MATEMÁTICA

PDE | GESTAR II

PROGRAMA GESTÃO
DA APRENDIZAGEM ESCOLAR

Acesse www.mec.gov.br ou ligue 0800 616161

FNDE Ministério da Educação BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA NAS MIGRAÇÕES E EM FENÔMENOS COTIDIANOS – TP6

GESTAR II

PDE | GESTAR II

PROGRAMA GESTÃO
DA APRENDIZAGEM ESCOLAR

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA NAS MIGRAÇÕES E EM FENÔMENOS COTIDIANOS

TP6

CADERNO DE TEORIA E PRÁTICA

Presidência da República
Ministério da Educação
Secretaria Executiva
Secretaria de Educação Básica

PROGRAMA GESTÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR
GESTAR II

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DOS ANOS/SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

MATEMÁTICA

CADERNO DE TEORIA E PRÁTICA 6

MATEMÁTICA NAS MIGRAÇÕES
E EM FENÔMENOS COTIDIANOS

Diretoria de Políticas de Formação, Materiais Didáticos e de Tecnologias para a Educação Básica

Coordenação Geral de Formação de Professores

Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II

Matemática

Organizador

Cristiano Alberto Muniz

Autores

Ana Lúcia Braz Dias - TP2, TP3 e TP5
Doutora em Matemática
Universidade de Indiana

Celso de Oliveira Faria - TP2, TP4, TP5, AAA1, AAA2 e AAA3
Mestre em Educação
Universidade Federal de Goiás/UFG

Cristiano Alberto Muniz - TP1 e TP4
Doutor em Ciência da Educação
Universidade Paris XIII
Professor Adjunto - Educação Matemática
Universidade de Brasília/UnB

Nilza Eigenheer Bertoni - TP1, TP3, TP4, TP5 e TP6
Mestre em Matemática
Universidade de Brasília/UnB

Regina da Silva Pina Neves - AAA4, AAA5 e AAA6
Mestre em Educação
Universidade de Brasília/UnB

Sinval Braga de Freitas - TP6
Mestre em Matemática
Universidade de Brasília/UnB

Guias e Manuais

Autores

Elciene de Oliveira Diniz Barbosa
Especialização em Língua Portuguesa
Universidade Salgado de Oliveira/UNIVERSO

Lúcia Helena Cavasin Zabotto Pulino
Doutora em Filosofia
Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP
Professora Adjunta - Instituto de Psicologia
Universidade de Brasília/UnB

Paola Maluceli Lins
Mestre em Lingüística
Universidade Federal de Pernambuco/UFPE

Ilustrações

Francisco Régis e Tatiana Rivoire

DISTRIBUIÇÃO
SEB - Secretaria de Educação Básica
Esplanada dos Ministérios, Bloco L, 5o Andar, Sala 500
CEP: 70047-900 - Brasília-DF - Brasil

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Centro de Informação e Biblioteca em Educação (CIBEC)

Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II. Matemática: Caderno de Teoria e Prática 6 - TP6: matemática nas migrações e em fenômenos cotidianos. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.
224 p.: il.

1. Programa Gestão da Aprendizagem Escolar. 2. Matemática. 3. Formação de Professores. I. Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica.

CDU 371.13

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA

PROGRAMA GESTÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR GESTAR II

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DOS ANOS/SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

MATEMÁTICA

CADERNO DE TEORIA E PRÁTICA 6

MATEMÁTICA NAS MIGRAÇÕES E EM FENÔMENOS COTIDIANOS

BRASÍLIA
2008

Sumário

PARTE II

PARTE III

Apresentação

Caro Professor, cara Professora,

Os conteúdos envolvidos nas unidades deste caderno relacionam-se, principalmente, a álgebra, geometria, e a coordenadas cartesianas no plano, que fazem a articulação entre ambas, podendo ser consideradas uma *algebrização do plano*.

Os contextos que geram esses conceitos são relacionados ao homem e à sua vida em sociedade: alimentação, saúde, migrações, fenômenos sociais cotidianos.

Na Unidade 21, a ênfase é dada a analogias entre frações numéricas e algébricas. Com relação a cada uma delas, a soma e a subtração pode ser realizada usando-se o produto dos denominadores, que é um múltiplo comum. Desenvolve-se um cálculo literal análogo ao aritmético, e salienta-se sua importância simplificadora na resolução de situações-problema envolvendo, entre outros, problemas curiosos sobre herança e a visão da Terra a partir de naves espaciais.

Na Unidade 22, o tema Migrações gera estudos sobre localização, deslocamentos, sistemas de coordenadas, revendo ainda reflexões e translações no plano, ampliações e o teorema de Pitágoras. Os tema propiciam grande articulação entre conhecimentos geométricos e algébricos.

