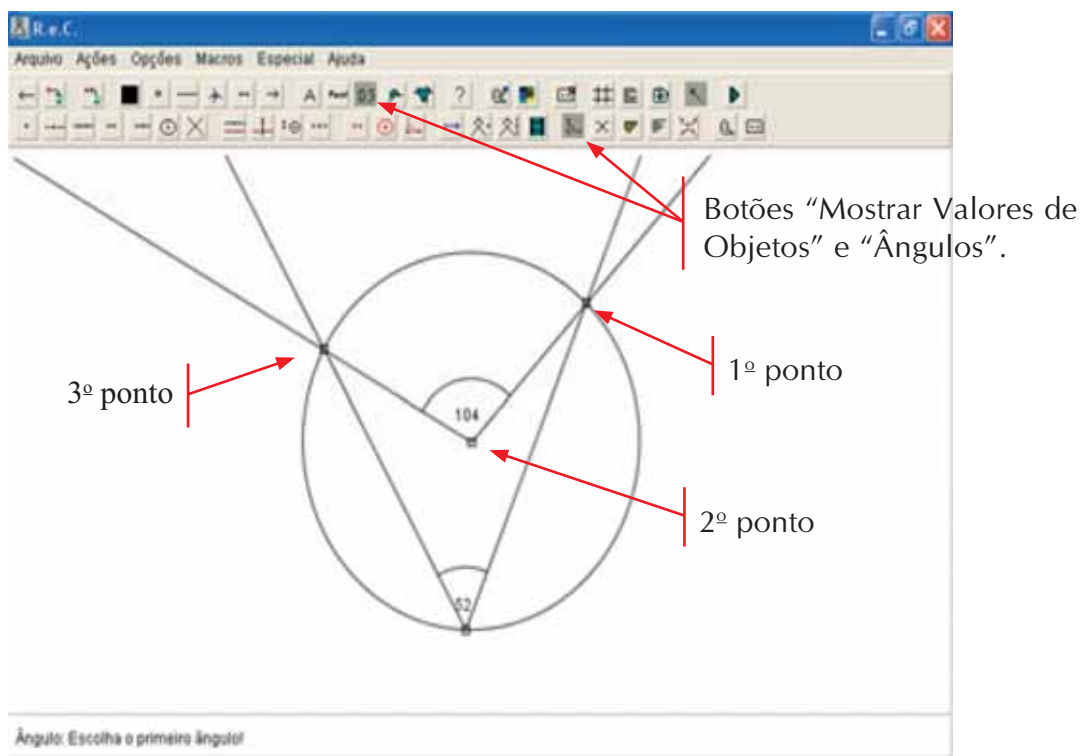


3) Agora vamos criar semi-retas formando os ângulos. A função que o programa usa para criar uma semi-reta chama-se "Raio". Clique nela e marque, em seguida, o vértice, e depois o ponto. Repita isso para todos os pontos. Se errar alguma coisa, use a seta "Eliminar o Último Objeto". Mesmo procedimento para ligar dois pontos na circunferência.

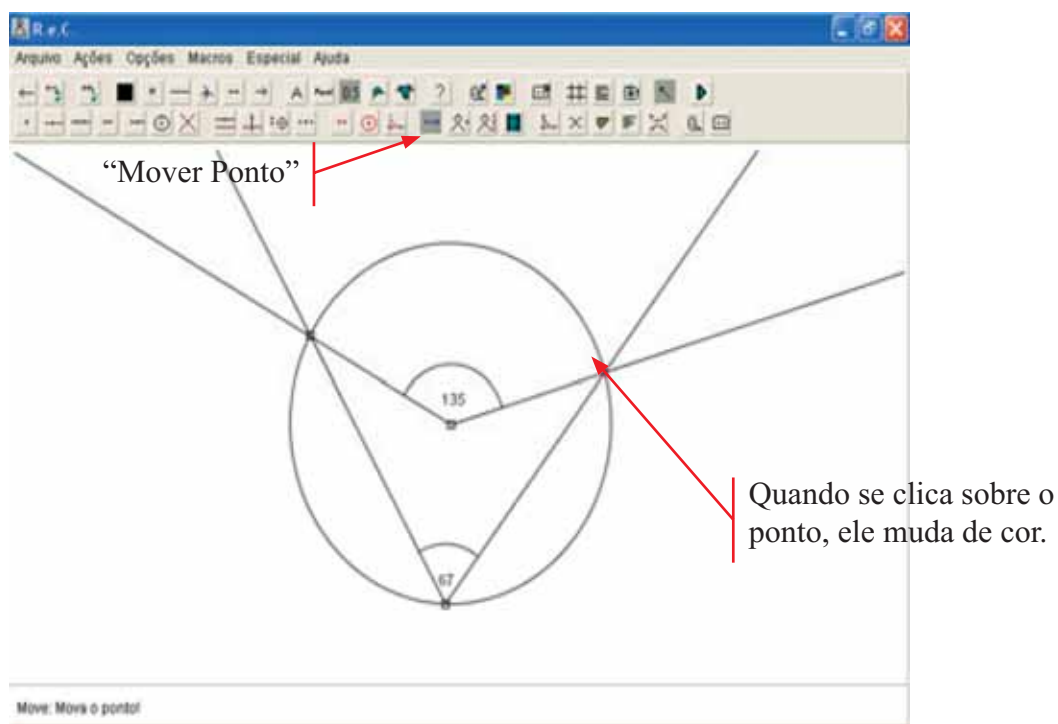


4) Para determinar a medida dos ângulos, é preciso usar duas funções. Clique em "Ângulo" e em "Mostrar Valores dos Objetos". Em seguida, marque o ângulo na seguinte ordem: ponto da circunferência, vértice, ponto da circunferência. Veja no desenho a seqüência. Depois, faça a mesmo para o ângulo inscrito.

113



5) O Régua e Compasso permite que você altere o desenho e tenha situações diferentes. Clique no botão “Mover Ponto” e mova um dos pontos, incluindo o centro da circunferência.



114

Deslocando-se os pontos, qual propriedade dos ângulos da circunferência você pode observar?

Em sua opinião, trata-se de uma demonstração matemática? Faça uma releitura do Texto de Referência da Unidade 16 do TP 4.



### Resumindo

Nesta Seção, você aprendeu a:

- Usar planilhas para resolver uma equação do terceiro grau.
- Usar métodos para a resolução de equações do segundo grau.
- Usar o *software* Régua e Compasso para determinar o ângulo central e inscrito em uma circunferência.

## Seção 3

# Transposição didática: trabalhando o uso da calculadora e a fatoração para a resolução de equações quadráticas



### Objetivo da seção

---

Ao longo desta Seção, esperamos que você possa:

Conhecer e produzir situações didáticas adequadas ao nível de ensino em que atua, envolvendo:

- o uso da calculadora para produzir situações matemáticas que levem os alunos a pensar matematicamente;
  - desenvolvimento de estratégias para promover a resolução de equações quadráticas por outros métodos.
- 



### Atividade 16

---

Vimos até aqui a importância do uso de novas tecnologias na aula de Matemática. Isso inclui desde o uso de calculadoras até mesmo o uso do computador. Leia o trecho do texto a seguir.

115

“(...) Mas o que sempre emperrou uma tomada de posição mais firme sobre presença das calculadoras no ensino foram as crenças, desprovidas de investigação consistente, de que alunos e alunas, não importa a faixa etária ou condição social, (...) ficariam preguiçosos, (...) desaprenderiam os algoritmos e (...) deixariam de raciocinar, caso usassem calculadoras na escola. Isto é tanto verdade como o velho mito de que “manga com leite faz mal à saúde”. (...)”

BIGODE, Antônio.  
Em [http://www.matematicahoje.com.br/telas/autor/artigos/artigos\\_publicados.asp?aux=Calculadoras#Anchor-BB](http://www.matematicahoje.com.br/telas/autor/artigos/artigos_publicados.asp?aux=Calculadoras#Anchor-BB),  
visitado em 26/05/2005.

O que você acha da afirmação acima? Você concorda que a calculadora deixa os alunos mais preguiçosos? Na sua opinião, é possível aprender Matemática com a calculadora? Se sim, em que momentos?

Você sabia que existe um museu da calculadora e que você pode ver pela Internet. O endereço é [www.boselli.com.br/museu](http://www.boselli.com.br/museu).



### Atividade 17

---

Com o uso de uma calculadora de quatro operações, escreva a seqüência numérica que aparece no visor:

- a)  $1+2=$  = = = = =  
 b)  $1 \times 2=$  = = = = =

Agora vamos ver outra situação. Que teclas devem ser apertadas para termos a seqüência:

- c) 7, 12, 17, 22, 27,...  
 d) 6, 12, 24, 48,...

Nesta Atividade você poderá discutir com os seus alunos vários elementos relacionados à seqüência numérica, podendo chegar até a sua generalização.



### Atividade 18

---

Uma atividade que os alunos gostam muito e que os ajuda bastante a perceberem as propriedades das operações é a de calcular sem usar algumas teclas.

116

Veja alguns exemplos:

- a)  $35 \times 9$ , sem a tecla 9.  
 b)  $73 - 23$ , sem "-".  
 c)  $875 \div 125$ , sem "÷".  
 d) Sem a tecla 8,  $5 \times 8$ ,  $9 \times 8$ ,  $12 \times 18$ ,  $1888 \div 2$ .



### Atividade 19

---

Discutimos rapidamente na Seção 2 sobre alguns professores que acham difícil resolver equação por outros métodos. É muito comum encontramos alunos que também acham difícil. Porém, é preciso compreender que se trata de uma mudança de paradigma por parte de professores e alunos. A resolução de equações quadráticas por fatoração, apesar de no início não parecer muito simples, torna o aluno capaz de resolver algumas equações mais rapidamente.

Encontramos alguns professores que até começam a resolver as equações do segundo grau quando são estudados os casos de fatoração na sétima série, por exemplo. Você já pensou em fazer isso com os seus alunos?

Depois que os alunos se habituarem a resolver algumas equações por fatoração, você verá que a "fórmula de Báskara" não é tão prática assim.

A nossa proposta é que você parta da resolução de equações a partir das funções e, se a sua escola tiver, com o uso do computador. Depois use outros métodos, como os que envolvem fatoração, e, por fim, a fórmula conhecida.

Propomos que, baseado nas atividades, você formule várias situações para serem realizadas com os seus alunos de 7<sup>a</sup> e 8<sup>a</sup> séries, as quais comecem a levá-los a resolver as equações quadráticas por fatoração. Se você não for professor dessas séries, não fique de braços cruzados: pense em uma situação em que você possa introduzir a solução de uma equação simples. O que acha de usar o material manipulável da Atividade 12?

Leve na próxima oficina, pois discutiremos esta Atividade.



### Resumindo

---

Nesta Seção, você teve a oportunidade de:

- Usar a calculadora para generalizar seqüências numéricas e aplicar algumas propriedades dos números.
- Desenvolver situações para a resolução de equação do segundo grau por métodos que usam a fatoração.

## Leituras sugeridas

BORBA, M.C.; PENTEADO, M.G. (org). *Informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão*. São Paulo: Olho d'Água, 2000.

O livro apresenta uma rica discussão sobre a formação de professores e pesquisas relevantes na área de informática educativa. Mostra também os vínculos que articulam pesquisa, extensão e ensino. Todos os capítulos trazem contribuições para o uso da informática na ação docente. O livro traz resultados de um dos mais importantes centros de pesquisa sobre novas tecnologias na Educação Matemática atualmente.

PENTEADO, M.G. *Novos atores, novos cenários: discutindo a inserção dos computadores na profissão docente*. Em: *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas*. Organizadora Maria Aparecida Viggiani Bicudo. P. 297-313. São Paulo: Unesp, 1999.

Neste artigo, você encontrará uma interessante pesquisa sobre a ação que o uso dos computadores provoca na sala de aula. São discutidas questões como: diferentes fontes de informação na sala de aula; autoridade e poder; relação entre os alunos e entre professor-aluno e a interação com diferentes mídias.



## Bibliografia

ARMSTRONG, A.; e CASEMENT, C. *A criança e a máquina. Como os computadores colocam a educação de nossos filhos em risco*. Porto Alegre: Artmed, 2001.

BORBA, M. C; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

D'AMBRÓSIO, U. *Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade*. Coleção Tendências em Educação Matemática, v. 1. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

FARIA, C.O. *O computador e a co-construção de conceitos matemáticos por alunos do Ensino Fundamental em uma situação planejada: uma análise microgenética dos processos de mediação*. Dissertação de mestrado. Goiânia, 2001.

FREIRE, P. *Educação como prática da liberdade*. Paz Terra, 1987.

\_\_\_\_\_. *Ética, Utopia e Educação*. Vozes, 2000.

\_\_\_\_\_. *Pedagogia do Oprimido*. Paz Terra, 1987.

KOPP, R. *Novas tecnologias da comunicação: interfaces a serviço de quem?* In: *Novas Tecnologias: Educação e Sociedade na era da Informação*. P. 57-72. Autêntica, 2001.

LÉVY, P. *Cibercultura*. Rio de Janeiro: Ed. 34, 1999.

\_\_\_\_\_. *As Tecnologias da Inteligência: o futuro do pensamento na era da informática*. Rio de Janeiro: Ed. 34, 1993.

\_\_\_\_\_. *A Revolução Contemporânea em Matéria de Comunicação*. In: MARTINS, F. M; SILVA, J. M. *Para navegar no século XXI: Tecnologias do Imaginário e Cibercultura*. Porto Alegre: Sulina/Edipurs, 1999.

## Texto de referência

### Educação Matemática e Informática: caminho e utopias de inclusão

Celso de Oliveira Faria

Durante o TP, discutimos sobre as novas tecnologias e o ensino da Matemática. Vimos alguns exemplos de atividades. Mas será que nós, professores da Educação Pública, temos condições de inserir o computador, a calculadora etc. em sala de aula enquanto não temos outros equipamentos fundamentais para a escola?

Discutir sobre a inclusão de alunos no processo de construção de uma Matemática que inclua o uso das novas tecnologias não parece tarefa fácil, por motivos óbvios: a complexidade e os paradoxos presentes nesta nova tecnologia. E passam pelos conceitos de democratização e liberdade.

Vamos conversar um pouco sobre isso? Então pretendemos levantar algumas questões: O que é tecnologia do pensamento? O que significa tecnologias informáticas? E a serviço de quem está a exclusão desta nova tecnologia? A partir daí, vamos nos ater um pouco sobre a Educação Matemática. Para isso, vamos partir das idéias de dois pensadores brasileiros: Paulo Freire e Ubiratan D'Ambrósio.

120

O desenvolvimento tecnológico humano deve inicialmente ser pensado como um processo de devir e de construção humano-social-histórica, onde todos os seus membros e componentes, físicos ou metafísicos e dos sentidos, controlam a sua gênese. É fundamental pensarmos que o computador não é uma máquina construída, *a priori*, apenas como uma necessidade humana. Mas a sua elaboração e utilidade no mundo moderno está impregnada de construções e reconstruções humanas.

É significativo dizer isto, pois muitos educadores precisam compreender que a tecnologia é uma construção humana e que o seu sentido e utilidade somos nós, homens, sociedade, cultura, que vamos alterando-a e dando-lhe sentido, ao mesmo tempo. As tecnologias informáticas são muito mais do que máquinas, pois significam uma reestruturação do pensamento humano no mundo das possibilidades da linguagem e da comunicação.

As tecnologias informáticas trazem no seu núcleo uma nova linguagem. É preciso compreendê-la e apropriá-la. Porém, é preciso também entendê-la como uma nova forma de comunicação, por novas teias, por uma série de informações desconectadas ou com conexões embrionárias ainda do que quer expressar.

Portanto, mesmo que esta nova tecnologia parta de uma construção humana datada e marcada por necessidades dos mais variados níveis, isto não significa que ela não esteja repleta de contradições. E a história mundial e brasileira não demonstra que o surgimento de novos meios de comunicação ou tecnologias de grande amplitude representou, por consequência, a sua democratização.

Por exemplo, a *imprensa de Gutemberg já dera início a este processo no século XV. Com ela, o poder da escrita dos monges copistas sofreu as primeiras vertigens. O poder não deixava de existir, apenas migrava das mãos de uns para as de outros.* (Kopp, 2001).

Esta “mudança de mãos” do poder parece nos mostrar que o desenvolvimento tecnológico não consegue resolver os problemas de exclusão ou acesso. Lévy (1999a) declara que cada sistema de comunicação fabrica os seus excluídos. Basta observarmos que a escrita e a leitura criaram um grupo de excluídos.

Porém, vale a pena perguntar se uma nova tecnologia produz um novo exército de excluídos ou se eles somam ou contrapõem. Lévy (1999b), no texto *A revolução contemporânea em matéria de comunicação*, diz que “o domínio dessas tecnologias intelectuais dá uma vantagem considerável aos grupos e aos contextos humanos que as utilizam de maneira adequada”.

Parece-nos que a maneira adequada de apropriação das novas tecnologias é fundamental nessa discussão. Os problemas de exclusão não estão resolvidos em países do primeiro mundo; é ilusão imaginarmos que as escolas dos países desenvolvidos estão cheias de computadores e com todos os alunos utilizando-os de forma adequada. Armstrong (2001), por exemplo, traz vários exemplos da má utilização do computador nas escolas americanas e canadenses.

Então precisamos garantir, no sentido lato do termo, uma educação nas novas tecnologias de maneira adequada. *O acesso à informática deve ser visto como um direito, e portanto, nas escolas públicas e particulares, o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua, no mínimo, uma “alfabetização tecnológica”.* (Borba e Penteado, 2001, p. 17).

É preciso alfabetizar para a tecnologia. O que significa isso? Como acontece essa alfabetização tecnológica? No intuito de compreender o que seria alfabetização tecnológica, vamos buscar, na pedagogia de Paulo Freire, um possível “modelo” para esta missão.

Para Paulo Freire, a escola deve ser um espaço aberto para o diálogo, para o embate das idéias, onde os alunos trazem as suas construções, os seus conceitos ou “pré-conceitos”, a sua visão de mundo e ideologias. O método freiriano parte das necessidades das pessoas, por meio de um processo de conectividade, por meio de uma gestão coletiva do conhecimento social a ser socializado de baixo para cima.

Na alfabetização do sujeito, vislumbram-se quatro possibilidades:

- A possibilidade de o sujeito ler o mundo, ou seja, pela sua curiosidade ao compreender o mundo, pela sua experimentação e vivência no seu grupo social ou até mesmo navegando na Internet. Traga as suas questões, dúvidas, palavras, temas geradores ou complexos temáticos. A escola é o local para se colocar tudo em cima da mesa e discutir, para que as idéias e as informações sejam avaliadas.
- O compartilhar da sua leitura do mundo. As leituras não são fechadas em si mesmas. É preciso compartilhá-las, trocá-las, alterá-las, colocá-las à prova. É preciso incorporá-las à inteligência coletiva. Inteligência esta que poderá ser alterada pelas novas leituras de mundo, afinal, é assim que se constrói e se reconstrói a inteligência coletiva.
- É preciso aprender a aprender, ou seja, é preciso que o aluno entenda os processos de se obter informações e de discuti-las, validá-las ou não, para a leitura do mundo. A partir dos temas complexos ou de situações-problema geradas pela vivência dos seus elementos, o aluno precisa aprender a organizar as suas idéias e a usar os conteúdos como instrumentos para entender o mundo em que vive. Assim, os conteúdos tornam-se o meio para a leitura do mundo: o importante é aprender a aprender.
- Em sujeitos autônomos que sabem aprender, que sabem colocar as suas idéias, que não temem o seu embate, que encontram interlocutores, só é possível reconhecer sujeitos

livres. Freire, neste sentido, propõe uma educação voltada para a libertação do sujeito, uma educação utópica, onde no seu projeto deve estar reinstalada a esperança.

Ao pensarmos sobre alfabetização tecnológica, estes quatro elementos do pensamento de Paulo Freire são fundamentais, como balizadores do que concebemos ser necessário para a inclusão dos nossos alunos.

É preciso pensar em uma escola que trabalhe com a curiosidade do aluno, que parta de situações-problema que são existenciais para os seus alunos. A Educação Matemática tem buscado um ensino contextualizado na vida do aluno e da sua comunidade. Então, as tecnologias informáticas, pensadas como tecnologias da linguagem e da comunicação, no uso da Matemática, devem ter essas quatro possibilidades como seus pressupostos na formação do indivíduo.

É preciso ter liberdade para apresentar idéias, para divulgá-las e estar pronto para colocá-las em prova. Nesse processo, é possível esperar a formação de um indivíduo cidadão que aprenda a ler o mundo em que vive e, assim, aprenda a ser livre.

Mas como pensar esses sujeitos utópicos e de esperança em um mundo tão paradoxal como o nosso?

Então falar de inclusão em Educação Matemática com novas tecnologias, para nós parece uma relação imediata pensarmos em Etnomatemática, quando entendemos que *os sistemas de conhecimento são conjuntos de respostas que um grupo dá às pulsações de sobrevivência e de transcendência, inerentes à espécie humana. São os afazeres e os saberes de uma cultura.*(D'Ambrósio, 2001).

122 D'Ambrósio afirma que, na transição do século XX para o século XXI, espera-se que os alunos adquiram e utilizem instrumentos comunicativos, analíticos e materiais para exercer o seu papel de cidadão. Assim, ele propõe um ensino voltado para três vertentes: literacia, materacia e tecnoracia.

Literacia trata-se da capacidade de os educandos processarem informações que estão expressas na forma oral, escrita, por cálculo, diálogo, nas mais variadas mídias, Internet etc.

Quando os símbolos são processados, o educando precisa interpretá-los e analisá-los, a fim de trazer alterações na sua vida cotidiana por meio de abstrações. E este sentido analítico dado aos símbolos é a materacia.

Nesta interpretação, é preciso que o aluno utilize instrumentos dos mais variados tipos, simples ou complexos, podendo estar contida a compreensão até mesmo do seu próprio corpo, permitindo avaliar a sua utilidade e aplicabilidade no campo das possibilidades e limitações. D'Ambrósio chama esta interpretação de tecnoracia.

Parecem-nos conceitos complicados, mas entendemos que, quando lemos a proposta de alfabetização de Paulo Freire em conjunto com o que D'Ambrósio propõe, estamos falando de teorias extremamente inter-relacionadas.

A escola é este local aberto, onde os alunos trazem as suas idéias, os seus problemas e as suas perguntas. Ali encontram um professor, perito, mais experiente e sabedor de algumas das ferramentas e conhecimentos necessários para interpretar o problema. Este professor sabe até onde pode ir e tem um olhar mais amplo.

A leitura do mundo passa a ser feita por meio das suas várias simbologias e formas que estão expressas por cálculos, textos lineares, hipertextos, links etc. (Literacia), for-

mando idéias complexas e situações-problema. O educando e o professor fazem análises, simulações, conclusões, generalizações, obtendo assim um extrato analítico (materia), sendo o mais importante aprender a aprender. Aprendem a levantar hipóteses, aprendem como comprová-las e discuti-las por meio de uma rede de informações, conteúdos, conceitos e significados e sentidos.

É necessário compartilhar idéias, pensamentos, ser compreendido. Assim, é preciso que exista comunicação entre os elementos, é preciso compartilhar tecnologias, até mesmo as do pensamento. Esta tecnologia começa no próprio controle do corpo, passando pelas tecnologias/máquinas e indo até as tecnologias da linguagem e da comunicação (tecnocracia).

Mas como é possível haver uma alfabetização informática libertadora?

Pensamos que um elemento importante é a desmistificação do computador como uma máquina “mágica”, para isto acreditamos na importância de o aluno conhecer os elementos da máquina – *hardware* e *software*, seus limites e inclusive a sua linguagem binária. Porém, essa introdução deve ser rápida e informativa.

Em compensação, é preciso conhecer mais profundamente algumas linguagens ou ferramentas computacionais. Hoje não é necessário conhecer linguagens específicas de programação para usar o computador, mas algumas tarefas lúdicas com a linguagem *logo* seriam muito válidas para que os alunos tivessem algumas idéias do que seja uma programação.

Daí, parte-se para as ferramentas ou aplicativos, portanto não se deve privilegiar uma linguagem por outra, mas sim procurar fazer com que o aluno aprenda a linguagem de forma analítica, como propõe D’Ambrósio no termo *materia*. É preciso que o aluno aprenda a linguagem de uma ferramenta como um meio para aprender a aprender qualquer aplicativo. Ou seja, deve-se estimular os alunos a lerem as telas de ajuda do programa e as mensagens de erro. Portanto, o que objetivamos é que o aluno aprenda a aprender.

Assim, o objetivo da aula de Matemática que utiliza a informática não deve estar centrado na utilização da máquina meramente. Mas, a partir dos problemas trazidos para a sala de aula, que o computador possa ser utilizado como ator na elaboração e comprovação de hipóteses e na simulação de idéias. Só assim é possível aprender a ler, escrever, compreender textos, entender gráficos, fazer cálculos simples ou complexos, fazer análises geométricas planas ou espaciais.

Quanto mais ativamente uma pessoa participar da aquisição de um conhecimento, mais ela irá integrar e reter aquilo que aprender. Ora, a multimídia interativa, graças à dimensão reticular ou não linear, favorece uma atitude exploratória, ou mesmo lúdica, face ao material a ser assimilado. É, portanto, um instrumento bem adaptado a uma pedagogia ativa.

LÉVY, 1993.

## Conclusão

Sem dúvida, podemos nos perguntar sobre como fazer tudo isto se estamos em uma escola pública, sem elementos fundamentais para o seu funcionamento. Como então pensar em uma alfabetização neste nível?

O que apresentamos aqui são pontos norteadores. A informática tem um papel paradoxal na nossa sociedade. É necessária a inclusão do sujeito, mas podemos correr o risco de estar formando indivíduos apenas para o trabalho e servindo para um projeto capitalista.

É verdade que devemos tomar muito cuidado para não entrarmos no jogo capitalista, ao mesmo tempo, não podemos excluir o acesso, principalmente, dos alunos da escola pública, pois muitos deles, se não tiverem esta formação na escola pública, possivelmente não conseguirão obtê-la fora dela.