A Unidade 23 retoma a Álgebra, no tema resolução de sistemas lineares, imerso no contexto de alimentação e saúde. Além das soluções, os sistemas são discutidos e representados graficamente. Faz-se uma abordagem da resolução de sistemas de três equações com três incógnitas, relacionando-o à solução de sistemas de duas equações a duas incógnitas, e abrindo uma perspectiva para a solução de sistemas com maior número de equações e incógnitas. Introduz-se também o tema inequações.

A Unidade 24 trata basicamente das relações de proporcionalidade e da função linear, associadas a inúmeros fenômenos sociais cotidianos. De fato, esse tipo de relação tem um presença marcante no dia-a-dia, interferindo, por exemplo, em custos, deslocamentos, construções.

Como nos demais cadernos, as unidades terminam com Textos de Referência, que aprofundam os seus conhecimentos sobre Educação Matemática e dão fundamentos para sua prática pedagógica.

São os seguintes:

- O sentido do símbolo. Atribuindo um sentido informal à Matemática formal.
- Explorando a geometria da orientação e do deslocamento
- Algumas concepções sobre ensino-aprendizagem da matemática
- Matemática, Linguagem e Comunicação.

Com este caderno, você termina seus estudos dos módulos do GESTAR II. Mas esperamos que não terminem seus contatos com eles, e desejamos longa convivência entre você e este material.

Os autores.

PARTE I

TEORIA E PRÁTICA 6

- Unidade 21
- Unidade 22
- Unidade 23
- Unidade 24

GESTAR TP6

Introdução

Caro Professor, cara Professora,

Os conteúdos envolvidos nas unidades deste caderno relacionam-se, principalmente, à álgebra, geometria, e a coordenadas cartesianas no plano, que fazem a articulação entre ambas, podendo ser consideradas uma *algebrização do plano*.

Os contextos que geram esses conceitos são relacionados ao homem e à sua vida em sociedade: alimentação, saúde, migrações, fenômenos sociais cotidianos.

Na Unidade 21, a ênfase é dada a analogias entre frações numéricas e algébricas. Com relação a cada uma delas, a soma e a subtração podem ser realizadas usando-se o produto dos denominadores, que é um múltiplo comum. Desenvolve-se um cálculo literal análogo ao aritmético, e salienta-se sua importância simplificadora na resolução de situações-problema envolvendo, entre outros, problemas curiosos sobre herança e a visão da Terra a partir de naves espaciais.

Na Unidade 22, o tema Migrações gera estudos sobre localização, deslocamentos, sistemas de coordenadas, revendo ainda reflexões e translações no plano, ampliações e o teorema de Pitágoras. Os temas propiciam grande articulação entre conhecimentos geométricos e algébricos.

A Unidade 23 retoma a Álgebra, no tema resolução de sistemas lineares, imerso no contexto de alimentação e saúde. Além das soluções, os sistemas são discutidos e representados graficamente. Faz-se uma abordagem da resolução de sistemas de três equações com três incógnitas, relacionando-o à solução de sistemas de duas equações a duas incógnitas, e abrindo uma perspectiva para a solução de sistemas com maior número de equações e incógnitas. Introduz-se também o tema inequações.

A Unidade 24 trata basicamente das relações de proporcionalidade e da função linear, associadas a inúmeros fenômenos sociais cotidianos. De fato, esse tipo de relação tem um presença marcante no dia-a-dia, interferindo, por exemplo, em custos, deslocamentos, construções.

Como nos demais cadernos, as unidades terminam com Textos de Referência, que aprofundam os seus conhecimentos sobre Educação Matemática e dão fundamentos para sua prática pedagógica.

São os seguintes:

- O sentido do símbolo. Atribuindo um sentido informal à Matemática formal.
- Explorando a geometria da orientação e do deslocamento.
- Algumas concepções sobre ensino-aprendizagem da matemática.
- Matemática, Linguagem e Comunicação.

Com este caderno, você termina seus estudos dos módulos do GESTAR II. Mas esperamos que não terminem seus contatos com eles, e desejamos longa convivência entre você e este material.

Unidade 21

A Álgebra como ferramenta humana
Frações e Frações Algébricas

Nilza Eigenheer Bertoni

Iniciando nossa conversa

A Álgebra tem sido um tormento para os alunos da 7ª série. Monômios, polinômios, frações algébricas, equações, sistemas de equações, modos de encontrar as soluções: tudo introduzido cumulativamente, sem contexto e sem que o aluno perceba para que serve. Além disso, as frações, cujos cálculos articulam-se com os cálculos algébricos, têm sido um tema pouco entendido até o final das séries iniciais e permanece sem entendimento nos anos escolares seguintes.