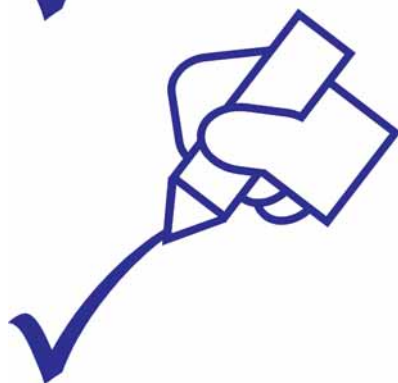
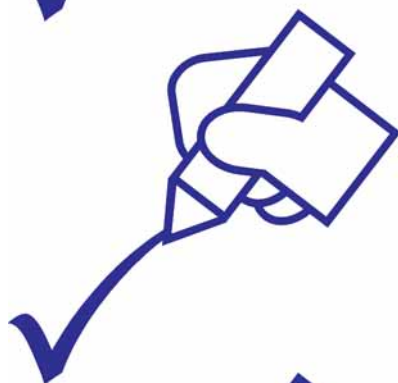
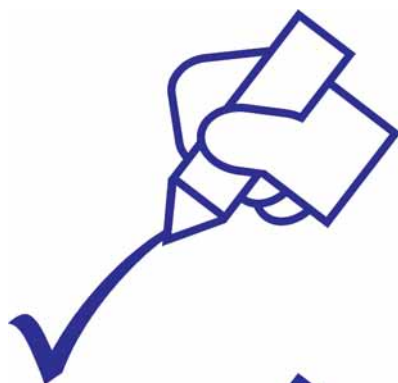
Somente com a continuidade e o progresso das pesquisas é que poderemos afirmar com certeza que a informatização mudará o panorama escolar, trazendo novas habilidades para os alunos, provavelmente em detrimento de outras, e também impondo mudanças para a carreira profissional do docente. Mas não esperemos que todos os problemas da educação e do ensino-aprendizagem estejam resolvidos a partir da introdução da informática na escola.

FARIA, 2001.

Ao encerrar este texto, gostaria de buscar uma visão utópica, similar à sonhada por Paulo Freire, ou seja, devemos instaurar a esperança de uma educação libertadora. Precisamos garantir aos nossos alunos a inclusão no processo de alfabetização informática. Vale lembrar que o Brasil possui leis que garantem a compra de computadores para escolas com dinheiro de empresas de telefonia privatizadas. Então, existe dinheiro para isso. Precisamos lutar para que esta verba seja realmente aplicada na compra de máquinas e que elas sejam instaladas nas escolas.

É uma luta, mas Freire, quando propôs uma escola libertadora, com a alfabetização para todos, também vivíamos em um país com níveis de analfabetismo altíssimos. Era um sonho conseguir formar uma sociedade alfabetizada na língua materna. Hoje ainda temos muitos analfabetos na língua materna, temos um outro contingente de analfabetos matematicamente falando e precisamos continuar lutando por mais uma alfabetização: a informática. Só assim poderemos ter uma sociedade livre para ler o mundo.

## Solução das atividades







## Solução das atividades

### Atividade 6

---

$$(20 - 2x) \cdot (10 - 2x) \cdot x$$

Volume máximo: 192,44 cm<sup>3</sup>

### Atividade 7

---

Resposta pessoal.

### Atividade 8

---

Lado maior:  $20 - 2x$

Lado menor:  $10 - 2x$

a)  $(20 - 2x) \cdot (10 - 2x)$

b)  $(20 - 2x) \cdot (10 - 2x) \cdot x$

c)  $4x^3 - 60x^2 + 200 \cdot x$

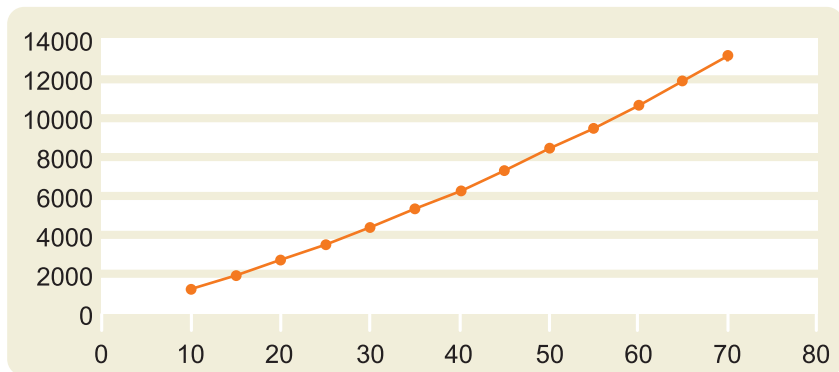
### Atividade 10

---

a)  $x^2 + 120x = 1$

b) Tabela

$x$	Área
10	1300
15	2025
20	2800
25	3625
30	4500
35	5425
40	6400
45	7425
50	8500
55	9625
60	10800
65	12025
70	13300



c) O 1m<sup>2</sup> ou 10.000 cm<sup>2</sup> está entre 55 e 60.

**Atividade 11**

x	y
-2	6
-1	0
0	-4
1	-6
2	-6
3	-4
4	0
5	6

Solução da equação: -1 e 4.

Outras funções:

$$f(x) = x^2 - 3x \text{ e } f(x) = 4$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 5 \text{ e } f(x) = 9$$

128

**Atividade 12**

Não é possível resolver todas as equações quadráticas por este método, principalmente as equações com raízes irracionais e negativas.

**Atividade 17**

- a) 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.
- b) 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128.
- c)  $2 + 5$ .
- d)  $3 \times 2$ .

**Atividade 18**

- a)  $10 - 1 = x \cdot 35$  ou  $8 + 1 = x \cdot 35$ .
- b)  $23 + 10 + + + +$ , como foram apertados 5 vezes, são 5 vezes 10, resposta 50.  
Ou pode-se fazer  $1 \text{ por } 1 \div 23+1 = = = = \dots =$ . Assim, aperta-se o igual 50 vezes.
- c)  $875 - 125 = = = = =$ . O igual foi apertado 7 vezes, então o resultado da divisão é 7.
- d)  $5x(7 + 1)$ ,  $9x(9 - 1)$ ,  $12x(17 + 1)$ ,  $1890 - 2 \div 2$ .

## Unidade 20

# Os triângulos na vida dos homens – Congruência de Triângulos

Nilza Eigenheer Bertoni



**Iniciando a  
nossa conversa**

---

Nesta Unidade, você terá a oportunidade de rever alguns conhecimentos e avançar em outros, relativos à Geometria.

Na Unidade 15, você aprendeu sobre semelhança de triângulos. Nesta Unidade, desenvolveremos conhecimentos sobre congruência de triângulos. Assim como o conceito de equivalência de fração tem a ver com o de igualdade de fração, sendo, entretanto, mais preciso; congruência é um conceito que se relaciona com o de igualdade, tomando-o de modo mais preciso, como você verá, ao ler a Unidade.

Foi Euclides, que viveu do século IV ao século III antes de Cristo, que, com o seu livro *Os Elementos* – uma série de 13 rolos de pergaminhos dos quais nenhum sobreviveu até hoje –, nos deu as ferramentas necessárias para revelar a natureza do universo. Esses conhecimentos e outros avanços da Geometria foram essenciais para que matemáticos e cientistas pudessem construir novas perspectivas sobre o nosso lugar no cosmos. É interessante notar que a congruência de triângulos foi trabalhada por Euclides no livro I de sua obra.

129

Como nas Unidades anteriores, esta também constará de três Seções.

Na Seção 1, você vai trabalhar em uma situação-problema ligada a contextos da vida diária.

Na Seção 2, desenvolveremos o conceito de congruência de figuras planas e vamos explorar algumas condições específicas que permitem concluir que dois triângulos são congruentes.

Na Seção 3, você conhecerá algumas idéias para trabalhar esses conceitos com os seus alunos, já que eles fazem parte do currículo do Ensino Fundamental e são relevantes para a vivência no mundo atual.



**Definindo o  
nosso percurso**

---

Ao longo desta Unidade, esperamos que você possa:

1 - Com relação aos seus conhecimentos matemáticos:

- Trabalhar sobre situações-problema da vivência cotidiana envolvendo decomposição de polígonos em triângulos.

- Identificar o conceito de polígonos congruentes e de triângulos congruentes.
- Identificar condições de igualdade de medidas de elementos correspondentes dos triângulos, as quais garantam a congruência de triângulos ou de polígonos.
- Identificar transformações do plano que garantam a congruência entre um triângulo e a sua imagem.
- Comprovar a congruência de polígonos ou de triângulos, em situações do mundo físico-social.

Esses conhecimentos serão desenvolvidos nas Seções 1 e 2.

2 - Com relação aos seus conhecimentos sobre Educação Matemática:

- Aprofundar a compreensão sobre argumentação e raciocínio dedutivo, dois aspectos importantes do conhecimento matemático. Isso será feito no Texto de Referência.

3 - Com relação à sua atuação em sala de aula:

- Conhecer e produzir situações de manipulação concreta e problemas do contexto físico-social para a exploração, junto aos alunos, dos conceitos de congruência e das condições que garantem a congruência entre triângulos.
- Conhecer translações, rotações e simetrias do plano, relacionando-as com a congruência de figuras planas.

Esses objetivos serão tratados na Seção 3.

## Seção 1

### Resolução de situação-problema: como o desconhecimento da Matemática causa transtornos na solução de problemas práticos



#### Objetivo da seção

---

- Perceber a importância para a vida humana do conhecimento sobre triângulos, desde os tempos antigos até os atuais.
  - Conhecer fatos relevantes da história da Matemática, associando-os a épocas históricas.
  - Trabalhar em situações-problema do contexto cotidiano, percebendo como fatos básicos da Matemática são essenciais para resolvê-las e evitar transtornos práticos.
-



### Os triângulos na história das construções e das descobertas humanas

O primeiro imperativo para o desenvolvimento da Geometria veio provavelmente com os egípcios, quando, no sexto milênio a.C., começaram a estabelecer comunidades fixas, calcadas na vida agrícola, e sentiram a necessidade de cobrar impostos sobre a terra. Eles desenvolveram métodos para calcular a área de quadrados, triângulos, retângulos, trapézios e círculos, já que o governo determinava os valores com base na altura da enchente do ano e na área de superfície das propriedades.

Daí em diante, a humanidade ousou medir a Terra e o Universo, até mesmo a altura de pirâmides, árvores e morros, a largura de rios, o raio e a circunferência da Terra etc. Atualmente, o homem esmiuça o espaço cósmico do mesmo modo como fazia com o nosso planeta, há milênios.

O triângulo sempre teve um lugar especial na construção desses conhecimentos.

Vamos começar lembrando de quatro gigantes da história da Matemática, que viveram entre os séculos VI e II a.C.

Séc. VI	Séc. V	Séc. IV	Séc. III	Séc. II	Séc. I
Tales					0
		Euclides			
			Arquimedes		

Tales nasceu por volta de 620 a.C. Você já viu, na Unidade 15, como Tales usou triângulos semelhantes para a determinação da altura de uma pirâmide.

Também já leu sobre Pitágoras e o seu famoso teorema, relativo a medidas dos lados em um triângulo retângulo. Pitágoras viveu no século VI a.C.

Dois séculos depois, entre os séculos IV e III a.C., viveu Euclides. No livro I, encontram-se postulados a teoria sobre retas paralelas e teoremas de congruência para triângulos.

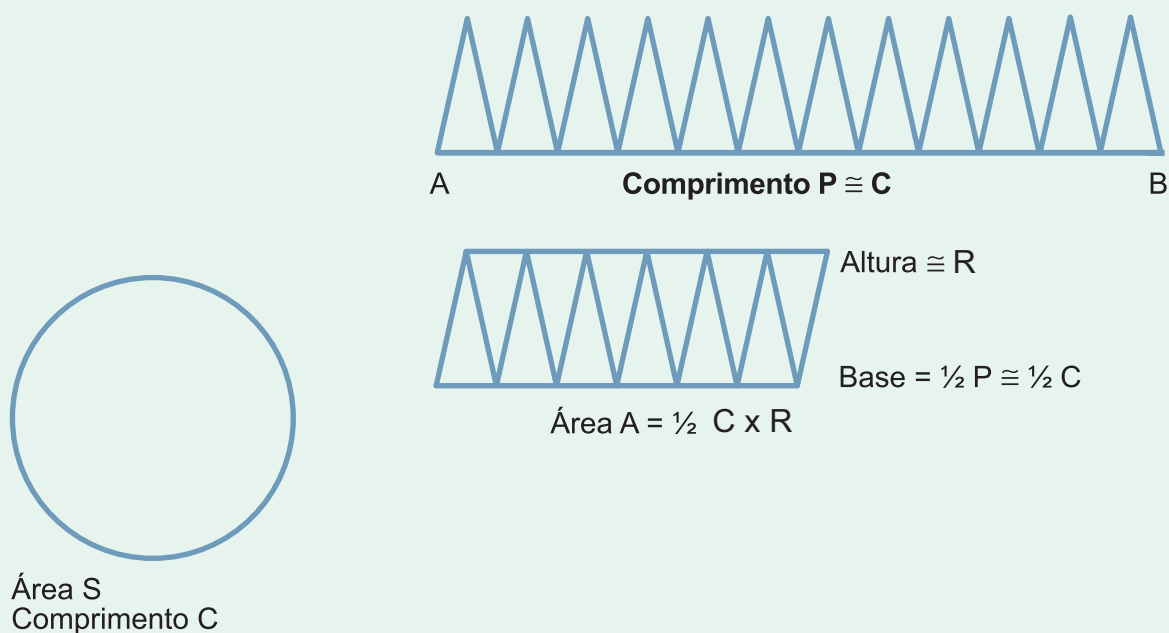
No século III a.C., de 287 a 212, viveu Arquimedes. Um problema sobre o qual Arquimedes mostrou toda a sua habilidade como matemático foi, sem dúvida, o cálculo da área de um círculo de raio  $R$ .

Para isso ele usou um raciocínio que só mais tarde (1600 a 1700 d.C.) iria ser utilizado por Newton e Leibniz, na invenção do cálculo infinitesimal. Veja qual foi o seu raciocínio:

Seja  $S$  a área do círculo. Dividimos tal círculo em um número muito grande de triângulos iguais (na figura, são apenas 12). Obtemos assim um polígono cuja área  $A$  é menor do que  $S$  (área do círculo). Colocamos agora tais triângulos sobre um segmento  $AB$ , de medida  $P$ .  $P$  é menor do que o comprimento  $C$  da circunferência do círculo, porque a base de cada triângulo é menor do que o arco de círculo correspondente ao triângulo.

Com essa tira de triângulos, podemos formar um “retângulo” de altura  $R$  (aproximadamente) e de base  $P/2$ , obtido dobrando-a ao meio (para um número finito de triângulos, temos um paralelogramo) e encaixando uma das partes sobre a outra. A área desse “retângulo” é  $A$  e é menor do que  $S$ .

A área de A se aproximará de S quanto maior for o número de divisões. Se o número n de divisões for infinito, a área A coincidirá com S, e o comprimento P coincidirá com C.



Arquimedes conhecia também a relação entre o comprimento C da circunferência e o seu diâmetro  $2R$ , chamada de  $\pi$ , e determinou uma aproximação para esse valor:

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}$$

Em notação decimal, que não existia naquele tempo, isso significa:

$3,140845 < \pi < 3,142857$ . Uma aproximação impressionante para a época!

Dessa relação, obtém-se  $C = \pi \times 2R$ , e a área da circunferência fica

$A = \frac{1}{2} (\pi \times 2R) \times R$ , ou seja,  $\pi R^2$  (em notação atual, pois a notação para potências não existia na época).

Outra realização importante foi feita por Eratóstenes, que viveu na mesma época que Arquimedes. Usando varetas, a sombra do sol e o conhecimento sobre triângulos, Eratóstenes determinou a medida da circunferência da Terra (Guelli, p.49-50, 1993).

O desenvolvimento posterior do estudo dos triângulos levou ao desenvolvimento da Trigonometria.

Atualmente, resultados antigos, como os teoremas de Pitágoras e de Tales, congruência e semelhança de triângulos, triangulação de figuras para cálculo de suas áreas, bem como resultados da Trigonometria, são constantemente usados como recursos para se resolver problemas complexos em construções civis, industriais, medições agrárias, cálculos espaciais etc.

A ciência e a tecnologia atuais têm no conhecimento dos triângulos um recurso valioso para a solução dos mais variados problemas.

## Situação-problema

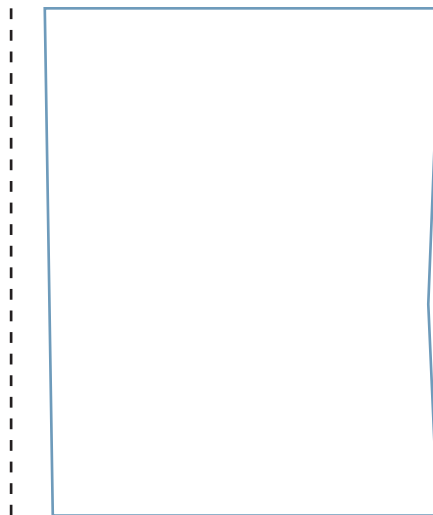
Um espelho deveria ser colocado recobrendo exatamente o fundo de um vão, aparentemente retangular, com base igual a 1,5m e altura igual a 2m. Cortado o espelho, ele não entrou no vão, mesmo ajustando-se a parede esquerda e a base para as posições corretas o espelho não afundava no vão, dando a impressão de que, a menos da base, ele estaria muito largo.

As medidas do espelho foram verificadas e comprovou-se que ele era um retângulo exato, com as medidas indicadas. A seguir, foram verificadas as medidas do vão, que ficaram assim determinadas:

Base inferior = 1,5m  
 Base superior = 1,53m  
 Lateral esquerda = 2m  
 Lateral direita = 2,02m

Cortou-se o espelho com essas medidas, mas ele, novamente, não entrou.

Investigando melhor as medidas do vão, verificou-se o seguinte:



A lateral esquerda não acompanhava o fio de prumo (representado pelo segmento pontilhado), e a lateral direita apresentava um ligeiro ângulo, como na figura.

A verdade sobre o que aconteceu é quase inacreditável: a firma fez mais cinco espelhos! Evidentemente, antes disso, ela quis desistir e devolver o dinheiro, mas o engenheiro, que era um cliente assíduo, impediu isso. Assim, na sétima tentativa, o espelho encaixou-se corretamente. Isso nos leva a cogitar se a Geometria não poderia ter auxiliado em uma solução precisa do problema desde o início. Neste sentido, colocamos três questões para você:

- 1 - Por que o espelho cortado com as quatro medidas dos lados não se encaixou?
- 2 - Que medições você faria no vão e como, com o auxílio delas, você construiria um espelho que se encaixasse perfeitamente neste?
- 3 - Você acha que um desenho do espaço existente, respeitando-se as proporções, serviria para auxiliar na resolução da situação?

## Seção 2

# Construção do conhecimento matemático em ação: polígonos e triângulos congruentes



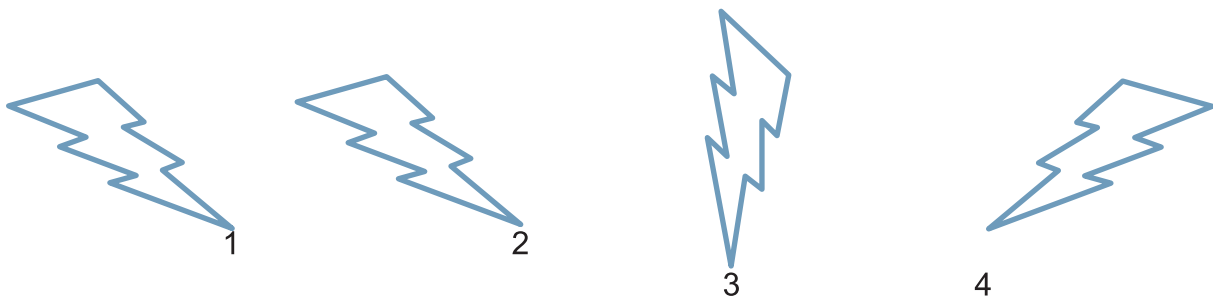
### Objetivo da seção

- Identificar os conceitos de polígonos e triângulos congruentes.
- Identificar condições de igualdade de medidas de elementos correspondentes dos triângulos que garantam a congruência de triângulos ou de polígonos.
- Identificar transformações do plano que garantam a congruência entre um triângulo e a sua imagem.
- Comprovar a congruência de polígonos ou de triângulos em situações do mundo físico-social.

## Revendo os seus conhecimentos: congruência e congruência de triângulos

Veja a ilustração de quatro figuras congruentes.

134



Afinal, qual é a relação entre igualdade e congruência?

Dois triângulos serem congruentes é o mesmo que serem iguais?

Em Matemática, o que ocorre é o seguinte: uma figura só é igual a si mesma. Se ela é idêntica a uma outra que não ocupe a mesma posição, dizemos que as duas são congruentes. Intuitivamente, no caso de figuras físicas ou concretas, podemos dizer que são congruentes se coincidem por sobreposição.

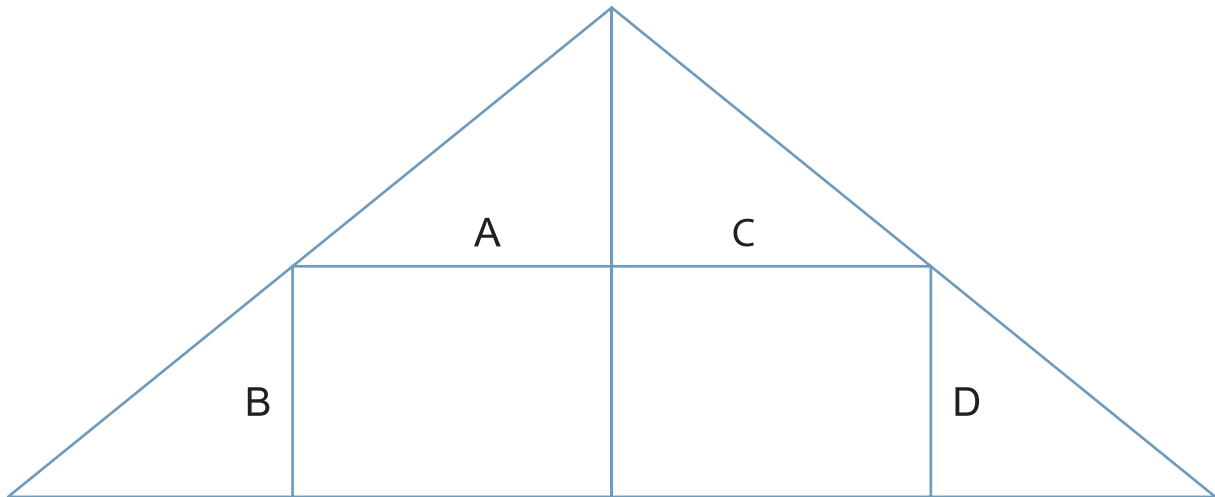
Em alguns casos, para que essa sobreposição seja possível, é necessária uma inversão de uma das figuras, como foi o caso da primeira para a quarta figura. Na verdade, os movimentos necessários para haver a sobreposição são:

- da primeira para a segunda: uma translação ou deslizamento no plano, seguindo uma mesma direção;



- da primeira para a terceira: uma rotação, e uma translação;
- da primeira para a quarta: uma inversão, ou melhor, uma simetrização e uma translação.

Na figura a seguir, todos os triângulos menores são congruentes. Veja que movimentos levam um sobre o outro.



O triângulo A vai se sobrepor ao B por uma translação (ou deslizamento) sem inversão. O mesmo ocorre com os triângulos C e D. Os triângulos A e C (assim como os triângulos B e D) também são “sobreponíveis”, mas é necessária uma inversão em um deles, a qual pode ser vista como uma simetrização ou rotação espacial – pense, por exemplo, em girar A em torno do lado comum que este tem com C, até tombar sobre C. Portanto, os quatro triângulos, A, B, C e D, são congruentes entre si.

Ao longo desta Unidade, procuraremos dar maior precisão a essas noções intuitivas.

Provavelmente, os seus conhecimentos sobre congruência podem ser sintetizados como segue:

## Triângulos congruentes – definição

Dizemos que dois triângulos são congruentes se todos os seus elementos são idênticos. Ou seja, os lados de um têm as mesmas medidas que os lados do outro, e os ângulos compreendidos entre lados de mesma medida têm o mesmo valor.

## Condições que garantem a congruência de triângulos (casos de congruência)

São os famosos casos de congruência. Eles nos dizem que, para se verificar a congruência de dois triângulos, não é necessário verificar se os seis pares de elementos correspondentes são idênticos (três pares de lados e três pares de ângulos). Eles afirmam que apenas três determinados pares idênticos podem ser suficientes para garantir a congruência. Você se lembra de quais são esses pares? Antes de citar todos, vamos ver como esta igualdade de três pares funciona na prática.

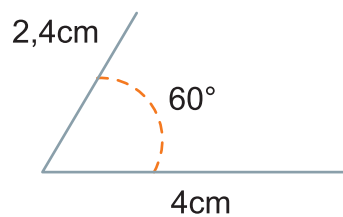


### Atividade 1

Você deve desenhar um triângulo com três elementos conhecidos: um lado medindo 4cm, um lado medindo 2,4cm e um ângulo de  $60^\circ$  entre os dois lados.

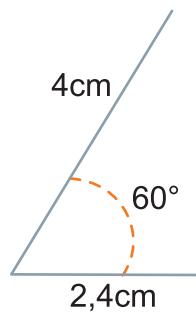
Tente!

Pois é. De posse de uma mesma régua e de um transferidor, você deve ter desenhado algo como:

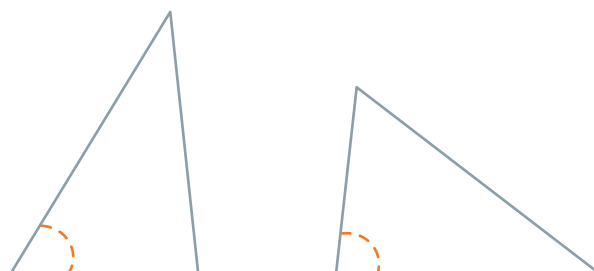


Você pode ter desenhado o lado menor na horizontal.

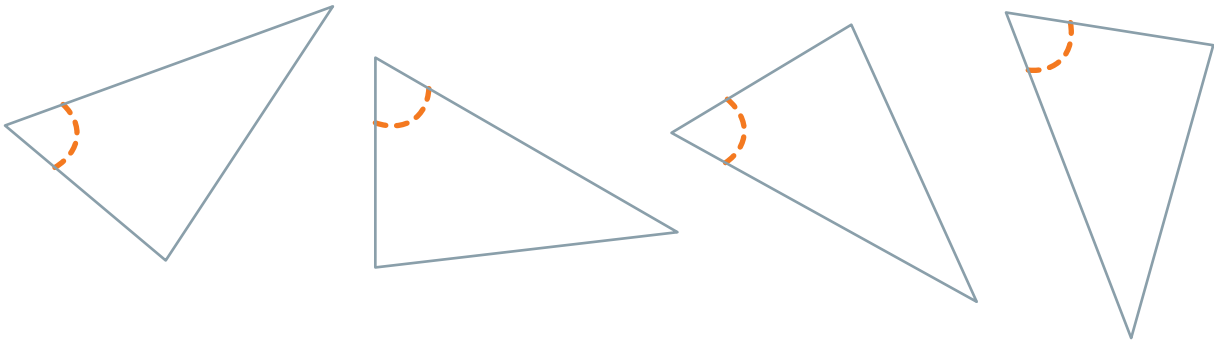
136



E agora que você já marcou os três elementos dados, como fazer para completar o triângulo? Só existe um jeito: ligando as extremidades livres dos dois lados.