Nessas condições, não é de se admirar que os alunos adquiram aversão à Álgebra, a qual costumam chamar de sopa de *letrinhas*. Nos cadernos do GESTAR, o tratamento dado ao assunto tem sido diferente. Na Unidade 2 do Caderno de Teoria e Prática 1, você aprendeu sobre equações e os vários modos de resolvê-las, introduzidas em um contexto de alimentação saudável, com ênfase na ingestão adequada de ferro. Pôde também conhecer um pequeno histórico da Álgebra e reviu a resolução de equações com um valor desconhecido ou uma incógnita representada por uma letra. Eram equações do tipo $3x - 1 = 5$. Como a incógnita x tem expoente 1, essas equações são chamadas de equações do 1º grau. Muitos problemas da vida cotidiana podem ser resolvidos com esse tipo de equação.

Na Unidade 19, você teve contato com a equação do 2º grau, assim chamada porque a incógnita x aparece com expoente 2; e viu vários problemas do contexto físico-social que podem ser resolvidos com uma equação desse tipo.

Na presente Unidade, você aprofundará o seu entendimento sobre frações algébricas, que são quocientes de dois polinômios. Vamos explorar analogias dessas frações com as frações numéricas. Com isso, vários modos algébricos de proceder, ou *regras da álgebra*, ficam mais compreensíveis. Equações que, na forma simplificada, envolvem uma fração algébrica são chamadas de equações fracionárias. Nelas, pelo menos uma incógnita aparece em um ou mais denominadores. Não são equações de 1º nem de 2º graus.

Fazendo analogias com conhecimentos prévios e introduzindo os novos conceitos dentro de uma situação que os torne úteis e necessários, o conhecimento fica mais significativo para os alunos, gerando maior participação, envolvimento e raciocínio da parte deles.

Como nas Unidades anteriores, esta também será formada por três Seções.

Na Seção 1, você resolverá uma situação-problema envolvendo frações numéricas. Esperamos que você perceba que há muitos problemas envolvendo frações que não podem ser resolvidos apenas pela aplicação de regras de operação entre frações, mas que requerem raciocínio e interpretação do conceito de número fracionário e de suas representações.

Na Seção 2, você terá a oportunidade de rever e entender melhor as somas entre frações numéricas, relacionando-as com as somas entre frações algébricas. Verá usos do cálculo algébrico, que envolve letras (cálculo literal), incluindo casos em que certos valores repetem-se muitas vezes nos cálculos de certo problema, situação em que será mais prático usar letras para representar esses valores. Observará um exemplo disso em um problema envolvendo uma nave espacial. Este problema possibilitará também um contato com a multiplicação de frações algébricas e a simplificação de algum fator comum ao numerador e ao denominador.

Ao final da Seção, serão abordados *produtos notáveis*.

Na Seção 3, você encontrará idéias para a sua ação em sala de aula, incluindo: o método algébrico e o método da inversão na resolução de problemas algébricos; discussão sobre conceitos e procedimentos relacionados a frações, explorando-se esquemas, verbalizações e situações-problema adequadas; a introdução de representações de equações algébricas e de métodos para resolvê-las.

Além disso, serão feitas considerações sobre o trabalho em sala de aula, do ponto de vista da Educação Matemática, dando destaque à importância de se trabalhar, na introdução de um conceito, situações motivadoras que tornem o conceito útil e necessário; bem como à importância de se permitir que o aluno busque conhecimentos prévios e elabore hipóteses e soluções próprias na resolução de problemas.

Definindo o nosso percurso

Ao longo desta Unidade, esperamos que você possa:

1. Com relação aos seus conhecimentos matemáticos:

- Trabalhar sobre uma situação-problema envolvendo números racionais e frações polinomiais.
- Identificar o conceito de frações algébricas ou polinomiais.
- Identificar analogias entre as operações com frações numéricas e com frações algébricas.
- Comprovar a necessidade de recursos algébricos para resolver situações do mundo físico-social.

Esses conhecimentos serão desenvolvidos nas Seções 1 e 2.

2. Com relação aos seus conhecimentos sobre Educação Matemática:

- Discutir o papel das manipulações simbólicas na aprendizagem da Álgebra.
- Aprofundar a compreensão do símbolo algébrico, aprendendo a ler e a interpretar por meio desses símbolos.
- Identificar a importância de situações motivadoras, na introdução de um conceito que se torne útil e necessário, e a importância de se permitir que o aluno busque conhecimentos prévios e elabore hipóteses e soluções próprias na resolução de problemas.

Isso será desenvolvido no Texto de Referência e na Seção 3.