É claro que você pode ter escolhido qualquer posição para desenhar o triângulo.



Moral da estória: com todas essas possibilidades de desenho, o que ocorreu é que qualquer dos triângulos desenhados pode ser sobreposto ao outro (se quiser, tire uma cópia da folha e recorte-os. Você verá que são todos “sobreponíveis”). Ou seja, com esses três elementos, só existe um triângulo possível. Ou melhor, não é exatamente um único, mas é uma série de triângulos *congruentes*.

E quanto ao caso dos três pares de elementos iguais? É uma outra maneira de se dizer a mesma coisa – se os três elementos *determinam* um único triângulo, então dois triângulos que tiverem esses três elementos serão congruentes. Resumindo, dizemos que este é o caso lado, ângulo, lado de congruência de triângulos, referido como LAL.

**LAL** – lado, ângulo, lado

Se dois triângulos têm dois lados e o ângulo entre eles respectivamente iguais (lados com comprimentos iguais e ângulos com as mesmas medidas), então os triângulos são congruentes.

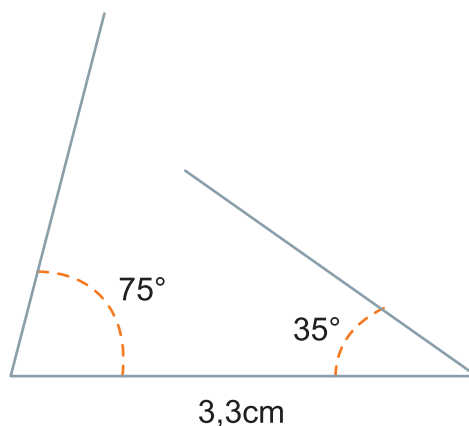
137

Mas você deve saber que não são apenas esses três elementos que determinam um triângulo. Veja quais são os outros:

**ALA** – ângulo, lado, ângulo

Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado comum a ambos respectivamente iguais (lados com comprimentos iguais e ângulos com as mesmas medidas), então os triângulos são congruentes.

Suponhamos que exista um triângulo com um lado de 3,3cm, entre dois ângulos: um de  $75^\circ$  e outro de  $35^\circ$ .



Repare: O tamanho dos segmentos que usamos para traçar os lados de cada ângulo não tem qualquer influência na medida do ângulo. Neste caso, um dos lados deve medir 3,3cm, pois esta será a medida do lado do triângulo. O tamanho dos outros lados fica livre até o momento de definir o triângulo pedido. Intuitivamente, percebemos que haverá um único jeito de fechar o triângulo, de modo que existam os três elementos dados. Ou seja, dadas as medidas de dois ângulos e do lado entre eles, fica determinado um único triângulo.

**LLL** – lado, lado, lado

Se dois triângulos têm os três lados respectivamente iguais (de mesmo comprimento), então os triângulos são congruentes.

**AAL** – ângulo, ângulo, lado

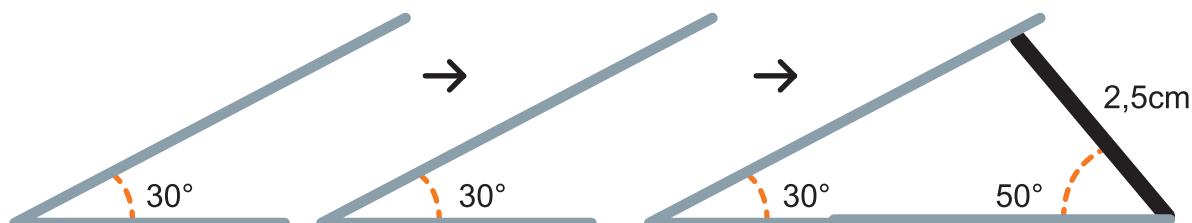
Se dois triângulos têm: dois ângulos respectivamente iguais, um lado igual, não compreendido entre os dois ângulos iguais, mas adjacente a um mesmo ângulo, então os triângulos são congruentes.

138



Neste caso, a nossa intuição não funciona tão facilmente. Suponhamos que o triângulo tenha um ângulo de  $30^\circ$ , um ângulo de  $50^\circ$  e um lado, não comum a ambos os ângulos, porém adjacente a um mesmo ângulo (o de  $30^\circ$  ou o de  $50^\circ$ ), medindo 2,5cm. Na figura, apenas o segmento com 2,5cm não pode ser alterado; os outros segmentos servem apenas para dar a abertura dos ângulos e podem ser maiores ou menores.

Vamos tentar formar o triângulo com esses três elementos, aproximando o ângulo de  $30^\circ$  do resto da figura.



Vemos que existe uma posição em que se forma o triângulo, com os ângulos de  $30^\circ$  e  $50^\circ$  e o lado (adjacente ao ângulo de  $50^\circ$  e não comum aos ângulos) de 2,5cm.

Não importa que os dois lados horizontais, um de cada ângulo, estejam parcialmente sobrepostos. Também não importa que tenha sobrado um pequeno segmento no lado do

ângulo de  $30^\circ$ . Esse segmento pode ser descartado sem afetar o ângulo. O importante é que conseguimos um único triângulo com os dois ângulos dados e com o lado dado.

Esse caso pode ser formulado de outro modo:

**AAL** – ângulo, ângulo, lado

Se dois triângulos têm um lado igual, um ângulo adjacente a esse lado igual e o ângulo oposto ao lado também igual, então os triângulos são congruentes. (Uma formulação mais precisa seria: se dois triângulos têm um par de lados iguais, um par de ângulos adjacentes a esses lados iguais e os ângulos opostos aos lados iguais também iguais, então os triângulos são congruentes).

Existe ainda o caso LLA. Como no caso AAL, é preciso se ter atenção. Podemos enunciar assim:

**LLA** – lado, lado, ângulo

Se dois triângulos têm: dois lados respectivamente iguais, um ângulo igual, não compreendido entre os dois lados iguais, mas adjacente a um mesmo lado igual, então os triângulos são congruentes.

Este mesmo caso pode ser formulado de outro modo: se dois triângulos têm um ângulo igual, um lado adjacente a esse ângulo igual e o lado oposto ao ângulo também igual, então os triângulos são congruentes.

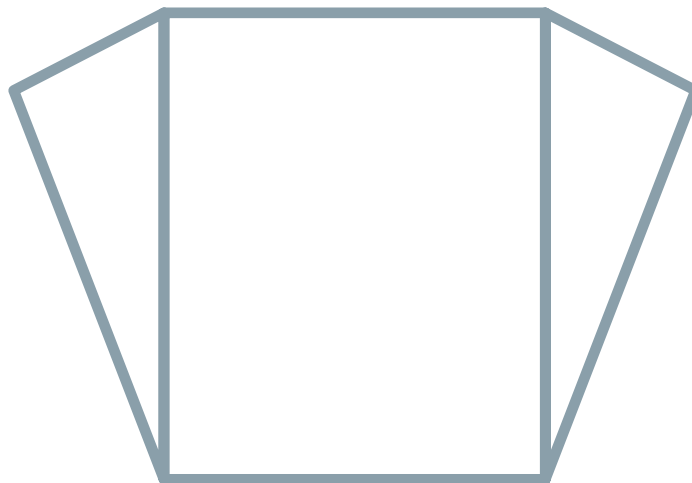


## Atividade 2

139

Para enfeitar a fachada da casa, o desenhista planejou colocar dois triângulos iguais, isto é, congruentes, nas laterais da janela retangular, que já tem moldura de madeira.

Para fazer os dois triângulos, o construtor usou os lados da janela e comprou:



- dois pedaços de madeira maiores e iguais;
- dois pedaços menores, também iguais.

Como o construtor sabia que os dois triângulos ficariam iguais?

## Casos de congruência em triângulos retângulos

Para triângulos retângulos, essas condições vistas anteriormente, as quais determinam um único triângulo ou permitem inferir a congruência de dois triângulos, ficam ainda mais simples (dizemos que as condições podem ser enfraquecidas). Isso ocorre porque os triângulos já têm um elemento comum, que é o ângulo reto, e os três lados estão *amarrados* pela relação de Pitágoras, a qual garante que, conhecendo-se dois dos lados em um triângulo retângulo, o terceiro lado está determinado. Veja como ficam algumas dessas condições simplificadas:

**LAL** – lado, ângulo, lado  $\rightarrow$  **LA**

Na verdade, é preciso especificar se o lado dado é um cateto ou uma hipotenusa.

Ou seja, o que garante a existência de um único triângulo são os elementos:

- cateto, ângulo não reto adjacente;

ou

- hipotenusa, ângulo adjacente.



### Atividade 3

140

Desenhe dois triângulos retângulos:

- o primeiro com um cateto medindo 5cm e um ângulo adjacente igual a  $35^\circ$ .
- o segundo com a hipotenusa medindo 4cm e um ângulo adjacente de  $50^\circ$ .

Verifique em cada caso anterior, se os triângulos possíveis são todos congruentes.

**ALA** – ângulo, lado, ângulo  $\rightarrow$  **AL**

Este caso recai no caso anterior: basta dar um ângulo não reto e um lado adjacente, especificando se o lado é um cateto ou a hipotenusa.

**LLL** – lado, lado, lado  $\rightarrow$  **LL**

Para que um triângulo retângulo fique determinado, a menos de congruência, basta dar dois lados, especificando se são:

- dois catetos;

ou

- um cateto e a hipotenusa.

Pela relação de Pitágoras, o terceiro lado estará determinado e, portanto, conheceremos os três lados.



## Articulando conhecimentos

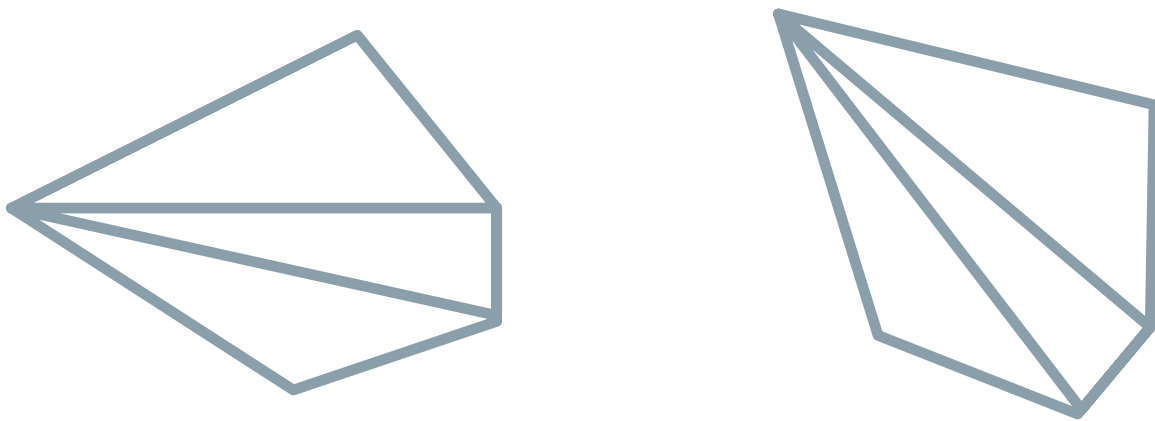
Será que a nossa competência em triângulos congruentes pode nos dar algo além do conhecimento da definição e dos casos de congruência?

Qual seria a importância de se estudar corpos ou figuras congruentes?

A indústria produz objetos ou corpos congruentes, como peças metálicas, com a ajuda de moldes, do mesmo modo como alguns objetos decorativos são produzidos.

Os matemáticos resolvem o problema de construir uma figura congruente a qualquer figura dada.

Se pensarmos inicialmente em figuras limitadas por linhas retas, a tarefa é simples, pois tais figuras podem ser subdivididas em triângulos. Ou seja, a teoria da congruência de triângulos nos dá a teoria da congruência de todas as demais figuras limitadas por linhas retas.

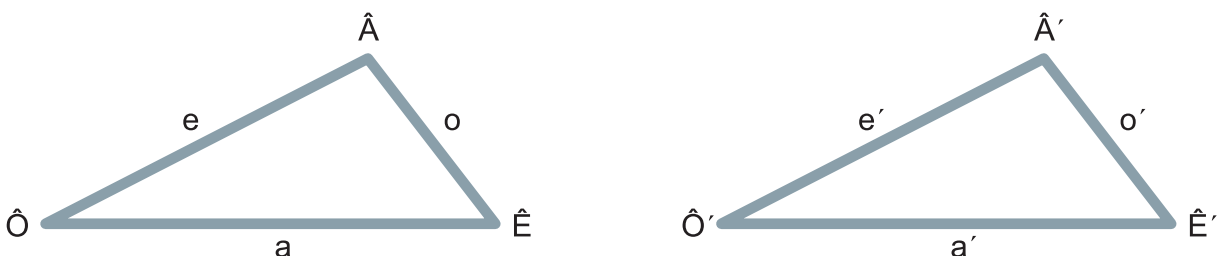


141

Por esta razão, a teoria de triângulos é tão importante na Geometria. Isto explica também por que a teoria da congruência refere-se apenas à congruência de triângulos – não é necessário estudar a congruência entre quadrados, retângulos, paralelogramos, trapézios ou polígonos em geral.

## Verificando a não congruência de triângulos por meio de contra-exemplos

Voltando aos casos de congruência de triângulos, há algo em que ainda se deve pensar. Triângulos congruentes têm seis pares de elementos com a mesma medida, certo?



- 1)  $\hat{A} = \hat{A}'$
- 2)  $\hat{E} = \hat{E}'$
- 3)  $\hat{O} = \hat{O}'$
- 4)  $a = a'$
- 5)  $e = e'$
- 6)  $o = o'$

Mas já vimos que é possível haver casos em que apenas três dessas igualdades garantam a congruência. São:

LLL - igualdades 4-5-6.

LAL - igualdades 3-4-5; 2-4-6; 1-5-6.

ALA - igualdades 1-6-2; 1-5-3; 2-4-3.

AAL - igualdades 1-2-4; 1-2-5; 1-3-4; 1-3-6; 2-3-5; 2-3-6.

LLA - igualdades 4-5-1; 4-5-2; 4-6-1; 4-6-3; 5-6-2; 5-6-3.

Entretanto, não foi considerada a igualdade do tipo:

AAA (três ângulos respectivamente congruentes);

Para definir o caso AAA, as igualdades seriam 1-2-3.

142 Talvez os matemáticos tenham tentado provar, mesmo sem a condição de adjacência, que os casos AAL e LLA sempre asseguravam a congruência, mas não conseguiram. Em certo ponto das tentativas, eles devem ter começado a desconfiar que estavam tentando provar algo que não era verdade. É comum, nesses casos, que a investigação seja suspensa e que seja procurado um *contra-exemplo*. O que significa isso? Que vai ser procurado um caso particular de dois triângulos para os quais essas condições valem, mas os triângulos não são congruentes. Isso será um contra-exemplo da validade geral da propriedade que estavam querendo demonstrar. Tendo-se um contra-exemplo, não faz mais sentido procurar a demonstração. Na próxima Atividade, você deverá buscar tais contra-exemplos.

Não exigir a adjacência significa, no caso AAL, dizer que dois triângulos que tenham dois ângulos iguais e um lado qualquer igual, são congruentes. Ou seja, estaríamos afirmando que seriam congruentes dois triângulos com elementos iguais AEa em um deles e A'E'e' no outro. Parece o caso AAL, mas a é adjacente a E, já e' é adjacente a A'.



#### Atividade 4

Não exigir a adjacência significa, no caso AAL, dizer que dois triângulos que tenham dois ângulos iguais e um lado qualquer igual, são congruentes. Ou seja, estaríamos afirmando que seriam congruentes dois triângulos com elementos iguais AEa em um deles e A'E'e' no outro. Parece o caso AAL, mas a é adjacente a E, já e' é adjacente a A'.

- a) Apresente dois triângulos que tenham os três ângulos (AAA) respectivamente congruentes (mesma medida) e que NÃO sejam triângulos congruentes.
- b) Apresente dois triângulos que tenham:



- dois pares de lados correspondentes iguais (mesmo comprimento);
- um par de ângulos congruentes (mesma medida), que não seja o ângulo determinado pelos dois lados considerados no triângulo;

e que NÃO sejam triângulos congruentes.

Esta Atividade acaba com a expectativa de que os casos AAA e LLA possam garantir, de modo geral, a congruência de triângulos.

Mas repare: existem casos particulares de triângulos com três pares de ângulos iguais e que são congruentes. O que não se garante é que quaisquer triângulos com três pares de ângulos iguais sejam congruentes. Nessas condições, é possível garantir apenas *semelhança*.

Na verdade, a definição de congruência de triângulos e os casos de congruência que apresentamos constituem uma síntese da teoria da congruência de triângulos. Mas ainda perguntamos: o que mais podemos e devemos estudar?

Justificar ou demonstrar esses casos de congruência é uma tarefa a fazer. Ou seja, como garantir, matematicamente (e não apenas por recortes e sobreposição), que aquelas igualdades entre alguns pares de elementos correspondentes garantam a igualdade dos seis pares de elementos? Essa já é uma boa tarefa. As demonstrações podem ser feitas por métodos matemáticos tradicionais. Mas, como congruência articula-se com sobreposição e, portanto, com movimentos planos que garantam sobreposição, as demonstrações poderiam ser feitas com o uso de conceitos de rotação, translação, reflexão ou composição, como transformações no plano que levam um triângulo a estar exatamente sobre o outro. Uma transformação deste tipo é chamada de **isometria**.

143



### Articulando conhecimentos

Isometria é uma transformação do plano, que leva pontos do plano a pontos do plano, conservando as distâncias entre eles. Veja:

Iso	metria
mesma	medida

As translações, rotações e reflexões do plano são isometrias.

Qualquer composição dessas transformações é também uma isometria.

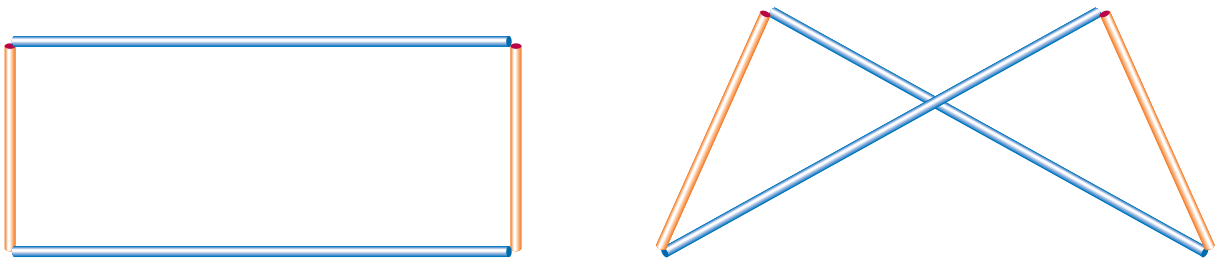
Além dessa parte mais técnica, relacionada aos métodos próprios e essenciais da Matemática que garantem a precisão e a confiabilidade de muitos dos resultados matemáticos, há outro aspecto, mais dinâmico, que é a competência em trabalhar com esses resultados, relacionando-os e aplicando-os à resolução de problemas.

Vamos começar pelas últimas competências, deixando para mais adiante as demonstrações. Sobre o que faremos agora, você pode tomar como verdadeiros os casos de congruência e pode usá-los, quando necessário.

## Um artefato engenhoso

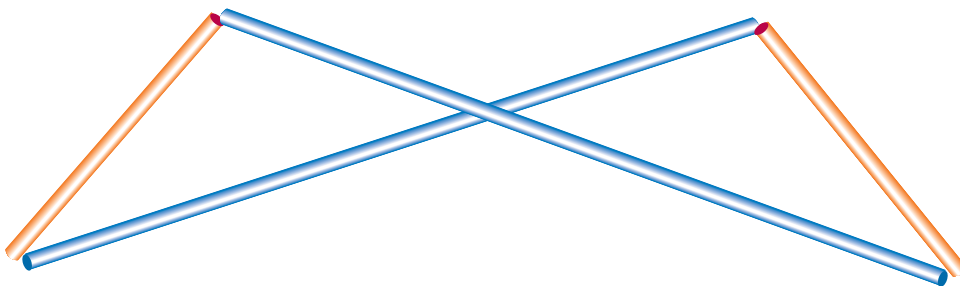
Para prosseguir trabalhando neste módulo, você deverá preparar um material auxiliar muito simples:

Pegue dois canudos de refrigerante de certa cor e corte-os com o comprimento de aproximadamente 25cm (pode ser mais ou menos). Separe outro canudo, de cor diferente, e corte-o em dois pedaços de aproximadamente 12cm. Passe um fio grosso (ou linha dupla) por dentro dos quatro pedaços, alternando os canudos: maior, menor, maior, menor. Amarre bem e corte o fio.



Embora você tenha montado um retângulo, os lados podem ser cruzados, como na segunda figura. Veja que você pode abrir e fechar a segunda figura:

144



### Atividade 5

Considerando a figura imobilizada e completando-a com um segmento que forma uma base, você pode achar quatro triângulos, congruentes dois a dois (porém os quatro não são congruentes).

- Identifique quais são os pares de triângulos congruentes.
- Justifique a congruência de cada um dos pares, usando qualquer caso de congruência.

Observação: Não jogue fora o modelo construído. Ele ainda será usado nesta Unidade.



## Atividade 6

Uma área rural triangular tem uma frente de 1000m, com pontos extremos conhecidos, ao longo de um trecho retilíneo de estrada. Os outros dois lados, contudo, não estão demarcados. Sabe-se que o lado esquerdo passa por uma grande árvore, dentro do terreno e afastada da estrada; e que o lado direito forma um ângulo de  $60^\circ$  com a frente. Com base nessas informações, é possível a demarcação precisa da área?



A 1000m B



## Articulando conhecimentos

### O terreno das demonstrações

Vamos entrar em um terreno não muito usual nesta proposta: o terreno das demonstrações matemáticas.

Terreno este em que estão envolvidos conceitos como axioma, teorema, hipótese, tese.

Axiomas e postulados são afirmações tomadas como verdadeiras, para iniciar a construção de uma teoria matemática. São, na maioria das vezes, óbvias e aceitas pelo senso comum. Por exemplo:

*Por um ponto passam infinitas retas.*

*Por dois pontos passa uma única reta.*

Teoremas compõem-se do enunciado e da demonstração. No enunciado, aparece a tese, que é aquilo que se afirma ser verdadeiro, desde que ocorram determinadas hipóteses que o enunciado também menciona quais são. A demonstração aponta o caminho do raciocínio lógico que chega à evidência de que a tese é verdadeira, usando as hipóteses e, possivelmente, axiomas – fatos aceitos como verdadeiros, sem demonstração, ou usando outros teoremas já demonstrados. Construindo-se vários teoremas, uns apoiados nos outros, forma-se uma cadeia de conhecimentos lógico-dedutíveis que constituem uma teoria matemática. A Geometria Euclidiana é um exemplo de tal teoria.

O raciocínio lógico nem sempre nos parece tão lógico assim, porque há inúmeras facetas da lógica matemática. Existem demonstrações que partem das hipóteses e que, por junção de fatos e construções, chegam à tese. Existem outras, chamadas de demonstrações *por absurdo*, que são bastante lógicas e que de absurdo não têm nada. O esquema delas, quando usado para demonstrar determinada tese, é mais ou menos assim: *querem ver o que ocorre se imaginarmos que a tese não é verdadeira? O raciocínio matemático junta fatos e mostra que aparece uma baita contradição. Ou seja, supondo, por absurdo, que a tese não seja válida, agüente as conseqüências, que são gritantes contradições matemáticas. O que nos leva a concluir que, para se evitar desordens na Matemática, a tese deve ser verdadeira.*

Existem outras demonstrações que não usam esse esquema de negar a tese. Vão indo, mansas, partindo das hipóteses, e de repente mostram que só faltava uma “coisinha” valer para surgir a tese. Vira e revira a argumentação, e nada de se conseguir provar a tal “coisinha” resolvedora da demonstração. Então, acontece o estalo da idéia da negação: *quer ver só o que ocorre se tal “coisinha” não valer?* E aí o raciocínio consegue chegar a contradições matemáticas. Então, o jeito é voltar atrás e aceitar que a tal “coisinha” tem que valer mesmo.

Ainda há outros tipos de demonstrações, mas vamos parando por aqui.

Há dois aspectos a se considerar em um teorema. Por um lado, demonstrá-lo é conhecer uma parte importante da natureza da Matemática que procura dar provas consistentes do que esta ciência considera como verdadeiro. Por outro lado, mesmo que não se conheça a sua demonstração, cada teorema torna-se um fato *institucionalizado* da Matemática, passando a ser usado e reusado por milhares de pessoas que realizam atividades matemáticas. É o caso do teorema de Pitágoras ou da fórmula de Báskhara – mesmo que se desconheça como foram demonstrados, eles são instrumentos poderosos na solução de problemas e são usados e aceitos sem que haja dúvidas sobre suas validades.

Os instrumentos são úteis quando se sabe exatamente o que significam e onde podem ser utilizados. Assim, recorre-se ao teorema de Pitágoras quando são conhecidos dois lados de um triângulo retângulo e se quer determinar o terceiro lado.

O problema ocorre quando os instrumentos são apresentados por si e sem significado. Ao se apresentar ao aluno o processo multiplicativo de  $15 \times 24$ , não há qualquer desenvolvimento no sentido de levá-lo a perceber que o processo envolve procedimentos pelos quais se conta 15 vezes a quantidade 24, mediante etapas: primeiro, o cálculo ou a contagem de 5 vezes 24; depois, o cálculo ou a contagem de 10 vezes 24; e, finalmente, a soma dos dois. Não percebendo nada disso, o aluno tem dificuldade para, em determinadas situações, concluir que aliar esse recurso à multiplicação lhe daria um caminho para obter a solução. Do mesmo modo, apenas a memorização de que *o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos* não basta para a compreensão dos aspectos algébricos e geométricos aí envolvidos e para a capacidade de se perceber quando, em situações-problema, recorrer a esse teorema seria relevante.

Cada ramo da Matemática é uma teoria que se faz com entes primitivos, axiomas e com a construção de uma longa cadeia de verdades, ou teoremas, que vão sendo puxadas umas das outras, entremeadas por novas definições que se fazem necessárias e sempre regidas pelas regras do raciocínio lógico matemático.

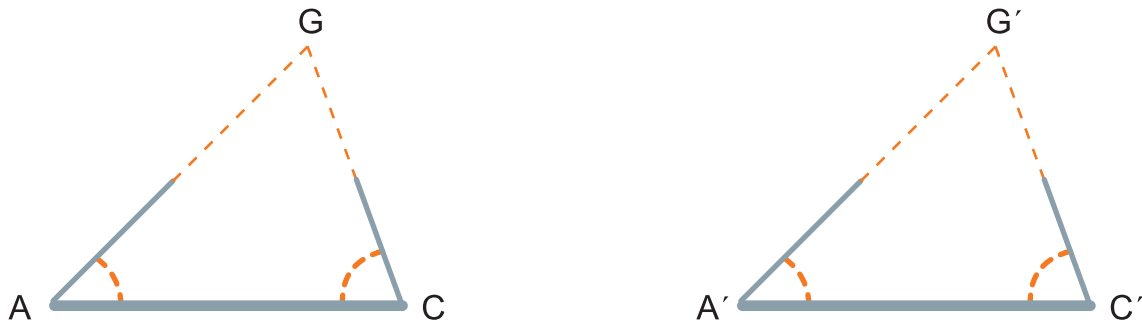
Não obstante aparentarem ser fundamentadas exclusivamente na rigidez lógica, essas teorias têm, por trás, fortes doses de intuição. Otte (1991) afirma que *tanto a intuição quanto a lógica servem à mesma função cognitiva, ou seja, a de dar certeza*. Ele também cita (p.281) Fischbein, que escreveu: *As coisas tornam-se muito mais claras se admitirmos que o conceito de intuição, embora aparentemente vago e inconsistente, expressa uma tendência fundamental, bastante consistente, da mente humana: a procura por certeza*.

A maioria dos teoremas (antes de provados) foi intuída, a partir de muitos casos particulares observados.

## Justificativas matemáticas para os casos de congruência de triângulos

Os casos de congruência de triângulos são fortemente respaldados na intuição. Em geral, toma-se um deles como um axioma, deduzindo-se os outros.

Nesta Unidade, vamos tomar como axiomático o caso ALA. Na concretização física, a intuição aponta fortemente para a sua validade. A justificativa será uma prova empírica, isto é, baseada na experiência.



Pois, se temos um lado igual ( $AC = A'C'$ ) nos dois triângulos e se de suas extremidades saem lados formando ângulos correspondentes de mesma medida ( $\hat{A} = \hat{A}'$  e  $\hat{C} = \hat{C}'$ ) e se sabemos que, em cada triângulo, esses lados vão se interceptar em um ponto ( $G$  e  $G'$ ), então, pelo fato de os lados serem igualmente inclinados, as distâncias desses pontos às extremidades esquerdas dos lados iguais serão iguais ( $GA = G'A'$ ), e as suas distâncias às extremidades direitas dos lados iguais também serão iguais ( $GC = G'C'$ ). Logo, teremos três lados de um triângulo respectivamente iguais aos lados do outro triângulo. Além disso, por já haver dois pares de ângulos congruentes e pelo fato de a soma dos ângulos de um triângulo ser igual a  $180^\circ$ , conclui-se que os terceiros ângulos também serão iguais. Os triângulos têm, portanto, seis pares de elementos com medidas iguais e são congruentes.

Esta argumentação que acabamos de fazer constitui uma justificativa intuitiva do teorema de congruência de triângulos, com a hipótese ALA: dois pares de ângulos com a mesma medida e um par de lados, entre esses ângulos, de mesma medida.

Veja agora como, tomando-se como um axioma o caso ALA, poderemos demonstrar o caso LAL.

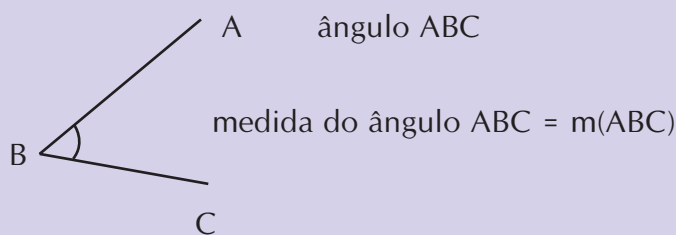
## Congruência de triângulos – LAL

Primeiro, apresentaremos este teorema do modo como é usualmente feito, situação em que tudo é apresentado rapidamente.

Depois, vamos explicitar melhor o enunciado e dissecar a demonstração, para o caso de você ter tido dúvidas na demonstração anterior. Nesta segunda apresentação, vamos apresentar uma sucessão de etapas visuais. Será o único caso que demonstraremos e esperamos que você faça um esforço para compreendê-lo. Temos certeza de que isso aumentará o nível da sua relação com a Matemática.

### Lembrete

Vamos representar um ângulo com vértice B e lados que passam pelos pontos A e C como ângulo ABC e a sua medida como  $m(\text{ABC})$ :



## Teorema – Modo usual

### Enunciado

Dois triângulos ABC e A'B'C' são congruentes se têm  $\text{ângulo ABC} = \text{ângulo A'B'C'}$  e  $AB = A'B'$  e  $BC = B'C'$ , ou seja, como se costuma enunciar: se têm um ângulo igual, compreendido entre lados respectivamente iguais.

### Demonstração

Se  $m(\text{BCA}) \neq m(\text{B'C'A'})$ , tem-se:  $m(\text{BCA}) > m(\text{B'C'A'})$  ou  $m(\text{BCA}) < m(\text{B'C'A'})$ .

Seja  $m(\text{BCA}) > m(\text{B'C'A'})$ , então tomemos em AB um ponto D, tal que  $m(\text{BCD}) = m(\text{B'C'A'})$ .

O triângulo DBC é congruente ao triângulo A'B'C' pelo caso ALA e então  $DB = A'B'$ . Por hipótese  $AB = A'B'$  e, portanto,  $DB = AB$  o que é absurdo. Daí, concluímos que  $m(\text{BCA}) = m(\text{B'C'A'})$  e que o triângulo ABC é congruente ao triângulo A'B'C' pelo caso ALA.

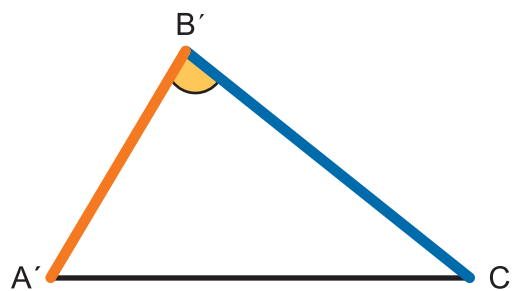
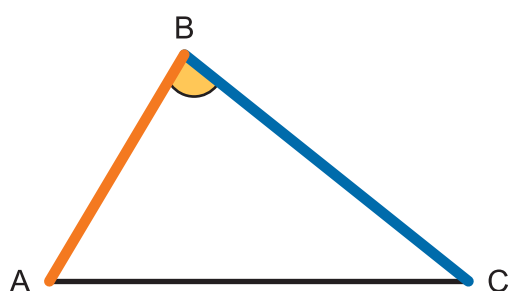
148

## Teorema – Modo mais detalhado

### Enunciado

Se dois triângulos ABC e A'B'C' são tais que AB e A'B' têm o mesmo comprimento, BC e B'C' têm o mesmo comprimento e ainda  $m(\text{ABC}) = m(\text{A'B'C'})$ , então os dois triângulos são congruentes.

Nas ilustrações a seguir, as figuras servem como um rumo para o seu raciocínio. O fato de terem sido desenhadas iguais não significa que estamos assumindo esta igualdade (ou melhor, congruência). Apenas observe os elementos assinalados em cores, dos quais temos certeza da congruência.



Estamos partindo das hipóteses:

$$m(AB) = m(A'B'), m(BC) = m(B'C') \text{ e } m(\angle C) = m(\angle C').$$

Se tivéssemos  $m(\angle BCA) = m(\angle B'C'A')$ , poderíamos afirmar a congruência dos triângulos, pelo caso (que tomamos como axioma) ALA. De fato, teríamos a igualdade dos elementos assinalados na mesma cor.



Nesta demonstração, provar que  $m(\angle BCA) = m(\angle B'C'A')$  é a tal “coisinha” que nos falta. Como não vemos meios de justificar diretamente isso, vamos usar aquele recurso de supor que essas medidas não são iguais (esperando com isso chegar a um absurdo matemático). Se não fossem iguais, um dos ângulos seria maior do que o outro. Vamos supor que:

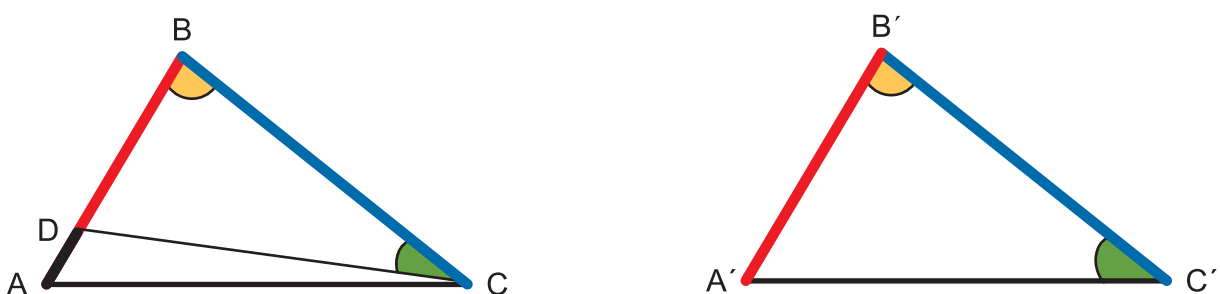
$$m(\angle BCA) > m(\angle B'C'A')$$



Neste caso, poderíamos marcar, dentro do ângulo  $\angle BCA$ , um ângulo igual a  $\angle B'C'A'$ . Em outras palavras, existiria um ponto  $D$  em  $AB$  tal que  $m(\angle BCD) = m(\angle B'C'A')$ .

Com isso, poderíamos afirmar que os triângulos  $\triangle DBC$  e  $\triangle A'B'C'$  seriam congruentes, pelo caso ALA, que foi o único tomado como axioma. (Verifique se você percebe que, realmente, esses dois triângulos teriam um par de lados iguais:  $BC = B'C'$ , compreendidos entre ângulos iguais  $\angle DBC = \angle A'B'C'$  e  $\angle BCD = \angle B'C'A'$ ). Em particular, os lados correspondentes  $DB$  e  $A'B'$  seriam iguais, ou melhor, teriam medidas iguais:

$$m(DB) = m(A'B').$$



Mas, por hipótese, temos  $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{A'B'})$ .

Juntando as duas últimas igualdades, teríamos  $m(\widehat{DB}) = m(\widehat{AB})$ , o que é um absurdo matemático. Ou seja, foi nisso que deu negar que  $m(\widehat{BCA})$  fosse igual a  $m(\widehat{B'C'A'})$ . Então, o jeito é voltar atrás e aceitar que isso vale, e os triângulos serão congruentes.

Essa demonstração não pode ser considerada uma demonstração clássica por absurdo. Ela não imagina o que ocorreria se os dois triângulos não fossem congruentes. Ela visa recair no caso ALA e, para isso, falta haver a igualdade dos ângulos  $\widehat{ACB}$  e  $\widehat{A'C'B'}$ . Nesse ponto, usa como recurso a suposição de que esse fato não vale. Ou seja, ela nega um pequeno fato necessário à demonstração e não a tese em si.

Observação:

- A existência do ponto D é garantida por um axioma da Geometria, quando temos um ângulo menor do que outro.
- É mais comum a demonstração ser feita do primeiro jeito, na forma de um texto, sem tantas etapas. O problema é que, com tantas letras, fica mais difícil acompanhar o raciocínio.

Embora não tenhamos provado os demais casos, você pode assumir, no restante da Unidade, que eles são válidos. Pode assumir também que a soma dos ângulos de um triângulo vale  $180^\circ$ , o que já foi demonstrado na Unidade 10.

Na próxima Atividade, você vai poder mostrar se entendeu o que falamos sobre teoremas.

150



### Atividade 7

Você sabe que um triângulo isósceles é um triângulo que tem dois lados iguais. Vamos apresentar um teorema que diz que, se um triângulo tem dois ângulos iguais, ele é isósceles.

Leia o enunciado, a demonstração e, depois, faça o seguinte:

- a) destaque qual é o enunciado do teorema;
- b) destaque qual é a demonstração do teorema;
- c) escreva qual é a hipótese do teorema;
- d) escreva qual é a tese do teorema.

#### Teorema

Um triângulo que tem dois ângulos iguais é isósceles.

Seja um triângulo ABC, com os ângulos de vértices A e B iguais, e prove-se que os lados AC e BC são iguais. Considerem-se os triângulos ABC e BAC. Sabemos que o lado AB de um é igual ao lado BA do outro; os ângulos de vértices A e B de um são respectivamente iguais aos ângulos de vértices B e A do outro. Logo, os triângulos são congruentes pelo caso ALA. Portanto, os lados AB e AC são iguais, e o triângulo é isósceles.





## Atividade 8

---

Nesta Atividade, vamos procurar diminuir as hipóteses e ver se, ainda assim, conseguiremos demonstrar a congruência de triângulos.

Pense em dois triângulos que não sejam equiláteros, nem isósceles e nem retângulos. Você deve investigar se existem DOIS pares de elementos correspondentes com medidas iguais tais que apenas eles garantam a congruência dos triângulos. Investigue os casos:

- a) LL – dois pares de lados correspondentes com medidas iguais.
- b) LA – um par de lados correspondentes com medidas iguais; um par de ângulos adjacentes a esses lados com medidas iguais.
- c) LA – um par de lados correspondentes com medidas iguais; um par de ângulos opostos a esses lados com medidas iguais.
- d) AA – dois pares de ângulos correspondentes com medidas iguais.

Em cada caso, você deve, partindo da hipótese assumida, tentar verificar se dois triângulos, com esses dois pares de elementos iguais, são congruentes. Ou será que você consegue apresentar dois triângulos que satisfaçam as condições, mas que não sejam congruentes? Neste caso, você terá dado um contra-exemplo, o que acaba com qualquer esperança de justificativa ou prova de que apenas duas condições, em triângulos quaisquer, bastem para garantir congruência entre eles.

151



## Atividade 9

---

Nesta Atividade, em vez de diminuir o número de condições, vamos aumentá-las. Isto é, vamos apresentar triângulos com quatro pares de elementos correspondentes congruentes e ver se, em cada caso, podemos garantir a congruência dos triângulos. Lembre-se: você pode usar os casos de congruência conhecidos.

Investigue os casos:

- a) LLLA – três pares de lados correspondentes de mesmo comprimento; um par de ângulos correspondentes de mesma medida.
- b) LALA – dois pares de lados correspondentes de mesmo comprimento; os ângulos correspondentes compreendidos entre eles com a mesma medida; mais outro par de ângulos correspondentes com a mesma medida.
- c) LLAA – dois pares de lados correspondentes de mesmo comprimento; dois pares de ângulos correspondentes de mesma medida e que não são o ângulo compreendido entre os lados congruentes (nada se informa sobre esse ângulo).
- d) AAAL – três pares de ângulos correspondentes congruentes; um par de lados correspondentes congruentes.

Em cada caso, prove se há congruência ou **dê contra-exemplo**.

### Triângulos isósceles

Um triângulo é isósceles se dois de seus lados têm comprimentos iguais. O terceiro lado é chamado de base do triângulo, e os ângulos adjacentes à base são chamados de ângulos da base.

Embora a definição de triângulo isósceles exija dois lados de igual comprimento, veremos que esta condição é equivalente a se ter dois ângulos de igual medida, como é possível ver no teorema a seguir.

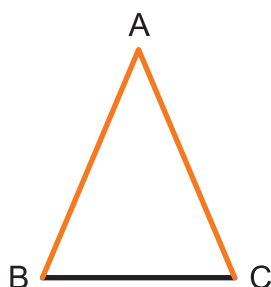
### Teorema

Enunciado

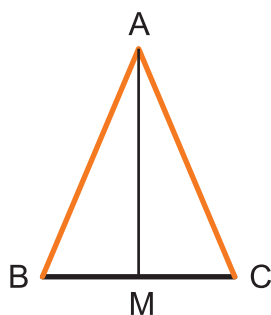
- a) Se um triângulo ABC é isósceles com base BC, então os ângulos ABC e ACB têm medidas iguais.
- b) Reciprocamente, se um triângulo ABC tem ângulos ABC e ACB com medidas iguais, então ele é isósceles com base BC.

#### Demonstração de a)

Vamos tomar como hipótese que ABC é isósceles com base BC. Portanto, AB e AC têm o mesmo comprimento (ambos em laranja). Esta é a única informação que temos do triângulo.



A figura está sem recursos para construir uma argumentação. Talvez seja uma boa idéia dividi-la em dois triângulos iguais, ou melhor, congruentes. Para isso, devemos tomar o ponto médio M da base e ligá-lo com o vértice oposto à base.



Os dois triângulos obtidos são congruentes, pois têm três pares de lados iguais:  $AB = AC$ ;  $BM = MC$ , por M ser o ponto médio; e o lado comum AM.

Mas por que é importante sabermos isso? Porque, sendo congruentes, têm seis pares de elementos congruentes. Em particular, os ângulos  $ABM$  e  $ACM$ , um em cada um dos triângulos, têm medidas iguais. Mas essa igualdade era exatamente a que queríamos provar.

O resto fica para você, na próxima Atividade.



### Atividade 10

---

De modo análogo ao que foi feito para a parte a) do teorema anterior, demonstre a parte b) do mesmo teorema. Observe que esta demonstração será diferente da apresentada na atividade 7.

#### Congruência de triângulos isósceles

No caso de triângulos isósceles, as hipóteses que garantem a congruência podem ser simplificadas. Por exemplo, exigindo a igualdade das bases e de um par de lados, já teremos os três pares de lados iguais. Ou seja, ao invés de LLL, poderemos exigir apenas BL.

Investigue como ficam os demais casos.



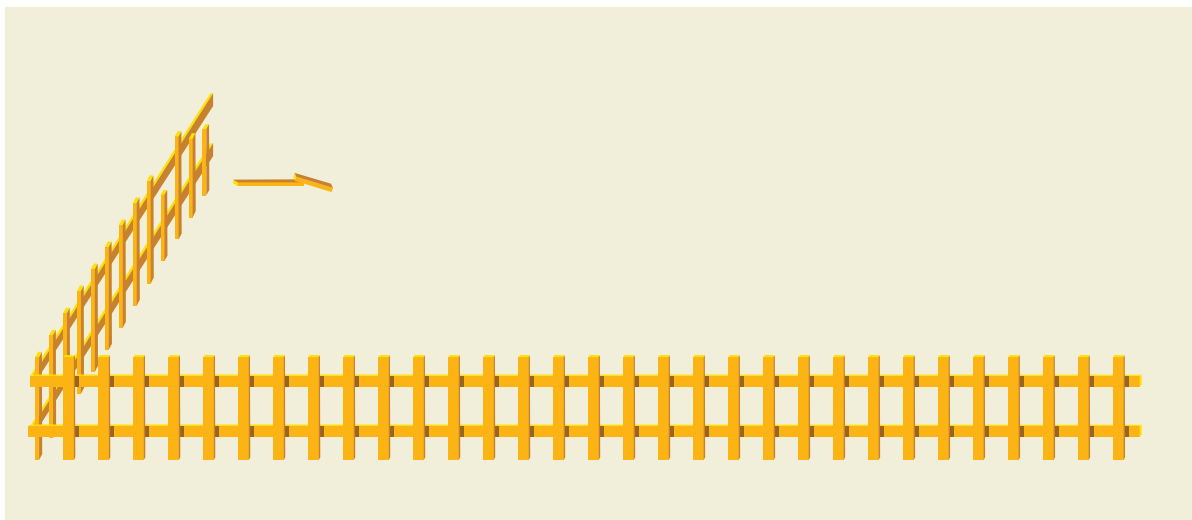
### Atividade 11

---

153

A escritura de uma gleba de terra menciona a sua forma triangular, com dois lados de igual comprimento, e cita algumas medidas.

Uma visita ao local mostrou que havia uma cerca inteira e um resto de uma outra cerca. Sabia-se que a cerca inteira correspondia ao total do lado diferente (base).



Como se pode fazer a cerca do outro lado, havendo garantia de que o terreno ficará com dois lados de igual comprimento?



## Atividade 12

Para fazer a maquete de uma igreja, cuja parede frontal tem a forma de um triângulo isósceles, os alunos mediram a sua base, e tiveram dificuldade em medir a altura. Quando pensaram em medir os ângulos da base, consideraram estes muito grandes (entre o solo e a parede lateral) e questionaram como usariam escala sobre o valor dos ângulos, para transportá-los à maquete.

Comente sobre a situação e ajude os alunos a resolverem o problema.



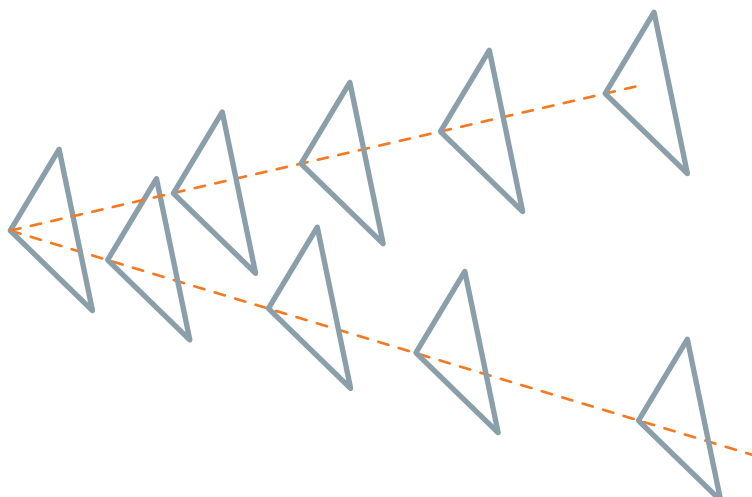
154

## Transformações de figuras em um plano e congruência

Intuitivamente, percebemos que podemos imaginar as figuras planas fazendo certos movimentos nos planos aos quais pertencem, sem perderem a sua forma nem as suas dimensões. São transformações isométricas ou **isometrias**.

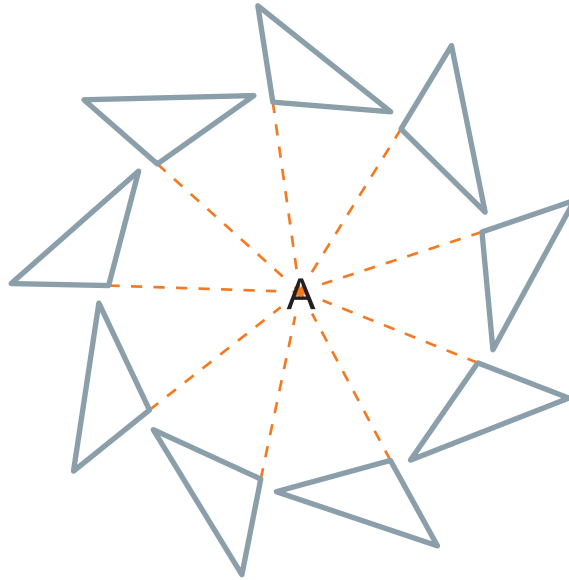
Um desses movimentos é o de arrastamento em uma certa direção, também chamado de **translação**; outro movimento é o de **rotação**.

Veja um triângulo sendo arrastado em duas direções:



**Situação 1**

Para ilustrar rotações, imagine o seu lápis colocado verticalmente sobre a folha de papel, no ponto A. Visualize um triângulo fazendo rotações em volta do lápis, que vai funcionar como um eixo de rotação.



Repare que a forma e as dimensões do triângulo não se alteraram, nem por translações, nem por rotações.

Podemos dizer que dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são congruentes se um deles é imagem do outro por uma translação ou por uma rotação no plano.

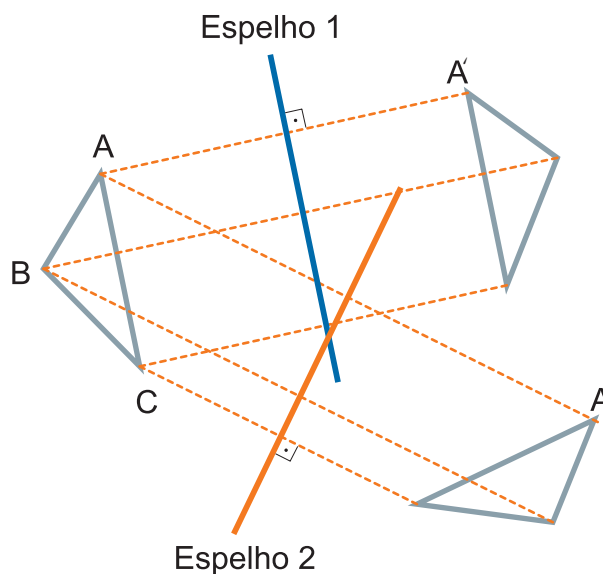
155

**Situação 2**

Existe outra maneira de se obter triângulos congruentes a certo triângulo dado: por meio de **simetrias** ou **reflexões**.

Uma simetria supõe uma reta do plano que será o eixo de simetria e que vai funcionar como um espelho no qual a figura se reflete, gerando outra figura simétrica. Esta simetria, que usa um eixo, chama-se *axial*.

Veja um triângulo sendo refletido em dois eixos de simetria.



Na simetria, um vértice do triângulo e o vértice correspondente no triângulo refletido distam igualmente do espelho. A imagem refletida do ponto A, que chamaremos de  $A'$ , ou de qualquer outro ponto do triângulo, pode ser obtida traçando-se por A uma perpendicular ao *espelho* (eixo de simetria) e tomando-se um ponto  $A'$  cuja distância ao espelho seja a mesma de A ao espelho. Em um desenho geométrico, essa distância pode ser transportada com o auxílio do compasso.

Repare que não há nenhum movimento físico a ser feito no plano, ou composição de movimentos, que leve o triângulo ABC a qualquer um de seus simétricos, isto é, arrastar e girar o triângulo ABC não vai fazer com que ele se sobreponha a qualquer de seus simétricos.

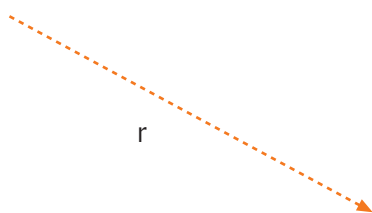
Seria necessário retirar esse triângulo do plano e fazê-lo girar sobre si mesmo, para poder cair sobre um triângulo simétrico. Se você pensar bem, o movimento poderia ser uma rotação no espaço, em torno do eixo que representa o espelho.

Embora a simetria não possa ser visualizada como um movimento no plano, ela também produz figuras congruentes. É chamada de uma transformação do plano, e as translações e rotações também se encaixam neste conceito.

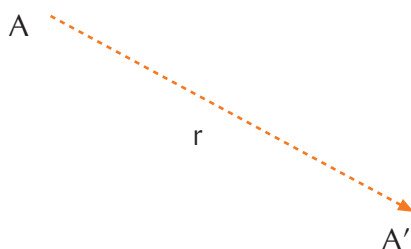
Veja, a seguir, com mais detalhes, essas transformações do plano.