3. Com relação aos seus conhecimentos matemáticos:

- Conhecer e produzir situações para a exploração, junto aos alunos:
  - do método algébrico e do método da inversão na resolução de problemas aritméticos;
  - de interpretações das notações algébricas e os seus significados;
  - de novos conceitos que sejam motivadores para essa introdução, tornando o conceito útil e necessário;
  - da capacidade de mobilização de conhecimentos antigos e de formulação de hipóteses para a busca de soluções próprias na resolução de problemas.

Esses objetivos serão tratados na Seção 3.

Seção 1

Resolução de Situação-Problema

Objetivo da seção

- Resolver uma situação-problema utilizando números racionais positivos em representação fracionária ou decimal.
- Evidenciar que o conhecimento de regras operatórias entre frações não é suficiente para a resolução de problemas relacionados.
- Evidenciar a relevância de uma boa compreensão do número fracionário na resolução de problemas relacionados.
- Evidenciar a relevância do raciocínio na resolução de situações-problema.

Integrando a matemática ao mundo real

A Álgebra ao longo dos tempos e no mundo atual

Nas civilizações antigas, problemas algébricos aparecem vinculados, de certa forma, à Aritmética e à Geometria. Segundo Aaboe (1984), entre os matemáticos babilônios, a Geometria aparece freqüentemente como disfarce para problemas essencialmente algébricos. Isto é, um problema geométrico é formulado com a finalidade explícita de calcular alguma quantidade numérica, seja comprimento, área ou volume. Entretanto, cada problema é resolvido por si, não ocorrendo generalizações.

Pensando na Álgebra como o conhecimento que possibilita a descoberta de quantidades desconhecidas a partir de outras conhecidas, vemos que tais problemas são encontrados em civilizações de povos antigos – egípcios, babilônios e chineses – mostrando a presença de uma Álgebra sem símbolos. Tropfke (1980) cita, entre outros, um problema de *regra de três* do Papirus Rhind: Com 3 1/2 *hekat*[1] *de farinha foram feitos 80 pães. Quanta farinha foi usada para cada pão? Quantos pães podem ser feitos com 1 hekat de farinha?* Hindus e árabes também trabalharam com tais regras vinculadas a problemas de produção e de juros. Em geral, os antigos trabalharam também com divisão proporcional, o que representava uma ligeira generalização em relação à *regra de três*. Esse autor menciona que os egípcios dominavam o problema complexo de dividir 700 pães entre quatro pessoas, segundo as relações 2/3, 1/2 , 1/3 e 1/4. Acrescenta que, na vida econômica da Idade Média, a *regra de três* desempenhava um papel importante no cálculo de preços, na troca de mercadorias, no cálculo de relações entre unidades de massa e peso, etc.

Outro método relacionado a resolver tarefas algébricas sem o uso de símbolos era o método da falsa posição. Um antigo texto babilônico traz a tarefa: *A largura de um retângulo é 3/4 do seu comprimento, a diagonal vale 40. Quanto vale o comprimento e quanto vale a largura?* O texto trazia a sugestão: *ponha o comprimento igual a 1 e a largura a 3/4*. Isso implicava, possivelmente, atribuir falsos valores ao comprimento e à largura. A diagonal seria obtida como 1,15 (por Pitágoras), correspondente ao comprimento 1; mas, sendo 40 a diagonal real, seria calculado um novo valor para o comprimento correspondente.

Os povos antigos sabiam resolver vários tipos de equações surgidas de variados contextos. As escritas antigas de alguns problemas e de suas soluções, quando traduzidas para a linguagem algébrica moderna, transformam-se *em expressões extremamente complicadas, com parênteses encaixados, e não se pode deixar de ficar impressionado com a habilidade dos babilônios, que conseguiam reduzir tais expressões a formas padrões de equações, sem o auxílio de nossas técnicas algébricas* (Aaboe, 1984, p. 38). Na Idade Média, predominou a Álgebra dos hindus e dos árabes, que fizeram grandes avanços no conhecimento algébrico, ligados à solução de problemas geométricos, econômicos ou outros, ainda sem o uso da linguagem matemática. Lentamente, apareceram representações e símbolos para os valores desconhecidos, por exemplo, com Diofante. Pode-se dizer que a Álgebra se desenvolveu por 34 séculos (18 antes de Cristo e 16 depois de Cristo) sem os símbolos e as manipulações que temos hoje, os quais foram surgindo gradativamente e consolidaram-se com Viète, que estabeleceu novos fundamentos para a Álgebra no século XVI (reveja o que foi mencionado no Módulo 1, sobre Diofante e Viète).

Os últimos séculos viram o aparecimento da Álgebra Moderna e uma surpreendente articulação da Álgebra com a tecnologia – Álgebra e máquinas, Álgebra e computação.

Um ramo da Álgebra iniciado na antigüidade desenvolveu-se nos últimos séculos e tem várias aplicações na sociedade atual – a Álgebra Linear.