## Translação

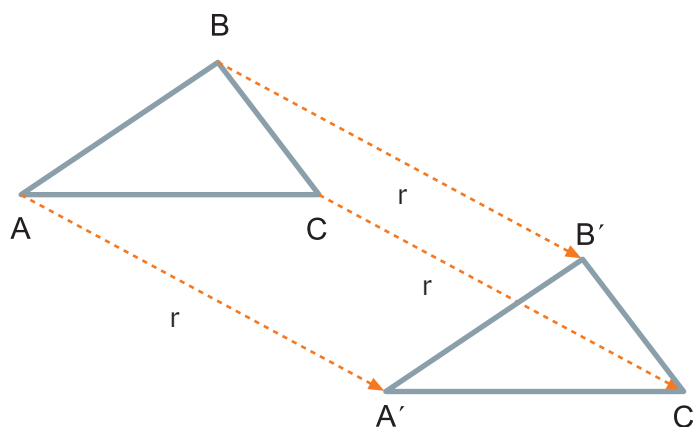
É preciso definir, de início, um segmento orientado no plano:



Em seguida, define-se a transformação de um ponto qualquer A pela translação r no ponto  $A'$ , assim obtido:



Veja o resultado de uma translação de segmento orientado r aplicada ao triângulo ABC:

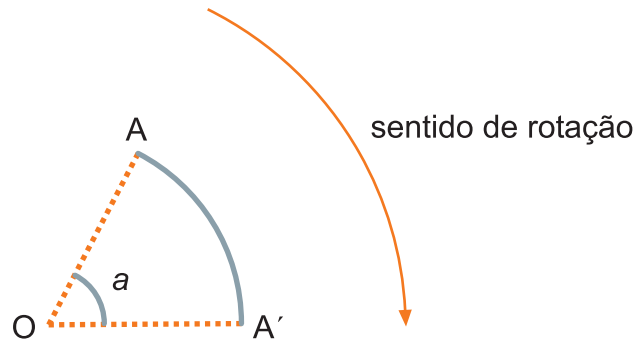


Observe que os triângulos ABC e  $A'B'C'$  são congruentes.

## Rotação

Devem ser definidos um ponto **O** do plano, um sentido de rotação e um ângulo **a** de rotação.

Define-se transformado de um ponto qualquer **A**, pela rotação em torno de **O** com o ângulo **a**, ao ponto **A'**, assim obtido:



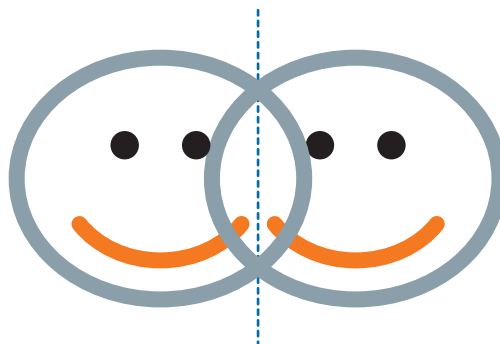
## Simetrias

Basta considerar, inicialmente, um eixo de simetria  $r$ .

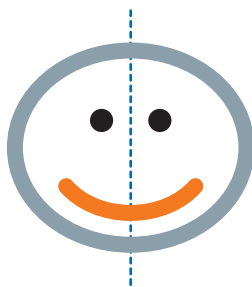
De um ponto **A** da figura deve ser traçada uma perpendicular ao eixo de simetria. A medida do segmento que vai de **A** até o eixo deve ser repetida do outro lado do eixo, para obter-se **A'**, simétrico de **A**. Como já observamos, o transporte dessa medida, com o auxílio do compasso, produz um desenho mais apurado.



O eixo de simetria pode cortar a figura, como no exemplo abaixo.

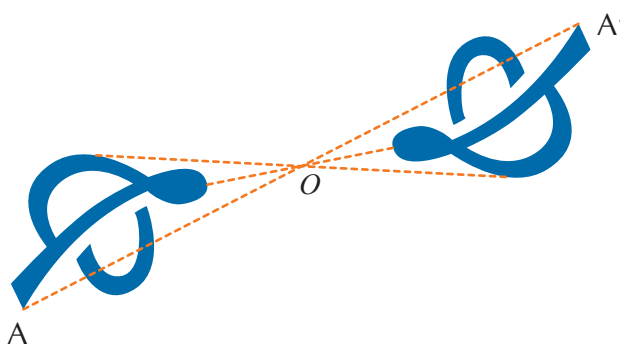


Para determinadas figuras, pode haver um eixo de simetria tal que, em relação a ele, a figura e a sua simétrica coincidam. Nesse caso, dizemos que a figura possui um eixo de simetria e é simétrica, como na figura abaixo.



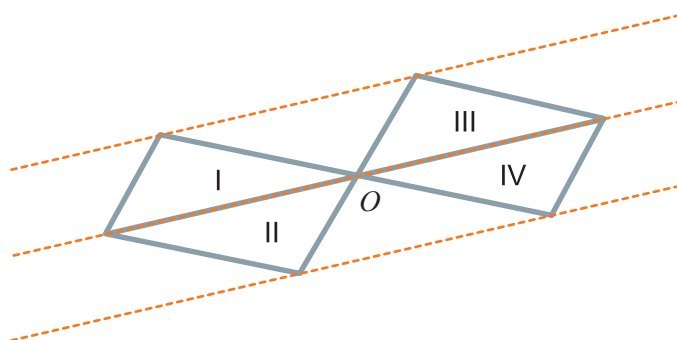
As simetrias também podem ser consideradas em relação a um ponto  $O$ .

Nesse caso, a imagem  $A'$  de um ponto  $A$  da figura é dada pela relação  $OA' = -OA$ .



## Revestimento do plano por quatro triângulos congruentes

Na Unidade 11, você viu que é possível revestir o plano usando triângulos iguais. Na verdade, são triângulos congruentes.



Observe: o triângulo III pode ser obtido do triângulo I por uma translação, assim como o triângulo IV pode ser obtido do triângulo II por uma translação.

O triângulo IV pode ser obtido do triângulo I por uma rotação em torno de  $O$ , no sentido anti-horário. E III pode ser obtido do triângulo II por uma rotação em torno de  $O$ , no sentido horário. Além disso, o triângulo IV pode ser obtido do triângulo I, assim como o triângulo III pode ser obtido do triângulo II, por simetrias em relação ao ponto  $O$ . Logo, todos os triângulos são congruentes.

Em revestimentos do plano, não são usadas simetrias em relação a um eixo (axiais), pois isto corresponderia a virar cada peça do lado do avesso. Isso não é desejável, a menos que as peças tenham dupla face.





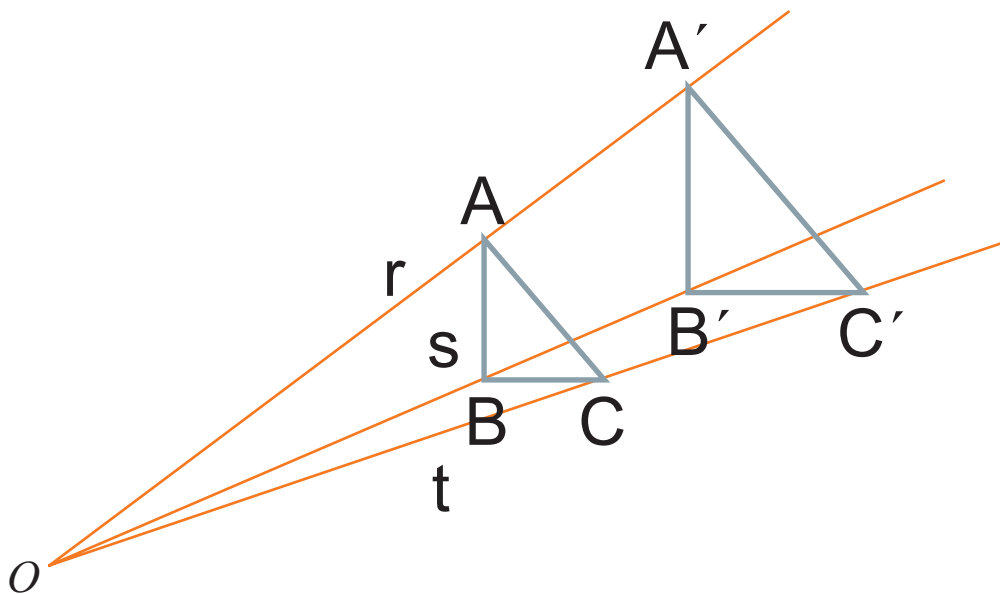
### Homotetias

Há outras transformações do plano que produzem figuras semelhantes, não necessariamente congruentes.

Existe um tipo de transformação no plano que produz figuras semelhantes e de lados paralelos. São as homotetias.

Uma homotetia requer um ponto fixo  $O$  do plano (centro da homotetia) e um número  $k$ , que será chamado de razão de homotetia.

A imagem homotética de um ponto  $A$  é um ponto  $A'$  dado pela relação:  $OA' = k \times OA$



159

A homotetia faz uma ampliação ou uma redução da figura, conforme  $k$  seja maior ou menor do que 1.

Uma homotetia leva um segmento  $AB$  em outro paralelo  $A'B'$ . Para provar isso, consideramos o feixe de retas  $r$  e  $s$ , cortadas pelas retas suporte dos segmentos  $AB$  e  $A'B'$ , que, por homotetia, determinam no feixe segmentos proporcionais:  $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k$ .

Pelo Teorema de Tales, as retas suporte de  $AB$  e  $A'B'$  são paralelas.

(O teorema afirma duas coisas: a) se as retas são paralelas, os segmentos serão proporcionais; e b) se os segmentos são proporcionais, as retas são paralelas).

Isso nos diz que homotetia produz figuras semelhantes especiais, com lados paralelos.

Você pode observar que uma homotetia de razão  $-1$  coincide com uma simetria em relação a um ponto que, no caso, será o centro de homotetia.



## Articulando conhecimentos

### Semelhanças e Fractais – o Triângulo de Sierpinski

Na Sessão Coletiva da Unidade 9, você teve uma primeira abordagem sobre o que é um fractal.

Fizemos um cartão no qual o padrão podia se repetir indefinidamente, sempre nas mesmas proporções, característica que foi chamada de auto-similaridade. Figuras geométricas com essa característica são chamadas de fractais.

Há um fractal interessante relacionado a triângulos e semelhança de triângulos, denominado Triângulo de Sierpinski.

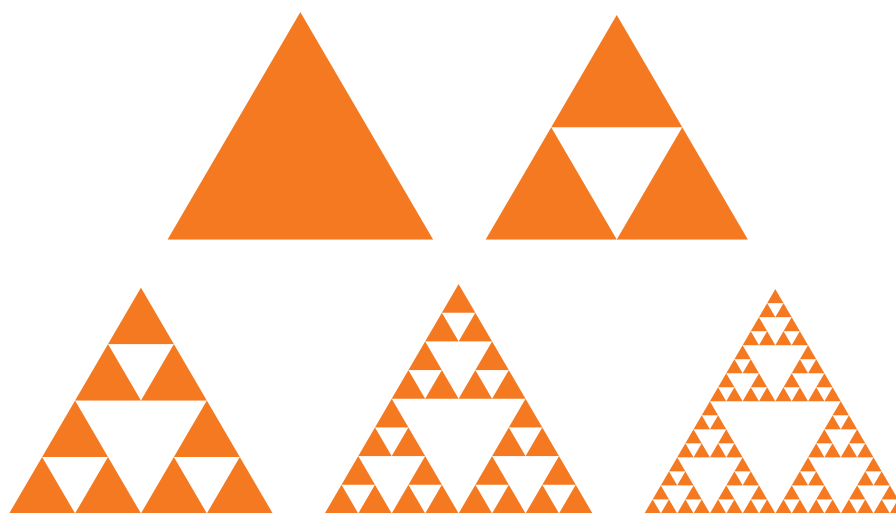
Veja como é o processo de geração deste fractal. Na figura, partimos de um triângulo preto, equilátero, mas poderia ser um triângulo qualquer.

A primeira etapa consiste em achar os pontos médios de cada lado do triângulo, uni-los e retirar o triângulo formado. O espaço deixado pelo triângulo retirado está em branco, na segunda figura.

Em seguida, em cada triângulo preto que restou, fazemos o mesmo procedimento: unimos os pontos médios dos lados e retiramos o triângulo central.

A continuação infinita deste processo gera uma figura denominada como Triângulo de Sierpinski.

160

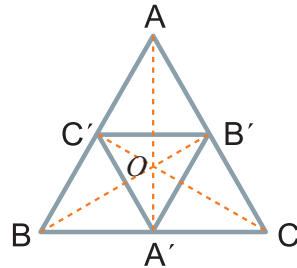
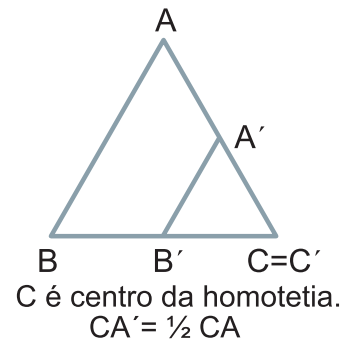
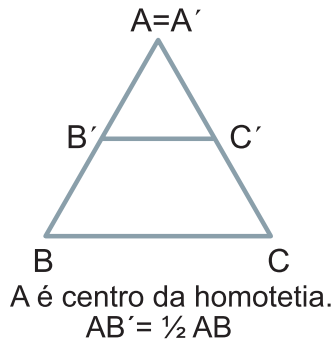
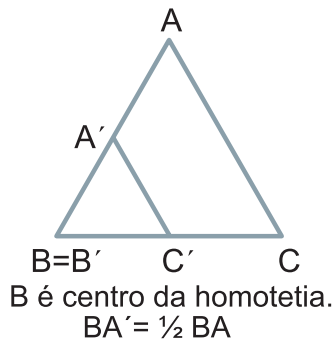


Repare que, em cada etapa, obtemos, em cada triângulo, outros quatro triângulos semelhantes a ele, todos congruentes entre si.

Observe este fato ao terminar a primeira etapa: foi obtida a figura (superior à direita) com três triângulos pretos congruentes entre si. Cada um pode ser obtido do outro por uma translação.

O triângulo que foi retirado também é congruente aos restantes, mas não pode ser obtido dos anteriores por uma translação. Poderá sim ser obtido de qualquer um deles por uma rotação ou (para este caso de triângulo equilátero) por uma reflexão, na qual o eixo de simetria é um lado comum ao triângulo branco e a um dos triângulos pretos.

Portanto, os quatro triângulos produzidos nessa etapa são congruentes. Além disso, cada um deles é semelhante ao triângulo inicial. Na verdade, é uma semelhança produzida por uma homotetia – cada um deles é homotético ao triângulo inicial. Veja a homotetia, em cada caso:



A interseção O das alturas é o centro da homotetia.  
A homotetia tem razão negativa:  $OA' = -\frac{1}{2}OA$ .

161

Significado do sinal negativo: os segmentos OA e OA' têm sentidos diferentes. Ou seja, a homotetia inverte o sentido de cada segmento OA.

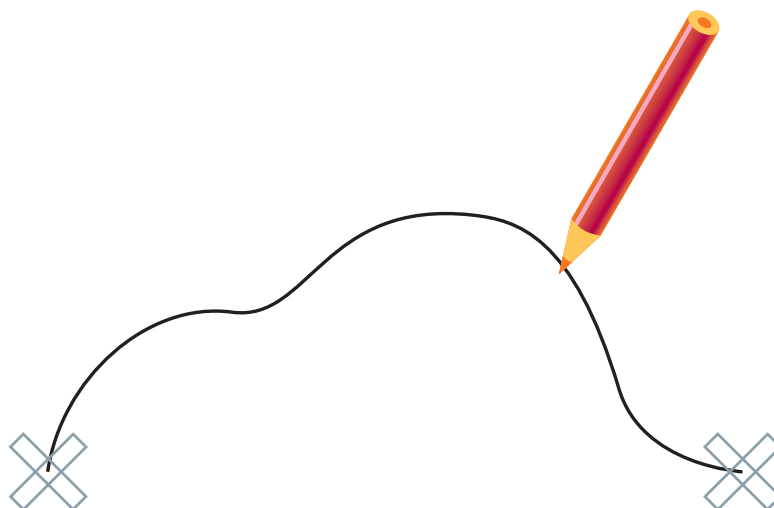


**Articulando  
conhecimentos**

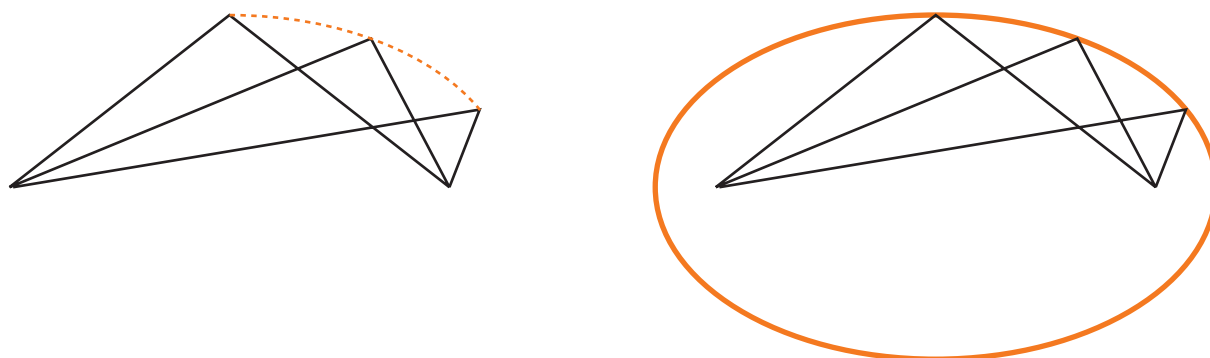
### O artefato dos triângulos congruentes e a elipse

Você conhece algum processo para traçar uma elipse?

Existe um, bem conhecido pelos jardineiros e carpinteiros. Você pode fazer algo parecido em papel cartão. Pegue linha e agulha grossas e fita adesiva. Dê um nó na linha e fure o papel cartão. Faça um segundo furo, a uns seis centímetros do primeiro, e volte a linha para a parte de baixo, deixando um pouco de linha folgada na parte de cima do cartão – mais ou menos 10cm de linha. Dê um novo nó por baixo e ponha fita adesiva nos nós para reforçar.



Agora estique a linha com um lápis e mova-o, sempre com a linha esticada. O lápis vai deixando um risco curvo no papel. Veja alguns pontos que o lápis tocou com a linha esticada, um pequeno arco percorrido e o trajeto completo que o lápis traça.



162

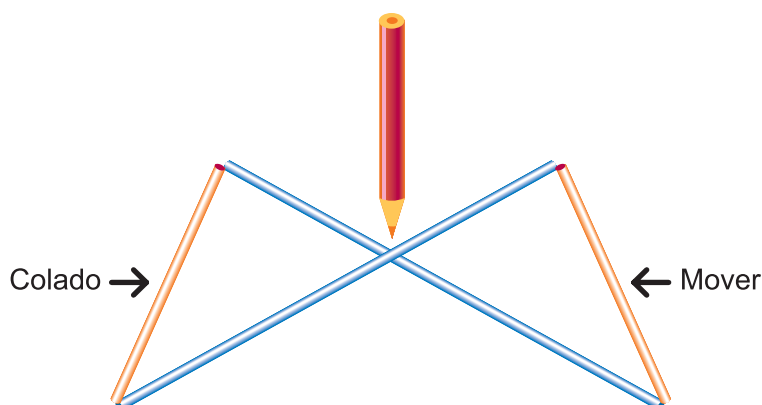
Os pontos que formam a elipse estão em vértices de ângulos formados por dois segmentos, em que a soma dos comprimentos é igual ao tamanho da linha.

Assim como os pontos de um círculo possuem a propriedade de serem todos equidistantes do centro, os pontos de uma elipse também possuem uma propriedade: a soma das distâncias de cada um a dois pontos fixos é constante.

Da mesma forma que a medida do raio é própria do círculo, a medida do *barbante* é própria de cada elipse.

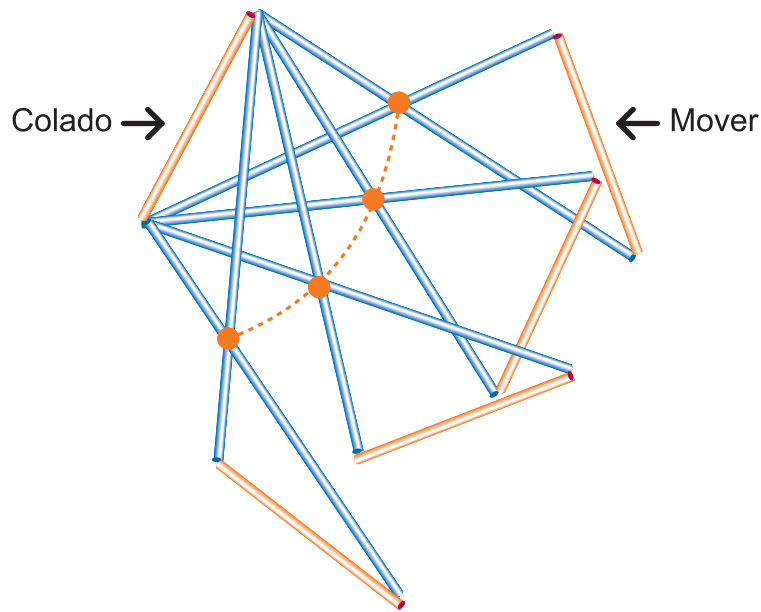
Chegou a hora de pegar novamente aquele material feito com os canudos.

Fixe ou cole em um cartão um dos canudos menores.



Com as mãos, mova o canudo indicado o máximo que puder para um lado e depois para o outro, fazendo um lápis acompanhar a interseção e deixando sobre uma folha o desenho da trajetória percorrida. Se precisar, peça ajuda a um colega: enquanto você imobiliza um canudo e move o outro, ele acompanha a interseção dos canudos azuis com o lápis.

O caminho percorrido pela interseção será uma elipse. Surpreso?



Para se ter certeza que teremos uma elipse, tome um ponto  $P$  qualquer da interseção dos lados dos triângulos. Mostre que a soma das distâncias de  $P$  a  $A$  e de  $P$  a  $B$  é constante; ou seja, é a mesma, qualquer que seja a posição de  $P$ .

163



### Resumindo

Nesta Seção, você:

- Identificou o conceito de polígonos congruentes e de triângulos congruentes.
- Identificou condições de igualdade de medidas de elementos correspondentes que garantam a congruência de triângulos ou de polígonos.
- Identificou casos de congruência de triângulos.
- Identificou os conceitos de teorema e demonstração.
- Demonstrou teoremas de geometria plana.
- Identificou isometrias do plano – translações, reflexões e rotações, que garantem a congruência entre triângulos.
- Identificou transformações do plano do tipo homotetia, que garantem a semelhança entre triângulos.
- Identificou relações entre semelhança e fractais.
- Comprovou a congruência de polígonos ou de triângulos, em situações do mundo físico-social.

## Seção 3

### Transposição didática



#### Objetivo da seção

Propor e estimular o professor a elaborar situações-problema e situações didáticas visando:

- O desenvolvimento do conceito de congruência de triângulos e o seu uso para o reconhecimento de congruência de polígonos.
- O reconhecimento de condições que asseguram a congruência de triângulos, por propriedades métricas ou de transformações do plano.

Muitos alunos terminam o Ensino Fundamental e não sabem realmente o que é congruência. É importante enfatizar e repetir situações nas quais fique evidente que se está estudando figuras planas que coincidem quando são sobrepostas. Essa coincidência pode ser direta ou inversa. No segundo caso, é necessário inverter as faces de uma figura para que haja sobreposição. Essa é a idéia intuitiva de congruência de figuras planas – a possibilidade de sobrepô-las de modo que coincidam, com inversão de uma delas ou não.

Logo de início, situações que levem o aluno a perceber a importância do reconhecimento de triângulos congruentes e a sua aplicação devem ser colocadas.

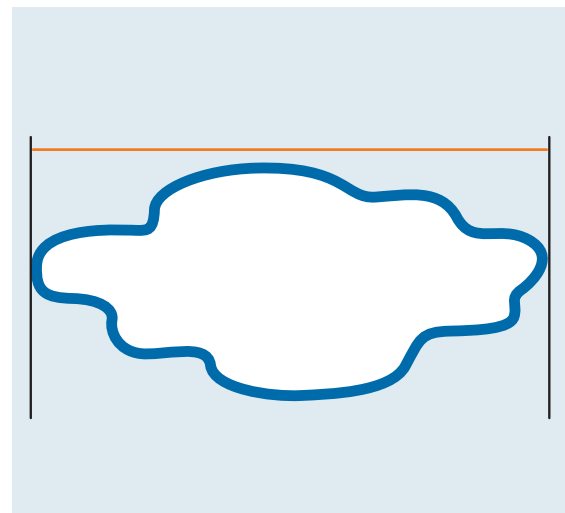
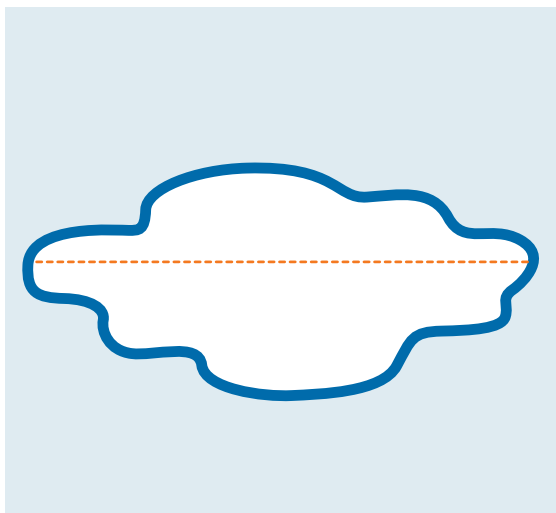
164

Por exemplo:

#### Situação-problema para os alunos

Para descobrir que distância nadavam, alguns alunos queriam saber o comprimento de um lago, com forma irregular.

Pense em algumas idéias para descobrir essa medida, sem o auxílio de instrumentos especiais.



Algumas idéias que podem surgir:

- atravessar o lago de barco, em linha reta, desenrolando um rolo de barbante cuja ponta fica presa a uma estaca na margem;
- traçar duas retas paralelas pelas extremidades, medindo a distância entre as retas, em terra firme.

O professor deve levantar questões para os alunos sobre possíveis problemas que podem surgir, como: mudanças na direção do barco, devido a ventos e correntes; ou como obter o paralelismo das retas, pois, sendo a distância grande, é difícil fazer um traçado preciso.

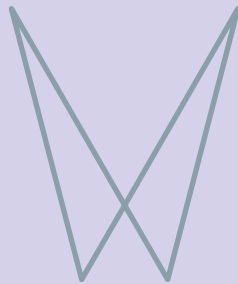
No caso, o uso da teoria de triângulos congruentes poderá resolver a questão.

A identificação de condições suficientes para que dois triângulos sejam congruentes, ou seja, o conhecimento dos casos de congruência dos triângulos, será mais adequada aos alunos, se usarmos verificação concreta, manipulação de canudos ou varetas, desenho geométrico e outros. Mas é importante a reflexão sobre os resultados obtidos, de modo a compreendê-los e a reconhecer a sua importância e utilidade.

### Congruência, o que é isto?

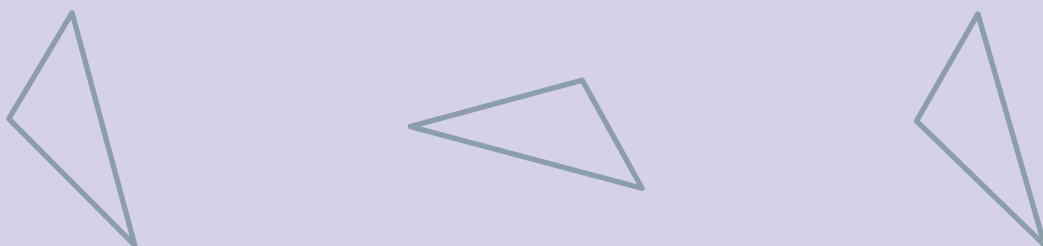
Em Matemática, não falamos em triângulos idênticos, mas em triângulos congruentes. Por que usar uma palavra tão difícil?

Repare: você diria que os dois triângulos abaixo são idênticos?



Parece que um está virado, em relação ao outro. Um tem o lado maior à esquerda e o outro tem o lado maior à direita. Totalmente idênticos eles não são. Mas se recortarmos o desenho de um deles e o invertermos, conseguiremos fazê-lo ficar exatamente sobre o outro. Então, dizemos que eles são congruentes. Significa que poderemos levar um deles a coincidir com o outro. Para que isso aconteça, todos os lados e ângulos de um deles devem ter medidas iguais às dos lados e ângulos do outro.

Em Matemática, considera-se que uma figura só é igual a si mesma. Mesmo que não haja inversão de posições, figuras que diríamos idênticas são constituídas por pontos diferentes do plano. Em Matemática, dizemos que são congruentes, como os três triângulos a seguir:





### Atividade 13

---

- a) Considere a figura e procure identificar formas geométricas que podem ser sobrepostas (mesmo que haja necessidade de virar a sua face).



Centro Empresarial Varig  
Imagem: Mary D'Artson

- b) Verifique, da maneira que achar melhor, se as figuras que você indicou coincidem realmente quando sobrepostas.

Ao final, o professor poderá sugerir que os alunos usem papel transparente para copiar a figura e verificar se há coincidência na sobreposição (se necessário, pode-se virar o papel do outro lado).

Lembrar que, em Matemática, dá-se um nome a essas figuras que coincidem quando sobrepostas. Elas são chamadas de congruentes.

Dizemos que duas figuras são congruentes quando coincidem por sobreposição. No caso de polígonos, eles terão a mesma forma, a mesma medida dos lados e a mesma medida dos ângulos.



### Atividade 14

---

Levar vários canudos, todos medindo 20cm. Dar quatro canudos a cada aluno, para que eles montem, com todos eles, uma figura plana. Um modo de se fazer isso é passando um barbante por dentro dos canudos e amarrando. Nem todas as figuras podem ser sobrepos-



tas, mas todas são losangos (quatro lados de mesma medida), mesmo no caso de serem quadrados. Mas eles podem ter sido feitos com ângulos diferentes entre as varetas.

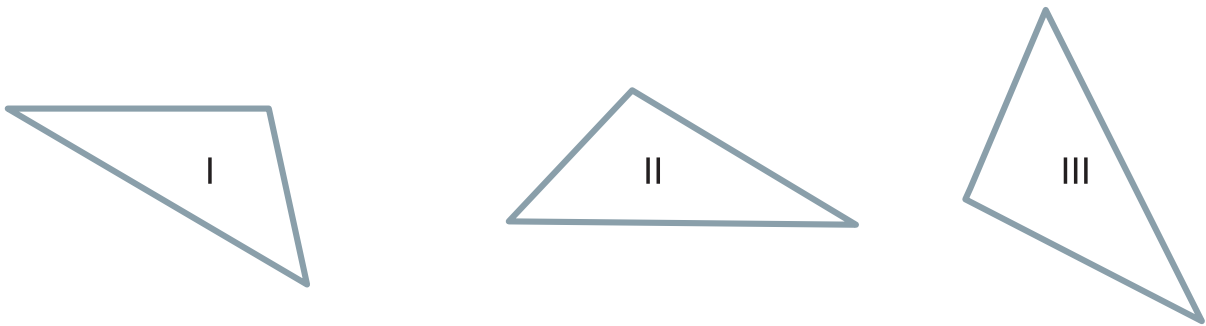
Só quando, além de os lados serem iguais, também os ângulos de um forem iguais aos ângulos do outro, os losangos poderão coincidir quando sobrepostos e aí, portanto, serão losangos congruentes.

Observação: este experimento pode ser feito com outros materiais, como, por exemplo, palitos de picolé fixados com percevejos.



### Atividade 15

Pense sobre: quais desses triângulos são congruentes (podem ser sobrepostos)?



Assinale com x o seu palpite:

a) Os triângulos congruentes (coincidem se sobrepostos) são:

I e II

I e III

II e III

b) Assinale como você acha que poderia verificar se o seu palpite está correto (pode marcar mais de um item):

- Recortando os dois triângulos e vendo se coincidem, quando colocados um sobre o outro.
- Vendo se as medidas dos lados de um são iguais às medidas dos lados do outro.
- Medindo os lados e os ângulos de um deles e verificando se são iguais aos lados e ângulos do outro.

A questão de três lados com mesmas medidas assegurarem a congruência pode ser melhor entendida pelos alunos, com o seguinte exemplo:

Pegar três pedaços de madeira de comprimentos diferentes e prendê-los, dois a dois, nas pontas, formando assim um triângulo. Também se pode trabalhar com palitos de picolé e percevejos. Ao se tentar deformar o triângulo, observa-se que não é possível mudar a forma desta montagem, isto é, não é possível alterar os ângulos. Dizemos que o triângulo é **rígido**. Logo, dadas as três varetas, só existe um triângulo possível de ser montado. O triângulo fica determinado pelo comprimento dos seus lados. Não é possível mudar os ângulos, como no caso do losango.

(Com os quatro canudos do caso anterior, você verificou que com quatro lados não há rigidez). Isso nos leva à afirmação:

### 1 - IMPORTANTE (LLL)

Dois triângulos que têm os três lados com as mesmas medidas são congruentes.

Devido à sua rigidez, o triângulo é muito usado em portões ou na estrutura de telhados.

Um portão de madeira formado só de quadriláteros pode deformar-se. Para que isso não aconteça, é comum que se coloque uma tábua em diagonal, formando dois triângulos rígidos.

A Atividade 2 da Seção 2 é apropriada para os alunos, assim como a Atividade 12 e outras.

Será útil usar o desenho geométrico em uma atividade que ajudará a internalizar, mais uma vez, a questão de os lados de mesma medida garantirem a congruência de triângulos, como na Atividade a seguir:

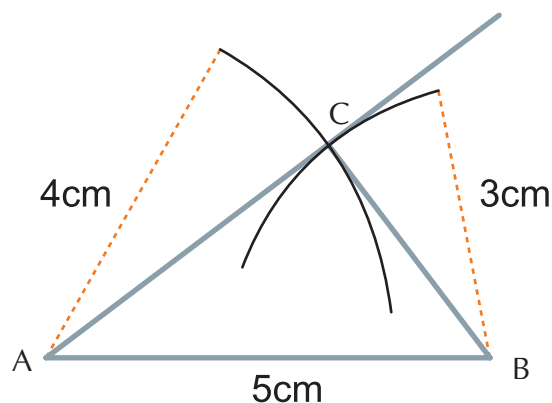


### Atividade 16

168

a) Os alunos deverão construir um triângulo cujos lados têm as seguintes medidas: 3cm, 4cm e 5cm. O professor deve auxiliá-los no uso do compasso e da régua. Poderão começar por qualquer lado, em qualquer posição.

1. Traçar, com o auxílio da régua, um dos lados do triângulo, com a medida dada. Para entender o processo, denominar as extremidades desse segmento de A e B.
2. Abrir o compasso até se chegar à medida de um dos lados restantes. Colocar a ponta de metal do compasso no ponto A e traçar um arco.
3. Depois, abrir o compasso até ele ter uma abertura igual à do terceiro lado. Colocar a ponta de metal do compasso no ponto B e traçar um arco, de modo que este arco corte o primeiro.
  - O ponto de encontro dos dois arcos (também chamado de interseção dos dois arcos) será o vértice C do triângulo.
  - Meça os três lados do triângulo e verifique se as medidas são 3cm, 4cm e 5cm.



Pense um pouco sobre o porquê de este exemplo produzir o triângulo com os lados que você queria.

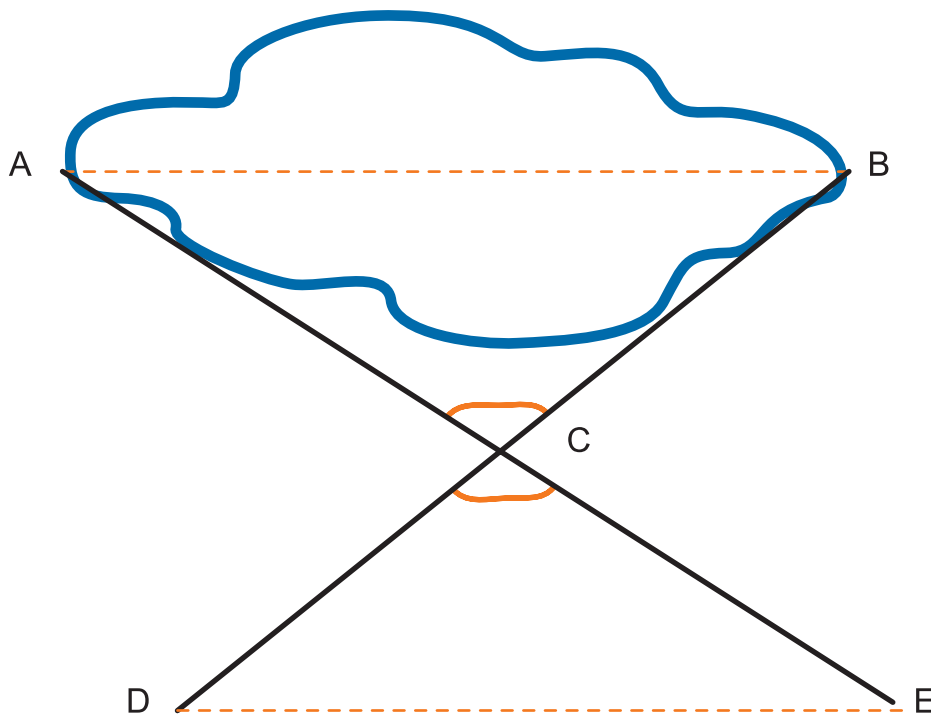
Encontrou o triângulo? Alguns colegas podem ter começado a construção com outros lados, em outras posições. As posições dos triângulos podem ser muito diferentes. Mas todos eles são congruentes (coincidem se sobrepostos).

b) Reflita um pouco e responda: o que podemos concluir sobre dois triângulos que têm os três lados com medidas respectivamente iguais?

## Trabalhando na situação-problema dos alunos

Dando prosseguimento à situação-problema, o professor pode sugerir que os alunos procurem traçar dois triângulos congruentes: um, com lado apoiado na distância a medir; outro, que tenha um lado com essa mesma medida, mas em terra firme.

As tentativas devem ocorrer até aparecer, por exemplo, o desenho:



Questionamento: como obter medidas iguais, em terra firme, de modo que os triângulos sejam congruentes?

Mesmo estando claro que se pode tomar pontos A, B e C (encontro de dois segmentos de reta traçados a partir de A e de B), onde serão colocadas estacas, e que se pode achar (na realidade) pontos D e E, tais que  $EC = CA$  e  $DC = CB$ , será que já há elementos que garantam que os dois triângulos são congruentes?

Pode-se perceber, também, que os ângulos compreendidos entre esses lados são iguais:  $m(\angle ACB) = m(\angle DCE)$ .

Como, até agora, os alunos só sabem que três lados de medidas iguais garantem congruência, e não se tem isso nos triângulos, ainda não pode haver certeza de que os triângulos são congruentes. A solução depende de mais conhecimentos.

Pode-se propor a Atividade 1, da Seção 2, que os levará a constatar que triângulos que têm dois pares de lados iguais e o ângulo entre eles iguais são congruentes.

## 2 - IMPORTANTE (LAL)

Dois triângulos que têm dois lados e os ângulos formados por esses lados respectivamente iguais (ou congruentes) são congruentes.

Retomando à situação-problema:

Será que, com esse novo resultado obtido, já podemos afirmar a congruência dos dois triângulos projetados em papel, cujos vértices sabemos marcar no solo?

Realmente são as condições que temos: dois lados com a mesma medida e os ângulos formados por eles também com a mesma medida (porque são opostos pelo vértice). Logo, basta medir, em terra firme, a distância DE, que é igual ao comprimento do lago.

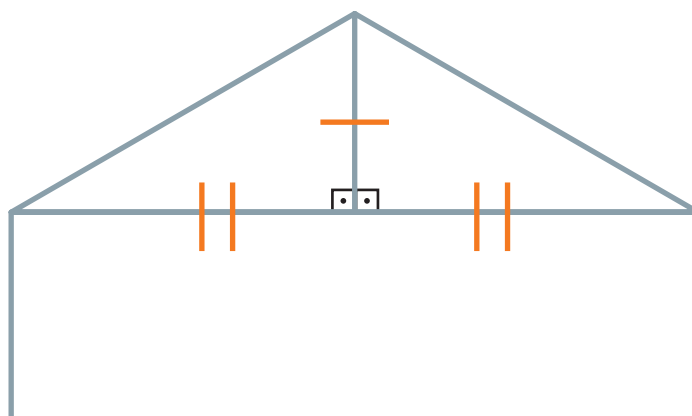
## Observando construções e conhecendo mais sobre congruências de triângulos



### Atividade 17

170

Os alunos observaram o telhado de uma casa com uma viga horizontal e outra vertical.



A viga vertical é lado comum aos dois triângulos, o que nos garante um par de lados iguais nos dois. (*Fizemos um risquinho para indicar este lado comum*).

Os alunos verificaram que a viga vertical toca exatamente o meio da viga horizontal. Para isso, um deles posicionou-se sob a viga vertical, rente à casa, e deu passos para a esquerda e para a direita. Isto resultou na constatação de mais um par de lados iguais nos dois triângulos. (*Fizemos dois risquinhos de cada lado, indicando que são dois lados iguais*).

Quanto aos terceiros lados, que são inclinados, parecem iguais, mas não temos certeza disto.

Mas existe um terceiro elemento que é igual nos dois triângulos. É o ângulo reto, formado de cada lado da viga vertical.

É possível afirmar que os dois triângulos são congruentes? Por quê?

## Aprendendo mais: ângulos adjacentes e ângulo oposto ao lado de um triângulo

Desenvolva a noção de ângulos adjacentes a um lado e de ângulo oposto a um lado, em um triângulo. Vamos propor duas situações, mais apropriadas para os alunos, em que, usando essas noções, eles poderão constatar mais dois casos em que podemos garantir a congruência dos triângulos:

### Situação 1

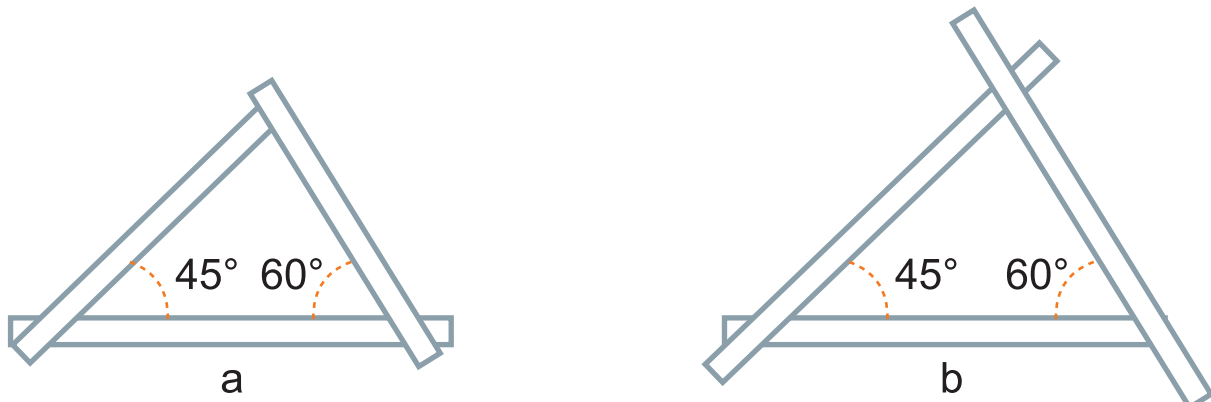
Um marceneiro pegou dois pedaços iguais de tábua (a e b).



Depois, pegou dois pedaços quaisquer e os colocou nas pontas da esquerda, formando ângulos de  $45^\circ$ .



Pegou ainda mais dois pedaços quaisquer e os colocou nas pontas da direita, formando ângulos de  $60^\circ$ .



Serrou as partes que sobraram e obteve dois triângulos idênticos.



Ele só planejou que um par de lados (a e b, um em cada triângulo) e os ângulos adjacentes a estes lados (de 45 e de 60 graus) fossem iguais. Mas, quando isso ocorre, os triângulos são sempre congruentes.

### 3 - IMPORTANTE (ALA)

Dois triângulos que têm um lado e os ângulos adjacentes aos lados respectivamente iguais (isto é, congruentes) são congruentes.

### Situação 2

Olhe os triângulos 1 e 2 e veja o que eles apresentam:

172



- um par de lados iguais (os laranjas);
- um par de ângulos, adjacentes aos lados laranjas, iguais (ângulos amarelos);
- um par de ângulos, opostos aos lados laranjas, congruentes (ângulos de arcos laranjas).

Quando isto ocorre, podemos garantir que os triângulos são congruentes, o que pode ser demonstrado experimentalmente. Basta olharmos o que foi feito no caso AAL, na Seção 2. Temos o mesmo que se tinha lá: dois pares de ângulos iguais e um par de lados, não compreendidos entre os ângulos, também iguais.

### 4 - IMPORTANTE (AAL)

Dois triângulos que têm um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto ao lado respectivamente iguais (isto é, congruentes) são congruentes.

Esses quatro casos de congruência podem ser utilizados para determinar elementos desconhecidos nos triângulos e para demonstrar algumas propriedades importantes da Geometria.

## Congruência por transformações do plano: translações, rotações, simetrias

É importante que os alunos associem congruências a movimentos ou transformações no plano.

O reconhecimento de translações, rotações e simetrias pode ser feito de modo intuitivo, embora atendendo aos aspectos que asseguram a correção desses conceitos.

Reconhecendo que existe uma dessas transformações que leva um triângulo a outro, os alunos perceberão que se tratam de triângulos congruentes (o que poderia ser comprovado também por um dos casos anteriores, envolvendo medidas de lados e de ângulos).

Uma atividade interessante consiste em, a partir de figuras ou triângulos congruentes, verificar se a imagem congruente pode ser obtida por uma translação, por uma rotação, por uma simetria ou por uma composição dessas transformações.

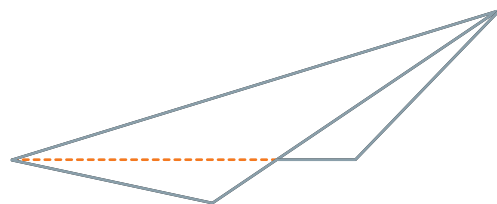
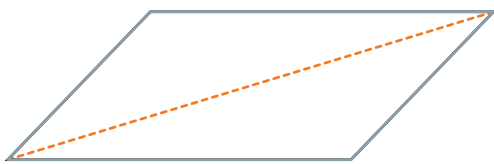
### Simetrias

As simetrias, em especial, oferecem oportunidades de atividades que despertam bastante interesse.

A montagem de um grande painel pode ser feita dividindo-o em duas metades. A linha divisória, que poderá ser horizontal, vertical ou inclinada, será o eixo de simetria do painel. Parte da classe, ou um grupo, deverá preencher com recortes e figuras uma das metades. Se usarem figuras, os alunos deverão ter o cuidado de deixar duplicatas destas, copiadas invertidas. Se usarem papel colorido para recortes, deverão deixar sobras deste. Depois, o restante da classe, ou outro grupo, montará o restante do painel, cuidando para que fique simétrico.

A descoberta de eixos de simetria de uma figura pode ser feita por dobradura: se a dobra produzir sobreposição dos dois lados da figura, então a linha de dobra é um eixo de simetria.

Há figuras fáceis que enganam: os alunos tendem a dizer que as diagonais de um paralelogramo de lados diferentes são eixos de simetria do mesmo paralelogramo. A atividade de dobrar sobre as diagonais os leva a perceber que essa afirmação é falsa.





## Resumindo

---

Nesta Seção, você teve a oportunidade de:

- Desenvolver situações-problema, versando sobre determinação de distâncias inacessíveis.
- Ter idéias para trabalhar a congruência de triângulos, por meio de materiais manipulativos, como varetas, dobraduras e recortes.
- Conhecer translações, rotações e simetrias.



## Leituras sugeridas

GUELLI, O. *Contando a História da Matemática. Dando Corda na Trigonometria*. São Paulo: Ática, 1993.

Trata-se de um livro paradidático, com muitas ilustrações e escrito em linguagem agradável, adequado ao professor e ao aluno. Além de situações relativas ao Teorema de Tales, as quais nos levaram a recomendá-lo na Unidade 15, o livro traz ainda situações muito interessantes e variadas sobre o Teorema de Pitágoras e os trabalhos de Arquimedes a respeito do comprimento da circunferência e a área do círculo. Conta também sobre Eratóstenes e sobre o modo como ele mediu a circunferência da Terra; além disso, menciona as relações de Hiparco e de Ptolomeu com os primórdios da Trigonometria.

O livro associa riqueza de conhecimentos e leitura fácil e agradável.

## Bibliografia

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5ª a 8ª séries). Brasília: MEC/SEF, 1998.

FREMONT, H. *Teaching Secondary Mathematics through applications*. 2ª ed. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1979.

GOLDENBERG, E. P. *Habits of mind as a organizer for the curriculum*. *Journal of Education* 178 (1): 13-34. Boston University, 1996. Traduzido na revista Educação e Matemática, números 47 e 48. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 1998.

OTTE, M. *O Formal, o Social e o Subjetivo. Uma introdução à Filosofia e à Didática da Matemática*. Tradução. São Paulo: UNESP, 1991.

## Sites consultados

<http://educar.sc.usp.br/licenciatura/2003/hm/page02.htm>

[http://www.math.sunysb.edu/~scott/mat200.fall02/Geometry/Main/2Triangles\\_congruence\\_trian.html](http://www.math.sunysb.edu/~scott/mat200.fall02/Geometry/Main/2Triangles_congruence_trian.html)

[http://oxygen.dana.utexas.edu/dcsite/mathtoolkit/downloads/geoassess/geo\\_6\\_tiling.pdf](http://oxygen.dana.utexas.edu/dcsite/mathtoolkit/downloads/geoassess/geo_6_tiling.pdf)

<http://www.jimloy.com/geometry/congrue0.htm>

## Texto de referência

# O desenvolvimento de hábitos de pensamento no ensino e na aprendizagem da matemática

E. Paul Goldenberg

Adaptado por Nilza Eigenheer Bertoni

Ao longo dos cadernos desta coleção, temos dado ênfase aos processos de pensamento dos alunos: investigação, inferência, argumentação, tendo chegado à demonstração.

Este Texto de Referência vem explicar melhor essa opção pelo desenvolvimento de hábitos de pensamento. Ele foi escrito com base em um artigo de E. Paul Goldenberg (1996), sob o título “Hábitos de pensamento”. Nele, o autor mostra como os hábitos de pensamento podem ser um eixo central no desenvolvimento curricular da Matemática e servir a propósitos educacionais mais amplos. O autor exemplifica alguns dos mais importantes modos de pensar em Matemática.

Tradicionalmente, tem sido defendido que, em um ensino sério de Matemática, conhecimentos serão adquiridos, e as capacidades de raciocínio também serão melhoradas. A abordagem defendida pelo autor diz praticamente o contrário: *tomando determinadas formas de pensamento a sério* e dando-lhes primeira prioridade, capacidades de raciocínio serão adquiridas, e os conhecimentos matemáticos também melhoram.

Esta concepção vai ao encontro de uma *Matemática para todos* – que inclua estudantes que um dia possam vir a gostar, desejar, precisar de Matemática genuína, mas que ainda não compreenderam isso. Defende-se um ensino/aprendizagem que tanto prepare adequadamente os alunos para estudos sérios de Matemática quanto sirva para estudantes que não prosseguem estudos avançados em Matemática. A grande questão é se é possível desenvolver uma tal Matemática e como fazer isso.

Especialistas curriculares têm procurado responder a essa questão definindo quais seriam os conteúdos *nucleares*, ou essenciais, para todos os alunos. Entretanto, a utilidade de qualquer fato ou fórmula depende do que uma pessoa faz. *Para que o radar conduza os nossos aviões e para que as comunicações sem fios nos mantenham em contato, dependemos de alguém que tenha compreendido uma grande quantidade de matemática complicada, mas nós não precisamos saber nada para entrar num avião ou ligar a televisão.*

Então, há elementos da Matemática essenciais para que as crianças se preparem para se tornar adultos com sucesso? Na verdade, a afirmação “nenhum fato particular é essencial” não pode levar à conclusão de que os conteúdos não interessam. Apenas dominar bons hábitos de pensamento e saber como procurar conteúdos quando precisamos deles não é suficiente. É preciso certa familiaridade com a Matemática para que se possa reconhecer particularidades e saber quando é importante olhar com mais atenção para determinado fato. Não temos modo de reconhecer uma solução descoberta acidentalmente, se não conhecemos nada do problema que ela resolve.

Assim, é necessário um conhecimento mais amplo do que aquele que a tarefa imediata demanda, para se conseguir um trabalho produtivo e criativo. São necessários conhecimentos prévios para que possamos perceber conexões entre fatos observados e suspeitar de sua importância. O conhecimento requerido não se refere apenas aos conteúdos, mas

também aos métodos de funcionamento da Matemática ou aos hábitos de pensamento que possibilitam o seu funcionamento.

O que torna determinada organização do ensino coerente é conferir um *enredo* a ela. O que seria um enredo matemático? O que muitos livros didáticos apresentam constitui mais uma lista de coisas a saber fazer do que um corpo coerente de idéias. Outra visão, ou enredo, comumente encontrada é a de que a Matemática se constrói a partir dos seus fundamentos lógicos, um degrau de cada vez, desde os blocos básicos até os conceitos mais avançados. Ou ainda o desenvolvimento histórico é, por vezes, utilizado como tema organizador.

Uma outra maneira de ver um curso de Matemática é não centrá-lo tanto em fatos ou conteúdos matemáticos, mas sobre a maneira como os matemáticos os descobriram, isto é, sobre os modos de pensar Matemática. Isso, é claro, não pode ser desenvolvido sem os conteúdos.