De fato, a teoria das matrizes e determinantes remonta ao século 2 a.C., com os babilônios, que resolviam problemas de produção agrícola vinculados ao que

1. Hekat é uma medida antiga dos egípcios.

chamamos hoje de sistemas de equações lineares. Os chineses, entre 200 e 100 a.C., chegaram mais próximos das matrizes do que os babilônios. Eles escreviam as equações lineares na forma de colunas, enquanto, na época atual, elas são representadas como linhas de uma matriz. Entretanto, somente no século 17 essas idéias reapareceram, e a teoria realmente se desenvolveu. Uma aplicação dessa teoria é a Programação Linear, que é largamente usada em indústrias e empresas e que leva em conta condições definidas para a produção de insumos e procura definir condições para a otimização do lucro.

Atualmente, a Álgebra, em suas mais variadas ramificações, permeia a sociedade moderna, resolvendo problemas do mundo físico e social. Ela está presente, entre outros, nos cálculos e nas previsões das empresas e indústrias, dos economistas, analistas políticos, órgãos do governo, etc.

Situação-problema

Adaptado do livro O Jeito Matemático de Pensar, de Renato J.C. Valladares, baseado em problema original do livro O Homem que Calculava, de Júlio César de Mello e Souza (Malba Tahan).

A estória a seguir mostra uma situação-problema e uma solução encontrada para esta, a qual não é muito clara e parece conter um absurdo.

"Um viajante encontrou três irmãos que brigavam por não saberem dividir uma herança de 47 camelos. Segundo o testamento deixado pelo pai, 3/8 dos animais iriam para o filho mais velho, 5/16 para o filho do meio e 1/4 para o caçula.

Fazendo os cálculos, os filhos obtiveram:

3/8 de 47 = 3/8 x 47 = (3 x 47) /8 = 141/8 = 17,625

5/16 de 47 = 5/16 x 47 = (5 x 47)/16 = 235/16 = 14,6875

1/4 de 47 = 1/4 x 47 = (1 x 47)/4 = 11,75

O viajante, que era o Homem que Calculava, propôs uma solução. Para eliminar as partes fracionárias de camelos, que estavam impossibilitando a partilha, ele emprestaria aos irmãos o seu próprio camelo, com isto o número total passaria a ser 48, o que facilitaria bastante os cálculos, como se vê a seguir:

3/8 de 48 = 3/8 x 48 = (3 x 48)/8 = 144 /8 = 18

5/16 de 48 = 5/16 x 48 = (5 x 48)/16 = 240/16 = 15

1/4 de 48 = 1/4 x 48 = (1 x 48)/4 = 48/4 = 12

Os filhos perceberam que seriam até beneficiados, pois receberiam quantidades maiores. O viajante argumentou, por fim, que, desta forma, seriam distribuídos 18 + 15 + 12 = 45 camelos, sobrando, portanto, 3, 1 sendo aquele que ele havia emprestado para facilitar a partilha e que, naturalmente, lhe pertencia. Reivindicou ainda os outros 2, como pagamento pelo trabalho de fazer a partilha, e os irmãos aceitaram a proposta."

Tarefa para você: explique claramente a Matemática envolvida.

Seção 2

Construção do conhecimento matemático em ação: números racionais e frações polinomiais

Objetivo da seção

- Identificar o conceito de frações algébricas ou polinomiais.
- Identificar analogias entre as operações com frações numéricas e com frações algébricas.
- Comprovar a necessidade de recursos algébricos para resolver situações do mundo físico-social.
- Identificar produtos notáveis, sua relevância e o seu uso em Matemática.

Articulando conhecimentos

Voltando à situação-problema da Seção 1
Ao resolver a situação-problema da Seção 1, você deve ter calculado frações de 47 ou de 48, de vários modos. Queremos lembrar que isso pode ser feito usando multiplicações:

Para calcular 3/8 de 47, fazemos a seguinte multiplicação: 3/8 x 47.

Um outro modo muito comum de determinar o valor é calculando 1/8 de 47 e depois multiplicando o resultado por 3, assim:

1/8 de 47 = 47 ÷ 8 = 5,0875   3/8 de 47 = 3 x 5,875 = 17,625

Atividade 1

Pense em uma situação semelhante à da situação-problema apresentada, em que também há 47 camelos para três irmãos, sendo que as frações dos dois mais velhos serão 3/8 e 5/16, mas com o caçula recebendo 7/24 de 47. Propondo emprestar um camelo para facilitar a partilha e receber os camelos que sobrarem como pagamento, resolva a situação e responda:

a) Quanto cada irmão deveria receber sem o empréstimo de mais um camelo e após o empréstimo?
b) Quantos camelos sobraram, além dos devolvidos?
c) Explique matematicamente o que ocorreu.