Assim, alguns conteúdos e habilidades devem ser selecionados, mas a essência da Matemática não é esse conjunto de conteúdos e sim o raciocínio que o descobre, que reúne e dá sentido a esses conteúdos. Nessa concepção, há mais do que uma escolha possível de conteúdos e habilidades.

A Matemática é, em parte, um modo de pensar, um conjunto de hábitos de pensamento. Passamos da busca de um conjunto de conteúdos nucleares para a busca de um conjunto de hábitos de pensamentos nucleares.

Voltando ao propósito de uma Matemática para todos, devemos escolher modos de pensar em Matemática que apoiem todas as vocações (e faltas de vocação) para a Matemática.

178

Entretanto, deve ficar claro que o que se defende não é que o ensino de Matemática se justifique por desenvolver as capacidades de raciocínio. Existem hábitos de pensamento específicos para a Matemática e outros que se aplicam a domínios mais amplos. Desenvolvendo os dois tipos, podemos preparar os alunos para estudos avançados de Matemática e, ao mesmo tempo, atender às necessidades de alunos que podem não ter desenvolvido um especial interesse ou aptidão para a Matemática. Desenvolver esses hábitos, além de fornecer uma base sólida sobre como a Matemática é realmente feita, serve aos objetivos gerais da educação para a maior parte dos alunos.

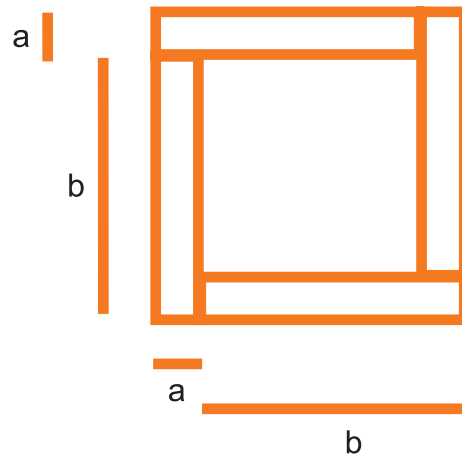
Vamos apresentar e desenvolver um pouco mais uma série de hábitos de pensamento que servem a esse duplo objetivo. São hábitos que estabelecem profundas conexões entre os diversos ramos da Matemática.

## A visualização

Este hábito corresponde à capacidade de criar, manipular e ler imagens mentais de aspectos comuns da realidade. Compreende: visualizar informação espacial e quantitativa; rever e analisar passos anteriormente dados; interpretar ou fazer aparecer imagens de objetos ou idéias que nunca foram vistos. Tarefas que contribuem para o desenvolvimento deste hábito podem incluir: respostas a perguntas como: “quantas portas tem a sua casa?”; imaginar a sombra de um cubo colocado obliquamente; ou os sólidos obtidos quando se empilham camadas finas de material ou quando figuras planas são empilhadas.

## Interpretação de diagramas

Existem informações não visuais que podem ser representadas visualmente por diagramas. Diagramas podem ser uma verdadeira “demonstração visual”, como no caso a seguir de um diagrama associado a uma relação algébrica.



Relação algébrica representada:  $(a + b)^2 - 4ab = (b - a)^2 = (a - b)^2$ .

## Descrição, formal ou informal, de relações e processos

179

Para se fazer Matemática, é importante que se estabeleçam relações quantitativas, espaciais, estruturais, de inclusão etc. e conexões lógicas entre idéias. Além disso, é importante saber descrevê-las, dizer com clareza o que as coisas significam. A linguagem informal é boa para dizer “do que se trata”. Para exprimir o significado matemático restante, temos o auxílio das linguagens formais – como a algébrica, a computacional ou a que se usa no discurso matemático para argumentar com clareza.

Essa capacidade de descrição abrange também o poder de expressar verbalmente uma informação visual e, reciprocamente, o de visualizar informações verbais.

## Procura de invariantes

A capacidade de buscar e reconhecer invariantes, em conjunto com a capacidade de encontrar argumentos lógicos (demonstração) representa o cerne ou, por assim dizer, o coração da Matemática. Portanto, essa procura de invariantes deve estar no centro de um curso de Matemática – abrangendo, entre outros, invariantes algébricos, numéricos, geométricos estáticos ou dinâmicos (por exemplo, a relação de Pitágoras pode ser vista como um invariante estático, enquanto propriedades que permanecem no deslocamento de um ponto podem ser vistas como dinâmicas). Qualquer conteúdo pode ser usado para ajudar os alunos a criarem esse hábito de pensamento. No entanto, muitas vezes o conteúdo é ensinado sem tornar visível esse aspecto globalizante. É interessante justificar o porquê de um padrão ocorrer, e isso pode ser feito por meio de uma argumentação lógica, ou de uma demonstração.

## A capacidade de misturar experimentação e dedução

Nem só a descoberta de padrões ou apenas argumentações lógicas constituem a Matemática. A experiência fornece, muitas vezes, uma conjectura de algum fato ou propriedade, mas fornece também alguma indicação sobre uma demonstração a respeito. Por outro lado, a procura lógica de uma demonstração sugere, muitas vezes, novas experiências. É necessário que o aluno reconheça como essas atividades se interagem. Para isso, uma estratégia possível é levar os alunos a traduzirem uma experiência em palavras, de modo a construir uma demonstração.

## A construção de explicações sistemáticas e de demonstrações para invariantes observados

A respeito de demonstrações, o que interessa não é saber repeti-las formalmente, mas são essenciais em Matemática tanto o ato de construir uma demonstração quanto o conhecimento da estrutura de uma demonstração. Embora demonstrações sejam uma característica própria da Matemática, o hábito de pensamento que consiste em mostrar como uma idéia deriva de outras ocorre na literatura, na argumentação jurídica e na ciência em geral. Todos os alunos precisam ter essa capacidade básica.

## A capacidade de construir algoritmos e raciocinar acerca deles

180 A Matemática constrói algoritmos com base em argumentos lógicos. Entretanto, a experiência comum dos alunos é memorizar algoritmos e não inventá-los ou analisá-los. Compreender como funciona um algoritmo explica, por exemplo, o padrão de repetição obtido na expressão decimal de  $1/7$  ou de  $4/7$ .

## A capacidade de raciocinar por continuidade

Atualmente, programas computacionais como o *Cabri* ou *Sketchpad* ajudam a ampliar a idéia de funções em um domínio contínuo e a relacionar a Geometria à Matemática das mudanças contínuas. Arrastando pontos sobre o monitor, os alunos vêem o efeito disso sobre outros objetos, isto é, visualizam a imagem de uma função. Além de estabelecer ligações entre a Geometria e a Álgebra, eles poderão desenvolver idéias que depois serão expressas pela linguagem algébrica. Isso difere da abordagem tradicional de estudar uma linguagem sem ter idéias para expressar com ela e só mais tarde embasar essas idéias em uma linguagem mal dominada.

## Revedo idéias sobre a organização mais ampla do desenvolvimento curricular

Neste texto, defendeu-se que os modos de pensar, e não os produtos acabados desses modos de pensar, devam orientar o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem de Matemática. Uma argumentação central é a de que essa é uma forma de servir a todos os alunos e não apenas a uma parte.

Essa abordagem permite a todos a aprendizagem de bons princípios de pensamento, que transcendem as disciplinas. Assim, ao mesmo tempo que servem à Matemática de modo admirável, são úteis a todos os alunos independentemente dos seus interesses específicos. Do outro modo, quando a ênfase está nos conteúdos matemáticos e os modos de pensar ficam na retaguarda, diminui a possibilidade de *transferência* do aprendido para outras áreas.

Os alunos têm aprendido, no Ensino Básico, coisas que se denominam Matemática e que pouco têm a ver com o modo como a Matemática é criada ou aplicada fora da escola. Na atual abordagem, estamos considerando mais importantes do que os resultados específicos da Matemática os hábitos de pensamento que foram utilizados pelas pessoas que criaram esses resultados.

Uma reflexão nos leva a considerar os hábitos que necessitamos para viver com saúde, com emprego e produtivos e que nos permitam a adaptação a obstáculos imprevistos e a novos problemas que tenhamos que enfrentar. Para a maioria das áreas do conhecimento, e para a gestão da própria saúde, precisamos ser capazes de nos comunicarmos com clareza; para questões financeiras, jurídicas, ecológicas, comerciais ou ainda matemáticas, precisamos ser capazes de raciocinar sobre um conjunto de condições restritivas; para tudo que requeira diagnóstico, precisamos saber como testar e experimentar, procurar relações de dependência e raciocinar logicamente.

Ao mesmo tempo, não podemos deixar de refletir sobre as relações entre tais hábitos de pensamento e a disciplina específica. Experiências têm demonstrado que, quando as idéias matemáticas se tornam os veículos para os alunos pensarem bem, reinventando as idéias sempre que precisam delas, os conteúdos ficam melhor compreendidos e serão menos esquecidos.

Para finalizar, faremos uma breve articulação das idéias defendidas por E. Paul Goldenberg (1996), em seu artigo “Hábitos de pensamento”, do qual apresentamos um resumo, com as idéias principais desta Unidade e dos PCN.

Nesta Unidade, fizemos uso da argumentação, do raciocínio lógico e chegamos à demonstração na aprendizagem da Matemática. Goldenberg afirma que dos hábitos de pensamento faz parte, entre outros, a demonstração, e que capacidades e estratégias para construir e apresentar idéias demonstrativas e a *propensão* para construir uma demonstração devem ser introduzidas ao longo dos anos de Ensino Básico.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, da 5<sup>a</sup> a 8<sup>a</sup> séries, defendem idéias análogas (página 70):

A argumentação está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação e, para tanto, é importante produzir alguma explicação, bem como justificá-la. Assim, um argumento será aceito se for pertinente, ou seja, se ele estiver sustentado por conteúdos matemáticos e se for possível responder aos contra-argumentos ou réplicas que lhe forem impostos.

Uma argumentação não é, contudo, uma demonstração. A argumentação é mais caracterizada por sua pertinência e visa ao plausível, enquanto a demonstração tem por objetivo a prova, dentro de um referencial assumido. Assim, a argumentação está mais próxima das práticas discursivas espontâneas e é regida mais pelas leis de coerência da língua materna do que pelas leis da lógica formal que, por sua vez, sustentam a demonstração.

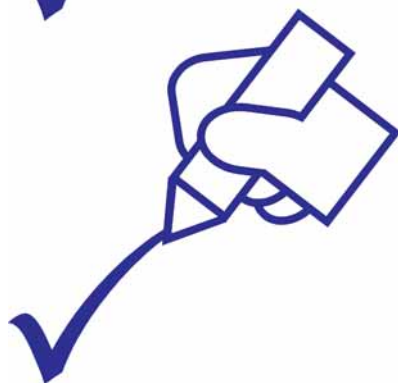
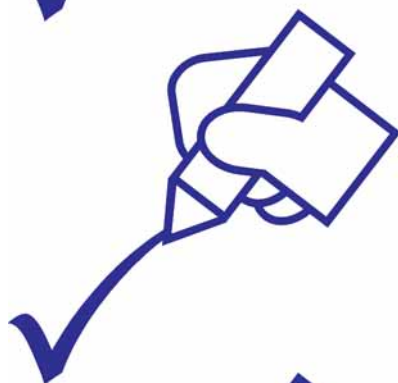
Se, por um lado, a prática da argumentação tem como contexto natural o plano das discussões, nas quais se podem defender diferentes pontos de vista, por outro, ela também pode ser um caminho que conduz à demonstração.

Assim, é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas e afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas.

Os PCN defendem ainda (na página 37), outros hábitos, mencionando, por exemplo, que o estabelecimento de relações é fundamental para que o aluno compreenda efetivamente os conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, eles não se tornam uma ferramenta eficaz para resolver problemas e para a aprendizagem/construção de novos conceitos.



## Solução das atividades



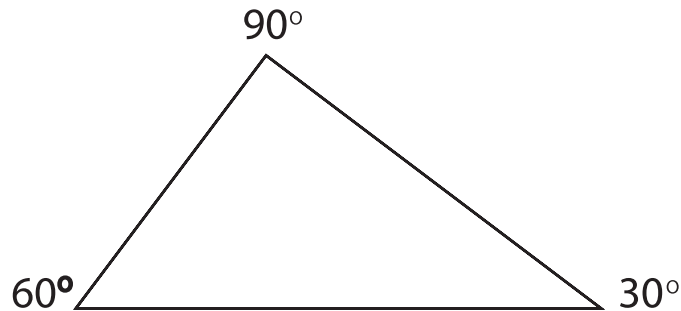


## Solução das atividades

### Atividade 1

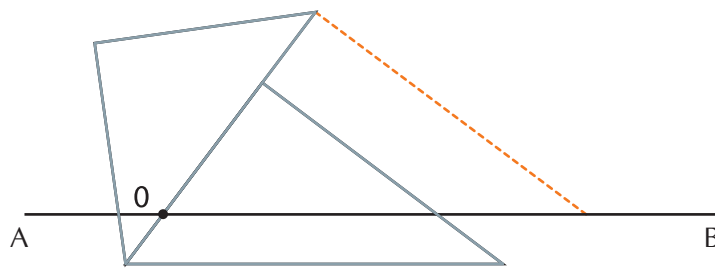
Há várias soluções possíveis.

Você pode começar desenhando um ângulo de  $60^\circ$ . Se você tem um esquadro de três lados diferentes, os ângulos deles valem  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $90^\circ$ .



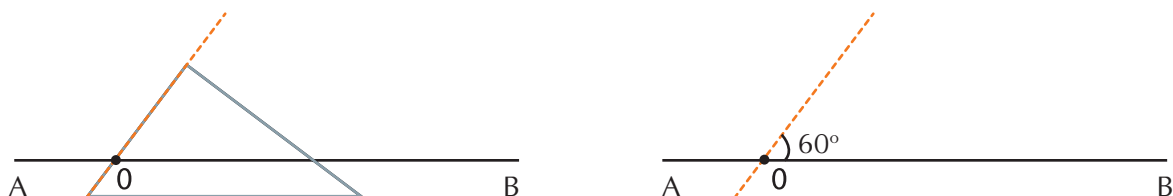
Há uma maneira mais precisa de se desenhar esse ângulo sem contornar o vértice:

Desenhe uma linha horizontal AB e apóie nela o esquadro, na mesma posição anterior. Encoste nele um segundo esquadro e deslize com cuidado o esquadro anterior para baixo.

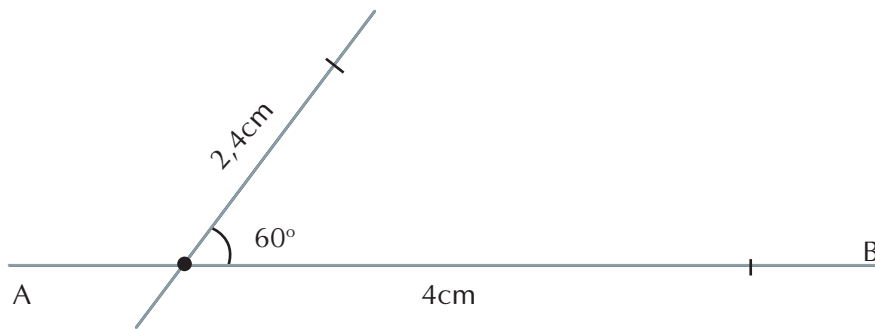


O primeiro esquadro corta a linha AB em um ponto O. Mantenha-o firme nesta posição e afaste o segundo esquadro.

Agora, traçando uma linha ao longo do esquadro, a partir de O, você terá o ângulo de  $60^\circ$  de um modo mais preciso.



A partir de O, marque 4cm em um dos lados do ângulo e 2,4cm no outro lado. Depois feche o triângulo.

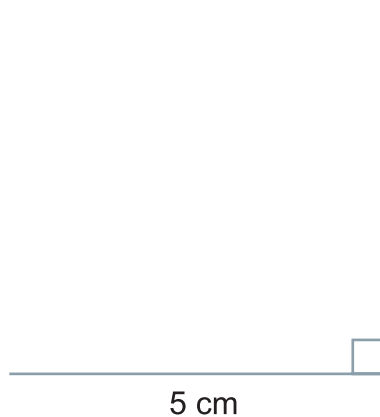


### Atividade 2

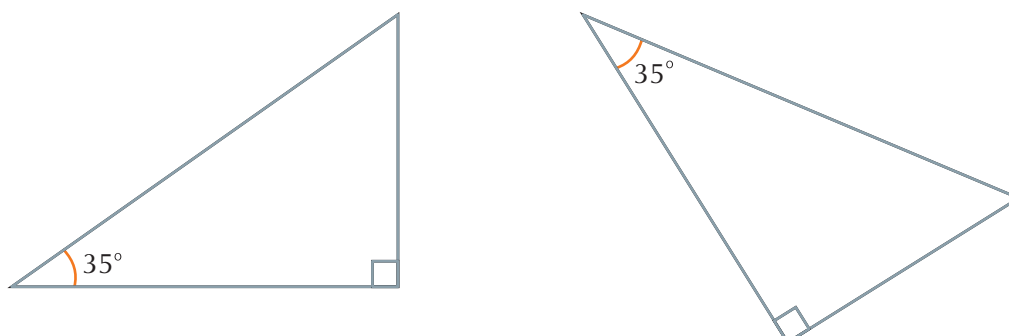
Os dois triângulos teriam que ser iguais por terem três pares de lados congruentes (de mesma medida).

### Atividade 3

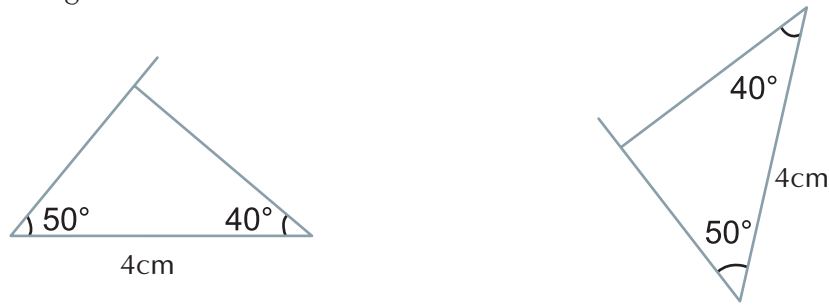
a) Começamos desenhando um ângulo reto e um cateto com 5cm.



Em seguida, marcamos o ângulo de  $35^\circ$  adjacente a este cateto. O lado deste ângulo encontra o outro cateto em um único ponto, de modo que, o triângulo fica determinado. Poderemos obter triângulos em outras posições, mas serão todos congruentes. Isso está de acordo com o caso ALA – os triângulos têm um lado congruente, compreendido entre ângulos congruentes (de  $35^\circ$  e de  $90^\circ$ ).



- b) Podemos começar traçando a hipotenusa com 4cm e um ângulo adjacente a ela com  $50^\circ$ . Sabemos que, em um triângulo retângulo, a soma dos ângulos não retos vale  $90^\circ$ . Logo, o outro ângulo deve valer  $40^\circ$ .

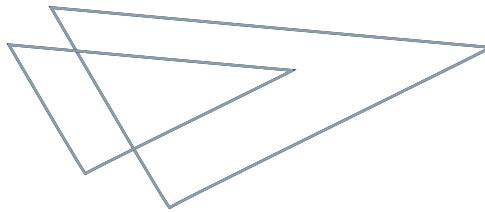


Uma vez traçados os lados que definem esses ângulos, eles se cruzam em um único ponto, e o triângulo fica determinado, não podendo ter outra forma.

Logo, todos os triângulos possíveis, com esses elementos, serão congruentes. Novamente, temos o caso ALA.

#### Atividade 4

- a) Se desenharmos um triângulo qualquer e outro com lados paralelos a ele, ambos terão os ângulos respectivamente congruentes.



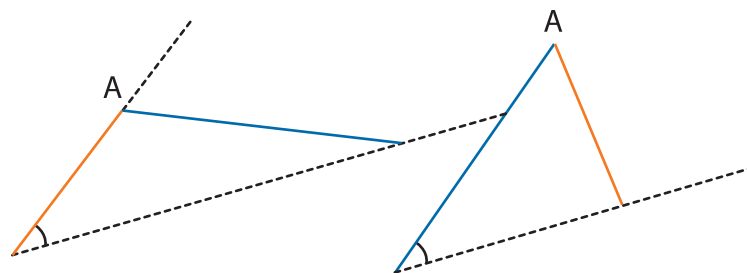
Entretanto, se variarmos a dimensão dos lados, os triângulos não serão congruentes.

- b) Começamos traçando um ângulo, que deve ser igual nos dois triângulos.

No primeiro triângulo, marcamos o lado vermelho adjacente ao ângulo. Fixamos uma extremidade do lado azul em A e o giramos de modo a interceptar o outro lado do ângulo.

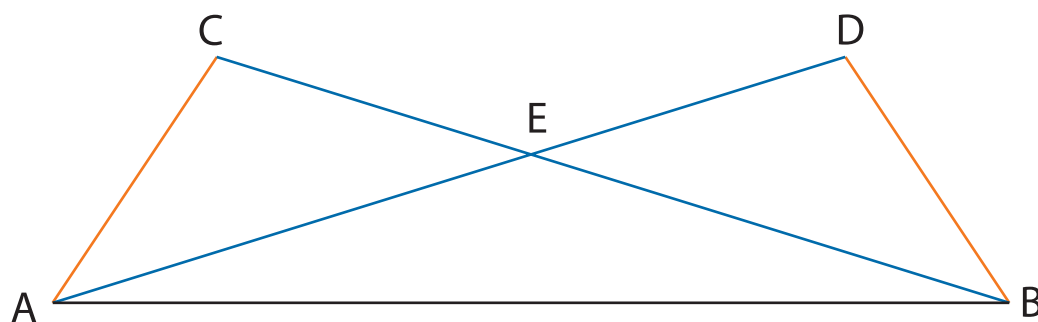
No segundo triângulo, marcamos o lado azul adjacente ao ângulo. Fixamos uma extremidade do lado vermelho em A e o giramos de modo a interceptar o outro lado do ângulo.

Deste modo, obtemos dois triângulos não congruentes, com dois pares de lados iguais e um ângulo igual, não compreendido entre os dois.



Este exemplo parece ser o caso LLA, que daria congruência. Entretanto, isto só ocorreria se, nos dois triângulos, marcássemos lados iguais adjacentes ao ângulo igual – os dois vermelhos adjacentes ao ângulo e os azuis opostos ao ângulo; ou os dois azuis adjacentes ao ângulo e os vermelhos opostos ao ângulo.

### Atividade 5



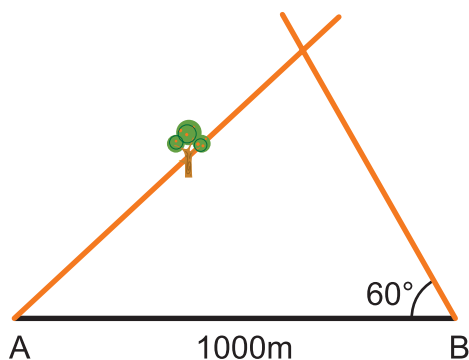
Os triângulos congruentes são:

ABC e ABD – por terem três lados respectivamente iguais (base comum, lados azuis e lados vermelhos). Da congruência desses triângulos, resulta que o ângulo com vértice em C é congruente ao ângulo com vértice em D.

ACE e BDE – por terem um lado igual (vermelho), um ângulo adjacente a esse lado congruente (ângulo C e ângulo D) e um ângulo oposto a esse lado congruente (ângulos CEA e DEB, opostos pelo vértice).

188

### Atividade 6



É possível demarcar. Um modo é o seguinte:

Marca-se uma linha reta passando por A e pela árvore. Em seguida, marca-se por B uma linha formando um ângulo de  $60^\circ$  com AB. A interseção das duas linhas dará o terceiro vértice do terreno triangular.

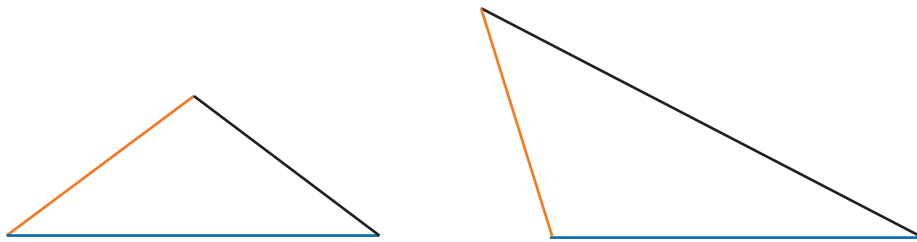
A justificativa é que a reta partindo de A e passando pela árvore define o valor de um ângulo; então qualquer triângulo traçado terá a base comum e dois ângulos adjacentes congruentes (ALA), portanto os triângulos traçados são congruentes. Por terem elementos fixos (a base e a árvore sobre um dos lados), os triângulos são todos coincidentes.

**Atividade 7**

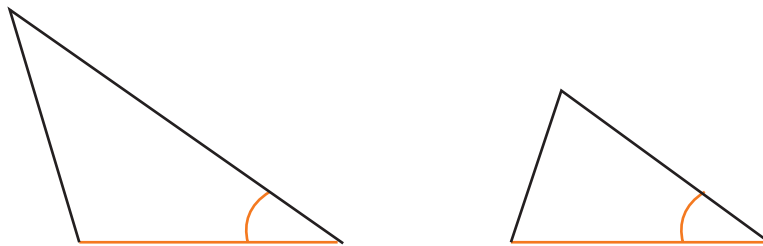
- a) Enunciado: Um triângulo que tem dois ângulos iguais é isósceles.
- b) Demonstração: Seja um triângulo  $ABC$ , com os ângulos de vértices  $A$  e  $B$  iguais, e prove-se que os lados  $AC$  e  $BC$  são iguais. Considerem-se os triângulos  $ABC$  e  $BAC$ . Sabemos que o lado  $AB$  de um é igual ao lado  $BA$  do outro; os ângulos de vértices  $A$  e  $B$  de um são respectivamente iguais aos ângulos de vértices  $B$  e  $A$  do outro. Logo os triângulos são congruentes pelo caso  $ALA$ . Portanto, os lados  $AB$  e  $AC$  são iguais, e o triângulo é isósceles.
- c) Hipótese: Certo triângulo tem dois ângulos iguais.
- d) Tese: Esse triângulo é isósceles.

**Atividade 8**

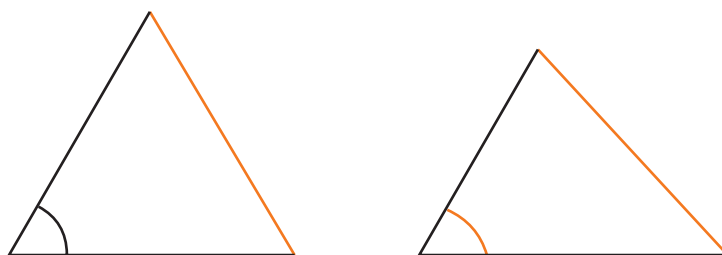
- a) Contra-exemplo para  $LL$ : os dois triângulos abaixo têm dois pares de lados congruentes, mas não são congruentes.