Considere o problema:

Também no livro de Renato Valladares (mas não no de Malba Tahan), encontramos o seguinte problema, de uma história antiga, mas que ainda intriga muita gente.

Três pessoas almoçaram em um restaurante, e cada uma entregou ao garçom R$ 10,00, perfazendo um total de R$ 30,00 para pagar a conta. O garçom entregou o dinheiro ao caixa, que devolveu R$ 5,00, pois a conta era de R$ 25,00. Como os clientes não sabiam que o custo era de R$ 25,00, o garçom resolveu enganá-los. Embolsou R$ 2,00 e entregou R$ 1,00 de troco a cada cliente.

Desta forma, cada cliente pagou R$ 9,00, em um total de (3 x 9 =) R$ 27,00, que somados aos R$ 2,00 que ficaram com o garçom resultam em um total de R$ 29,00.

Já que a quantia entregue foi de R$ 30,00, como explicar o misterioso sumiço de R$ 1,00?

Atividade 2

Explique matematicamente o que ocorreu no problema exposto.

Voltando ao problema dos camelos

Você resolveu o problema inicial dos camelos?

Vamos procurar entendê-lo de vários modos. Pode ser que você tenha pensado em um desses modos, e também pode ser que você tenha pensado de outra maneira diferente. Na Matemática, há sempre vários caminhos para a solução de um problema.

Inicialmente, é importante verificar se a soma das frações herdadas corresponde a uma unidade. Por exemplo, pode-se dividir uma herança em três partes dando 1/4 a cada um dos dois herdeiros e 1/2 a outro. Nesse caso, como a soma das frações é igual a um, toda a herança será dividida. Se quisermos dar 1/3 a cada um dos dois primeiros e 1/2 ao terceiro, a partilha é impossível, pois a soma das frações é maior do que um inteiro. Se a soma das frações for menor do que um, a partilha deixa uma sobra nos bens, não especificando que destino dar a essa sobra. Na Atividade 1, temos:

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{16} + \frac{1}{4} = \frac{3 \times 2}{16} + \frac{5 \times 1}{16} + \frac{1 \times 4}{16} = \frac{6 + 5 + 4}{16} = \frac{15}{16}$$

Neste caso, após a partilha ainda sobra 1/16 dos bens deixados. Isto corresponde a 47 ÷ 16 = 2,9375 camelos. Após o empréstimo de mais um camelo para facilitar a partilha, a sobra passa a ser 1/16 de 48, ou 48 ÷ 16 = 3 camelos, como mostrado no problema.

Na situação original, em que os herdeiros recebiam respectivamente 17, 14 e 11 camelos, isso perfazia um total de 42 camelos. Como explicar os 5 camelos que faltam, já que eram 47? Na verdade, cada herdeiro recebeu apenas a parte inteira da fração e deixou de receber uma parte decimal de um camelo. No total, deixaram de receber: 0,625 + 0,6875 + 0,75 = 2,0625 camelos. Sobrava também 1/16 de 47 = 0,0625 de 47, igual a 2,9375 camelos, correspondente à fração que não havia sido destinada a ninguém.

Somando, vemos que sobravam 2,0625 + 2,9375 = 5 camelos.

Com a adição de mais um camelo, cada um passa a receber 18, 15 e 12, chegando-se a um total de 45, e sobram 3, o que confirma a afirmação do problema.

O mesmo raciocínio pode ser feito pensando no que sobra em termos de frações. Temos que o primeiro recebe 3/8 de 47. Calculamos, primeiramente, 1/8 de 47:

$$\begin{array}{r|l} 47 & 8 \\ \cline{2-2} 7 & 5 \end{array}$$

e portanto podemos escrever 1/8 de 47 = 47 ÷ 8 = $\frac{57}{8}$. Logo, 3/8 de 47 = 3 x $\frac{57}{8}$ =

$$= 3 \times \left(5 + \frac{7}{8}\right) = 15 + \frac{21}{8} = 15 + \frac{25}{8} = \frac{175}{8}.$$

Do mesmo modo, 5/16 de 47 = $\frac{1411}{16}$ e $\frac{1}{4}$ de 47 = $\frac{113}{4}$.

Como cada um recebeu 17, 14 e 11, não foram recebidas as partes fracionárias

$$\frac{5}{8} + \frac{11}{16} + \frac{3}{4} = \frac{33}{16} = \frac{21}{16}.$$

Sobra também $\frac{1}{16}$ de 47 = $\frac{47}{16}$.

Somando: $\frac{33}{16} + \frac{47}{16} = \frac{80}{16}$ = 5 camelos.

Com a adição de mais um camelo, cada um passa a receber 18, 15 e 12, em um total de 45, e sobram 3, o que confirma a afirmação do problema. Note que, em geral, ao lermos o problema, assumimos que a soma das frações dará o todo e não fazemos a verificação. Isso pode causar transtornos na explicação da situação.

Observe como, na Matemática, é necessário raciocinar, saber interpretar as operações e as representações numéricas. Apenas conhecer as regras das operações com decimais e com frações não é suficiente para resolver esse problema.

Atividade 3

Pense no procedimento que se usa para somar frações e, com as suas palavras, justifique-o logicamente.

Atividade 4

Multiplicando-se ou dividindo-se o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, obtém-se uma fração equivalente à inicial. Explique, com as suas palavras, a lógica deste procedimento.

Articulando conhecimentos

Vamos aproveitar e fundamentar o procedimento usado quando se somam frações. Consideradas abstratamente fora de um contexto que especifique em contrário, devem ser consideradas frações que se referem a um mesmo inteiro.

Em primeiro lugar, o nosso interesse está em obter frações do mesmo tipo, ou seja, com o mesmo denominador. Podemos ter várias quantidades, mas, se todas forem formadas por pedaços do mesmo tamanho, bastará que se conte quantos pedaços temos ao todo e para isso somaremos os numeradores, os quais indicam a quantidade de pedaços de cada uma das frações.

Há inúmeras maneiras de escrever as frações dadas na forma de frações equivalentes a cada uma delas, todas com o mesmo denominador. Você deve ter aprendido que esse denominador deverá ser o mínimo múltiplo comum dos denominadores, mas, na verdade, qualquer múltiplo comum serve.

O que está em jogo é que, para escrever cada fração como outra equivalente, você deverá multiplicar ou dividir ambos os termos da fração por um mesmo número (veja a justificativa desse procedimento no próximo quadro). Escolhendo um múltiplo do denominador, sabemos que haverá um número pelo qual o denominador deverá ser multiplicado para se obter o tal múltiplo. Basta então multiplicar o numerador por esse mesmo número para que se assegure a equivalência das frações.

Veja o processo, com diferentes múltiplos escolhidos:

$$\frac{3}{8} \rightarrow \frac{?}{16} \qquad\qquad \frac{3}{8} \rightarrow \frac{?}{32}$$

No primeiro caso, escolhemos 16 como múltiplo do denominador, e 8 foi multiplicado por 2 para se obter 16, logo, 3 deve ser multiplicado pelo mesmo número, para que a fração obtida seja equivalente à primeira. No segundo caso, os dois termos serão multiplicados por 4:

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 2}{8 \times 2} = \frac{6}{16} \qquad\qquad \frac{3}{8} = \frac{3 \times 4}{8 \times 4} = \frac{12}{32}$$

Você já havia reparado que o denominador comum não precisa ser necessariamente um múltiplo de todos os denominadores? Veja:

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{16} + \frac{1}{4} = \frac{3 \times 1}{8} + \frac{5 \div 2}{8} + \frac{1 \times 2}{8} = \frac{3 + 2{,}5 + 2}{8} = \frac{7{,}5}{8}$$

Usamos o 8 como novo denominador, que não é um múltiplo comum dos anteriores. Na fração 5/16, o denominador foi dividido por 2, para se obter o 8. Também o numerador 5 deverá ser dividido por 2. O resultado final obtido equivale ao resultado 15/16, obtido quando se escolhe 16 como múltiplo do denominador (*observe que (7,5)/8 não está na forma de um número racional, que é a/b, com a e b inteiros e b ≠ 0. Entretanto, esse número pode ser escrito como 75/80 e então podemos reconhecê-lo como um número racional*). Notamos que existem infinitas possibilidades de novos denominadores, cada um múltiplo dos anteriores, adequados para produzir equivalências entre as frações, e o mínimo múltiplo comum é apenas uma das múltiplas possibilidades.Outro fato que deve ser notado é que podemos tomar como novo denominador o produto dos denominadores. Se os denominadores são primos entre si, esse produto coincide com o mínimo múltiplo comum. É melhor apenas indicar o produto, sem efetuá-lo, para evitar excesso de cálculos. Observe, com denominadores 5, 7 e 2 (primos entre si):

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \frac{1}{2} = \frac{3 \times 7 \times 2}{5 \times 7 \times 2} + \frac{1 \times 5 \times 7}{5 \times 7 \times 2} = \frac{42 + 40 + 35}{5 \times 7 \times 2} = \frac{117}{70}$$

Cada numerador é multiplicado pelos fatores que não comparecem no denominador correspondente.

Um desafio sobre a soma de frações

Gestarlino, jogador de basquete, fez no treino duas sessões de 10 lances ao cesto, cada uma. Na primeira, acertou 5 dos 10 lances; e, na segunda, acertou 7 dos 10 lances. Assim, podemos dizer que Gestarlino acertou 12 em 20 lances. Aparentemente, podemos concluir que 5/10 + 7/10 = 12/20. Como você indica e explica o erro havido?