- b) Contra-exemplo para  $LA$ : os dois triângulos a seguir possuem um lado igual e um ângulo adjacente a esse lado também igual, mas não são congruentes.

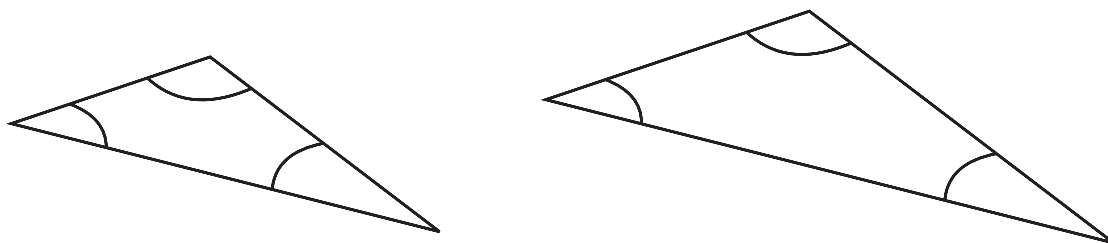


- c) Contra-exemplo para  $LA$ ; com  $A$  ângulo oposto: os dois triângulos a seguir possuem um ângulo igual, ou melhor, congruente e um lado oposto a esse ângulo também congruente. Entretanto, os triângulos não são congruentes.



- d) Contra-exemplo para  $AA$ : os dois triângulos a seguir possuem dois ângulos iguais, ou melhor, congruentes, mas não são congruentes.

Lembramos que, se dois triângulos possuem dois ângulos congruentes, então o terceiro ângulo também será congruente (se  $a$  e  $b$  são as medidas dos ângulos congruentes nos dois triângulos, então o terceiro ângulo nos dois triângulos vale  $180^\circ - (a + b)$  e, portanto, também são congruentes. Mas isso não garante a congruência dos triângulos, como se vê pelo exemplo abaixo.



### Atividade 9

a) LLLA

Só o fato de terem os três lados respectivamente congruentes já garante a congruência dos triângulos; não é necessária a informação adicional de que os triângulos possuem ainda um ângulo congruente (LLL).

b) LALA

Só o fato de terem dois pares de lados correspondentes de mesmo comprimento e os ângulos compreendidos entre eles de mesma medida já garante a congruência dos triângulos; não é necessária a informação adicional de que os triângulos possuem ainda mais um ângulo congruente. (LAL)

190

c) LLAA

Os triângulos têm dois pares de lados congruentes e dois pares  $\hat{B}$  e  $\hat{B}'$  e  $\hat{C}$  e  $\hat{C}'$  de ângulos congruentes (nenhum deles é o ângulo compreendido entre os lados congruentes). Pela soma dos ângulos de um triângulo, temos que os terceiros ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{A}'$  também são congruentes, e eles devem ser os ângulos entre os lados congruentes. Logo, temos o caso LAL – dois lados congruentes e o ângulo compreendido entre eles congruente – e, portanto, os triângulos são congruentes.

d) AAAL

Poderíamos garantir a congruência se os lados congruentes estivessem entre ângulos congruentes (caso ALA). Entretanto, pode não ser esse o caso, como veremos no contra-exemplo a seguir. Os dois triângulos têm os três ângulos congruentes e um lado (azul) congruente, porém este lado não se encontra entre ângulos congruentes. Os triângulos não são congruentes.



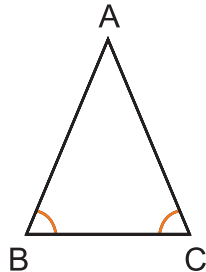


**Atividade 10**

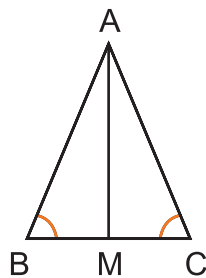
b) Reciprocamente, se um triângulo ABC tem ângulos ABC e ACB com medidas iguais, então ele é isósceles, com base BC.

**Demonstração**

Vamos tomar como hipótese que os ângulos ABC e ACB são congruentes.



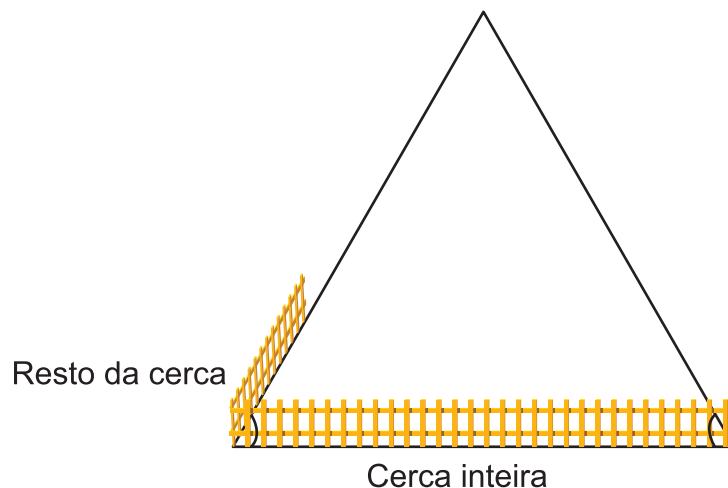
Como na demonstração da parte a), devemos dividir o triângulo unindo A ao ponto médio M de BC.



Os dois triângulos obtidos são congruentes, pois têm dois pares de lados iguais: AM (lado comum); e  $BM = MC$ , por M ser ponto médio; e os ângulos opostos a AM também iguais (LLA),  $\hat{B} = \hat{C}$ .

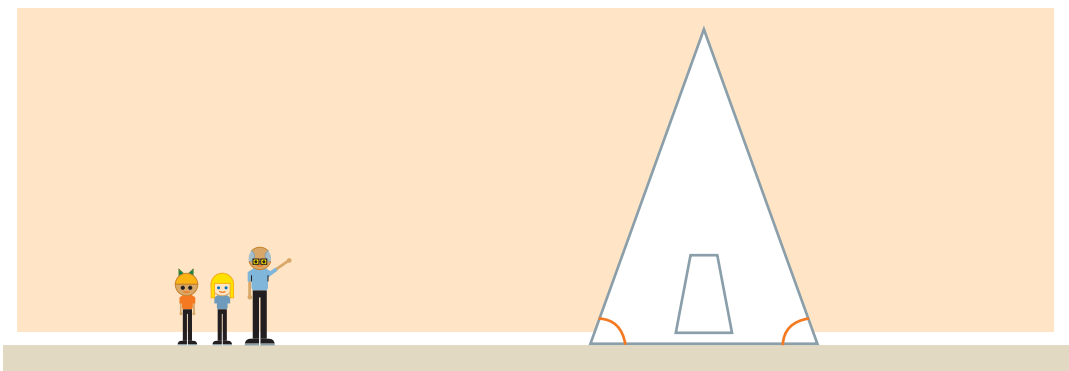
Sendo congruentes, têm seis pares de elementos congruentes. Em particular, os lados AB e AC, um em cada um dos triângulos, têm medidas iguais. Logo, o triângulo ABC é isósceles.

191

**Atividade 11**

Como o terreno tem a forma de um triângulo isósceles, os ângulos da base devem ser iguais. Um modo é verificar a medida do ângulo entre a cerca inteira e o pedaço de cerca e marcar um ângulo igual a partir da outra extremidade da cerca inteira. O ponto de encontro dos lados dos dois ângulos determina o outro vértice do terreno.

### Atividade 12



Embora os ângulos pareçam grandes, a medida deles, na igreja real e na maquete, é a mesma – só os lados são maiores, não a abertura (você aprendeu sobre isso na Unidade 9 do TP 3, naquela da piscina, lembra-se?).

Portanto, determinando uma escala, os alunos deverão fazer a frente da maquete, marcando a base segundo essa escala, e deverão marcar os dois ângulos com as mesmas medidas que aparecem na realidade. O ponto de encontro dos lados dará um triângulo semelhante ao da realidade, que é o triângulo certo da maquete.

192

### Atividade 13

- Resposta pessoal. A figura é rica em formas que podem ser sobrepostas. Poderão ser mencionados, por exemplo: os triângulos do gradeado inferior; as janelas quadradas (desconsiderando que estão em perspectiva); as duas grandes figuras “triangulares” brancas simétricas, contendo, cada uma, um lado em escada; dois retângulos altos e finos na parte central; retângulos brancos superiores, com três janelas cada um.
- Resposta pessoal.

### Atividade 14

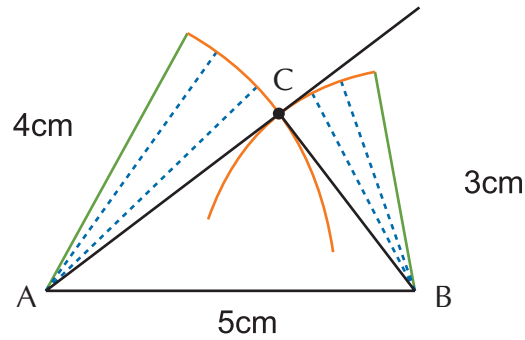
A atividade é uma ação concreta. Os objetos construídos podem ser abertos ou fechados, produzindo losangos ou quadrados. Portanto, nem sempre serão congruentes, apesar de terem lados iguais.

### Atividade 15

- Os triângulos congruentes são I e II.
- Na verdade, os três modos seriam corretos para verificar que os triângulos são idênticos.

**Atividade 16**

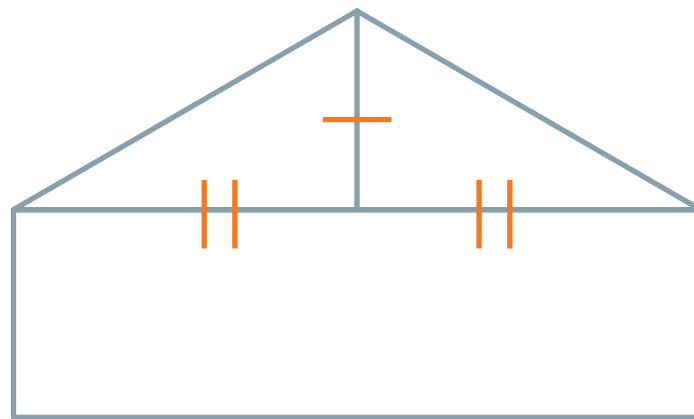
a)



O desenho feito produz o triângulo com os lados desejados porque:

Partimos de um segmento horizontal  $AB$  com a medida de  $5\text{cm}$ . Com um compasso com centro em  $A$  e abertura igual a  $4\text{cm}$ , traçamos um arco de circunferência. Todos os raios desta circunferência medem  $4\text{cm}$ , em particular  $AC$  mede  $4\text{cm}$ . Depois, colocamos o compasso com centro em  $B$  e abertura igual a  $3\text{cm}$  e traçamos um arco de circunferência. Todos os raios desta circunferência medem  $3\text{cm}$ , em particular  $BC$  mede  $3\text{cm}$ .

b) Podemos concluir que dois triângulos que têm os três lados com medidas respectivamente iguais são congruentes.

**Atividade 17**

Sim, os triângulos são congruentes, pois têm dois lados congruentes compreendidos entre ângulos congruentes. LAL.



**PARTE II**

**TEORIA E PRÁTICA 5**

**Socializando o seu  
conhecimento e  
experiências de  
sala de aula**



## Socializando o seu conhecimento e experiências de sala de aula – Unidade 18

Este momento final tem por objetivos:

1. Aplicar com os seus alunos o conceito de multiplicação explorando a idéia de combinação.
2. Refletir sobre os desafios propostos na utilização da combinação como uma forma de resolução de situações-problema que envolvem multiplicação.
3. Refletir sobre a aplicação da Matemática às Ciências Sociais.
4. Elaborar uma produção escrita contendo uma reflexão sobre a importância de se trabalhar o conceito de multiplicação por meio de adição de parcelas iguais e de raciocínio combinatório.

Para tanto, três tarefas devem ser preparadas para serem levadas à oficina e socializadas entre os colegas:

### Tarefa 1

Desenvolva, com pelo menos uma turma de alunos, a Atividade 9 proposta na Seção 2. Se for necessário, faça algumas adaptações. Em seguida, faça um registro onde constem:

- a) as dificuldades encontradas pelos alunos para visualizar as possibilidades de combinação e as opções de representação;
- b) as maiores dificuldades na realização do trabalho da proposta de transposição com os seus alunos. Esse registro será um apoio para a discussão da transposição didática na oficina.

### Tarefa 2

Escreva aproximadamente dez linhas sobre a importância de trabalhar as idéias da multiplicação: tanto a adição de parcelas iguais, quanto o raciocínio combinatório. Ilustre o seu texto com exemplos observados na produção dos alunos em sala de aula.

### Tarefa 3

Faça uma releitura do Texto de Referência: “Etnomatemática”, e pense em como a Matemática pode ser aplicada às Ciências Sociais, como proposto na situação-problema da Seção 1. Registre as suas considerações.

**Este material deverá ser entregue ao seu formador ao final da oficina.**





## Socializando o seu conhecimento e experiências de sala de aula – Unidade 20

Serão desenvolvidos três itens:

- Rever e sintetizar por escrito as principais idéias tratadas na Unidade.
- Refletir sobre os desafios propostos na transposição didática, registrando-os por escrito.
- Elaborar uma produção escrita a ser entregue ao formador na próxima Oficina, contendo produções dos seus alunos.

Para tanto, você deverá preparar as três tarefas a seguir, para serem levadas à Oficina e socializadas entre os colegas.

### Tarefa 1

Faça uma síntese por escrito dos principais conceitos trabalhados na Unidade. Esse documento será para o seu uso pessoal durante a Oficina.

### Tarefa 2

Organize uma lista contendo: a) o ponto mais interessante; e b) duas das maiores dificuldades encontradas na realização do trabalho da proposta de transposição com os seus alunos. Esse documento será um apoio seu para a participação na Oficina, no que se refere à parte da transposição didática.

### Tarefa 3

a) Desenvolva com os seus alunos a situação-problema da largura do lago, se eles já estiverem estudando congruência de triângulos, ou então a Atividade 14, que pode ser aplicada a qualquer série (da 3<sup>a</sup> a 8<sup>a</sup>).

b) Organize, registre e catalogue em uma pasta as produções mais significativas de alguns dos seus alunos, obtidas no desenvolvimento do item a). Se puder, leve cartazes ou materiais produzidos por eles. No caso da situação-problema, explique quais idéias os alunos tiveram, se chegaram sozinhos à idéia dos triângulos congruentes ou se você teve que introduzi-los. No caso dos quadriláteros produzidos com quatro canudos iguais, explique se eles perceberam que, com quatro lados iguais, pode-se produzir losangos ou quadrados; se perceberam que todo quadrado é um losango ou quais foram as outras reações e observações que fizeram.

c) Escreva aproximadamente dez linhas sobre a importância para a aprendizagem matemática dos seus alunos desta atividade desenvolvida; comente fatos ocorridos em sala e outros observados na produção dos alunos.

**Ao final da Oficina, entregue ao seu formador o material dos itens b) e c) da Tarefa 3.**



**PARTE III**

**TEORIA E PRÁTICA 5**

**SESSÃO COLETIVA**



## Sessão Coletiva 9

### Unidade 17

Na Unidade 17, examinamos algumas formas de ajudar seus alunos a desenvolverem métodos sistemáticos de contagem, utilizando o princípio multiplicativo e em especial, envolvendo o diagrama de árvore como estratégia de contagem. Na Seção 3 – Transposição Didática, discutimos algumas estratégias de trabalho para explorar este conteúdo e conhecer as principais necessidades e dificuldades dos alunos na utilização do princípio multiplicativo de contagem. Vimos que o campo conceitual multiplicativo inclui as operações de iteratividade e de recursividade, que são importantes para o desenvolvimento de habilidades de contagem que não estejam simplesmente baseadas na aplicação de fórmulas. Destacamos a importância do uso do diagrama de árvore para ensinar o princípio multiplicativo e a validade dos desenhos para ilustrar e visualizar este princípio.

Agora, nesta Sessão, será discutida a Unidade 17 e faremos uma introdução ao estudo da Unidade 18.

A duração prevista para esta Sessão é de aproximadamente quatro horas, incluindo um intervalo de dez minutos e uma reserva técnica de dez minutos. Ela deve se desenvolver em três grandes momentos, conforme apresentados a seguir.

203

#### Parte A (80 minutos)

Na Unidade 16, na parte de “Socializando o seu Conhecimento e Experiências de Sala de Aula” do TP4, foi proposto que o professor escolhesse uma situação-problema e a desenvolvesse em sala de aula, com registro e sistematização de produções de alguns alunos. Nesta parte da Sessão Coletiva, cada professor deve ter a oportunidade de socializar com o grupo o relato e os produtos obtidos na experiência realizada, momento este em que deverão ser socializadas as produções dos alunos, coletadas e organizadas conforme solicitado no “Socializando o seu conhecimento”.

Devem ser sorteados ou convidados alguns cursistas para começarem os relatos, de preferência que tenham aplicado situações-problema distintas.

Em cada caso o cursista apresentador deve:

- a) dizer ou ler, com todo o cuidado, qual das situações-problema ele desenvolveu em sala de aula;
- b) apresentar os materiais produzidos pelos alunos, com relação à tarefa proposta no “Socializando o seu conhecimento” anterior.

Formador, recolha dos cursistas o material que eles trouxeram, incluindo dez linhas sobre a importância, para a aprendizagem matemática de seus alunos, desta atividade desenvolvida com comentários. Este é um instrumento que servirá para a avaliação dos cursistas.

## Parte B (110 minutos)

Este momento é destinado à realização de uma atividade prática. As atividades propostas a seguir foram também propostas no Caderno de Atividades de Apoio à Aprendizagem referente à Unidade 17.



### Atividade 1

Na lanchonete da escola, o cardápio é composto por:

Bebidas		Salgados	
Chocolate quente	R\$ 1,20	Esfirra	R\$ 0,50
Suco com água	R\$ 0,80	Pão de queijo	R\$ 0,50
Suco com leite	R\$ 1,50	Coxinha	R\$ 0,80
Refrigerante	R\$ 1,00		
Café	R\$ 0,50		

204

As crianças geralmente escolhem algo para beber e algo para comer. De quantos modos diferentes eles podem pedir o seu lanche? Faça a contagem utilizando:

- Um diagrama.
- Uma tabela.
- Uma árvore de possibilidades.
- Dentre as formas de representar a contagem, qual você observou ser a mais adequada para esta situação?



### Atividade 2

A lanchonete da escola, durante a semana da criança, fez a seguinte promoção: a cada lanche a criança poderia optar por levar como brinde um pirulito ou um tablete de amendoim.

- De quantas formas diferentes eles podem montar o lanche com uma bebida, um salgado e um dos brindes?
- Escolha uma forma para representar as opções e justifique a sua escolha.

## Parte C (30 minutos)

Conversando sobre a próxima Unidade.

Na Unidade 18, continuaremos o estudo iniciado na Unidade 17 sobre as formas sistemáticas de contagem. Exploraremos, novamente, os métodos e o princípio fundamental de contagem e o raciocínio combinatório, priorizando a utilização da tabela como uma outra forma de representação do princípio multiplicativo.

Para começar a explorar o raciocínio combinatório usando uma outra forma de representação, tentem resolver a questão proposta na Atividade 8 da Unidade 17, só que, desta vez, organizando os dados em uma tabela.

## A Caminho de St. Ives

A caminho de St. Ives,  
Encontrei um homem com sete esposas,  
Cada esposa tinha sete sacos,  
Cada saco tinha sete gatas,  
Cada gata tinha sete filhotes,  
Filhotes, gatas, sacos e esposas,  
Quantos iam a caminho de St. Ives?

BOM TRABALHO!!!

## Sessão Coletiva 10

### Unidade 19

Agora é o momento de discutir as suas dúvidas e dificuldades com os seus outros colegas. As oficinas que acontecem quinzenalmente estão divididas em três partes:

**Parte A** - Discussão da situação-problema e dos tópicos de Matemática: é o momento de apresentar aquelas idéias que não ficaram muito claras para você quando da resolução da situação-problema. Você vai discutir e refletir sobre os tópicos de Matemática presentes no TP, inseridos ou não, em novas situações. Enfim, discuta Matemática!

**Parte B** - Um dos objetivos do Gestar é o de possibilitar um novo olhar e novas formas de conceber os conceitos e tópicos matemáticos. Por isso, todas as Unidades possuem a Seção de Transposição Didática, ou seja, são sugestões de como levar as propostas matemáticas ou de Educação Matemática para a sala de aula. Aproveite a oficina para discutir com os colegas as suas experiências quando realizou a transposição na sua sala. Quais foram as dificuldades, descobertas e curiosidades?

**Parte C** - É hora de voltar ao trabalho. É preciso continuar pesquisando sobre o tema que o TP trata. Então veja o que você encontrará pela frente nessa Sessão.

206

## Parte A



### Atividade 1

---

Algumas perguntas pra começar a nossa oficina: você sabe para que servem os números primos? Por que estudamos e algumas vezes damos tanta ênfase a esse assunto? Será que a sua aplicação está apenas no âmbito da própria matemática?

Quando você manda uma mensagem ou coloca uma senha de banco na Internet, você sabia que são os números primos que garantem a sua segurança?

Não? Então, vamos por partes.

1) A criptografia trata-se do sistema que protege transações pela Internet. Criptografia (*kriptós* = escondido, oculto; *grápho* = grafia): é a arte ou ciência de escrever em cifra ou em códigos, de forma a permitir que somente o destinatário a decifre e a compreenda.

2) A codificação é feita usando números primos grandes que, mesmo com os computadores atuais, levariam séculos para serem descobertos. Então, só quem tem a chave pode codificá-lo. Números compostos por primos razoavelmente grandes podem proteger sistemas de senhas, pois a tarefa de decompô-los empregando métodos braçais e mesmo computacionais é quase impossível.

É de longa data o fascínio pelos números primos. O tema sempre instigou os matemáticos.



Temos uma proposição célebre como a Conjectura de Goldbach de 1742:

**Todo número par maior do que ou igual a 4 é a soma de dois números primos.**

Vamos pensar sobre isso, então:

$$20 = 13 + 7 \text{ e } 100 = 53 + 47.$$

a) Que outros números pares que são somas de dois números primos você é capaz de encontrar?

b) Agora é a sua vez. Em grupo, encontre como seria a soma de dois números primos até 200. Use a calculadora!

Bom trabalho!



## Atividade 2

---

Apresente as suas soluções para os outros grupos. E pense no seguinte: a Conjectura de Goldbach estava certa? Existem apenas dois pares de números primos que satisfazem a conjectura?



## Atividade 3

---

Dia desses, fazendo esta atividade em classe, um aluno gritou:

*Quais são os dois números primos que formam 2000?*

E, pelo material que usei de base, já esperava por essa pergunta. Então, respondi:

$$1997 + 3?$$

Ele ficou calado. Estava certa a afirmação?

**Atividade 4** \_\_\_\_\_

E na sua opinião, este problema seria resolvido sem a calculadora? Qual foi o papel da calculadora? Além de facilitar os cálculos, ela levou o aluno a raciocinar? Anote as suas impressões.

**Parte B – Discussão da Transposição Didática****Atividade 5** \_\_\_\_\_

208

Vamos retomar algumas das questões levantadas na Transposição Didática deste TP. O tema que discutimos foi o uso de recursos computacionais como calculadora e computador.

Depois de você ter realizado as Atividades 17 e 18 com os seus alunos, quais foram os resultados?

**Atividade 6** \_\_\_\_\_

Em duplas ou trios, criem uma atividade que utilize a calculadora em sala de aula. Depois a socialize com os seus colegas.



## Atividade 7

---

Na Atividade 19, foi proposta a seguinte situação:

... formule várias situações para serem realizadas com os seus alunos de 7<sup>a</sup> e 8<sup>a</sup> séries, as quais comecem a levá-los a resolver as equações quadráticas por fatoração. Se você não for professor dessas séries, não fique de braços cruzados: pense em uma situação em que você possa introduzir a solução de uma equação simples. O que acha de usar o material manipulável da Atividade 12?

Apresente a sua proposta ao grupo de professores e discuta. Insira outras que achar pertinente ao seu trabalho. Dê também sugestões para melhorar as outras atividades.

## Parte C



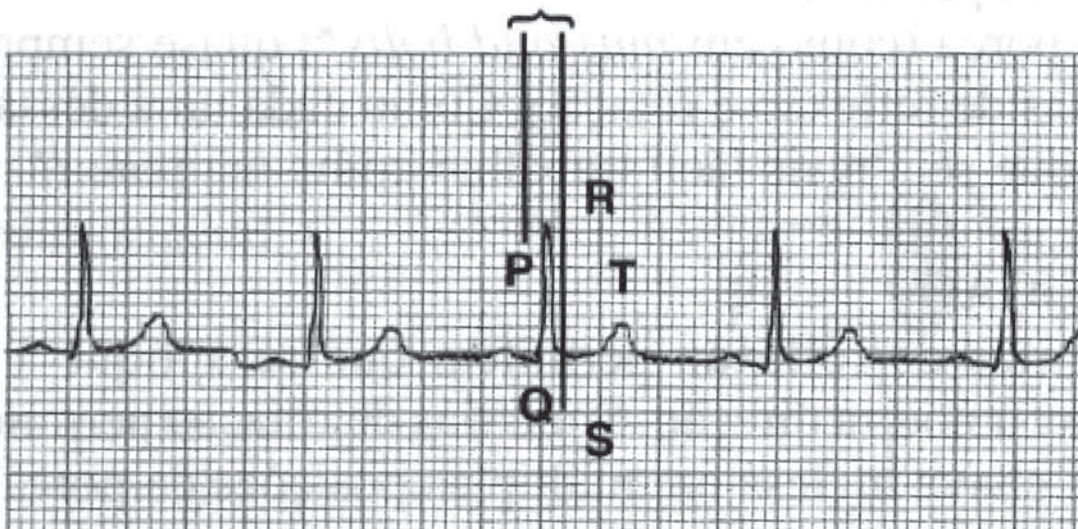
## Atividade 8

---

209

Vamos pensar agora em algumas situações:

a) O seu batimento cardíaco pode ser registrado em um eletrocardiograma. O gráfico é chamado de eletrocardiograma. Que propriedade do eletrocardiograma indica, em sua opinião, que o batimento é uniforme?



b) A música *Die zehn Gebote der Kunst* tem uma construção peculiar. Do que se trata?

**Die zehn Gebote der Kunst** Joseph Haydn

Du    sollst dich    ganz der    Kunst    wei -    hen.

c) Você pode ver a imagem de uma ameba, que é muito pequena para ser vista a olho nu, por meio de um microscópio. Então, pergunta-se:

No que essa imagem difere da original?

No que ela é igual?

Isso foi apenas um gostinho de como as isometrias e congruências estão presentes no nosso dia-a-dia. Na próxima Unidade, você vai estudar mais sobre isso.

Bom trabalho!