Articulando conhecimentos

Por que multiplicar ou dividir ambos os termos de uma fração por um mesmo número produz uma fração equivalente?

Se estou trabalhando com metades, e quero trabalhar com sextos, tenho que dividir cada metade em três partes iguais. Ficarei com mais partes, porém menores.

Para cada metade que eu tinha, obtenho três sextos. Observe:

$$\frac{1}{2} = \frac{?}{6}$$

x 3

Multiplicar o denominador por 3 reduz o tamanho da fração à terça parte do que era.

x 3

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

Multiplicar o numerador por 3 aumenta em 3 vezes a quantidade de partes que se pega.

Reduzir o tamanho das partes, e depois tomar mais partes para compensar, acaba fazendo com que fiquemos com a mesma quantidade inicial.

De um modo geral, multiplicar o denominador por n reduz em n vezes o tamanho de cada pedaço; e multiplicar o numerador por n faz com que o pedaço seja n vezes maior.

Frações algébricas ou polinomiais

Expressões algébricas que representam o quociente de dois polinômios são chamadas de frações algébricas ou polinomiais.

O modo de soma dessas expressões tem analogia com o modo de soma das frações.

Podemos considerar o produto de todos os denominadores e multiplicar cada numerador pelos fatores que não comparecem no denominador correspondente. Por exemplo:

$$\frac{2x}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{2x\,(x+1)}{(x-1)\,(x+1)} + \frac{3\,(x-1)}{(x-1)\,(x+1)} = \frac{2x\,(x+1) + 3(x-1)}{(x-1)\,(x+1)}$$

Observe que tomamos o produto dos denominadores como um múltiplo comum de ambos.

Cuidado!

Em uma fração numérica, apenas fatores comuns ao numerador e ao denominador podem ser eliminados (dividindo-se ambos por esse fator). O mesmo ocorre no caso das frações algébricas. Embora $x + 1$ e $x - 1$ apareçam no numerador, nenhum deles é <u>fator</u> do numerador. O numerador não pode ser escrito como um produto com um dos fatores igual a $x + 1$ ou a $x - 1$, logo, nenhum desses fatores pode ser simplificado.

Os polinômios e as frações algébricas aparecem naturalmente em Matemática quando são introduzidas variáveis ou incógnitas.

Também se usa o cálculo algébrico com letras (cálculo literal) quando certos valores entram em muitos cálculos de determinado problema. Neste caso, é mais prático o uso de letras para representar esses valores e, após realizar todos os cálculos e simplificações, com a obtenção de uma expressão mais simples como solução do problema, as letras serão substituídas pelos respectivos valores.

Um exemplo disso é o problema a seguir, que articula Geometria e Álgebra.

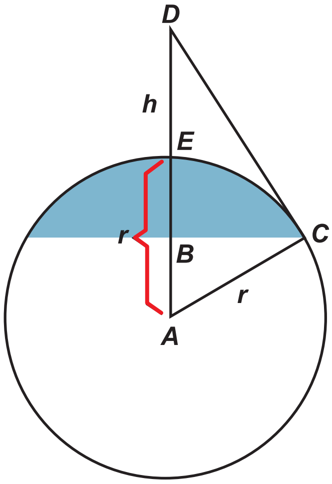
Conhecendo-se a altura alcançada pela nave espacial Gemini 11, procura-se saber se, dessa altura, a metade da Terra voltada para a nave foi inteiramente vista pelos astronautas ou se apenas parte dela ficou visível. Na solução aparecem os valores h, que foi a altura alcançada pela nave, e r, que é o raio da Terra.

Problema

A nave espacial Gemini 11, lançada em 1966, alcançou uma das mais altas órbitas verificadas até então, cerca de 850 milhas, aproximadamente 1368,5 km (aviões voam abaixo de 13 km de altura, logo ela atingiu uma altura 100 vezes maior).

A esta altura, que porcentagem da superfície da Terra ficou visível para os astronautas Conrad e Gordon?

Veja uma figura contendo a calota visível e o centro da Terra, o ponto de altitude máxima e alguns triângulos que aparecem naturalmente.



Para se saber a porcentagem visível da superfície da Terra, é preciso que se compare a superfície da calota visível com a superfície total da Terra.

Temos: área da superfície esférica = $4\pi\ r^2$.

Lembrete

Em uma esfera, a área do círculo máximo (que contém o diâmetro) é igual a $\pi\ r^2$, sendo r o raio da esfera. A área da superfície esférica total é o quádruplo dessa área: $S = 4\pi\ r^2$.

Área I da calota esférica de altura BE = 2π r (BE).

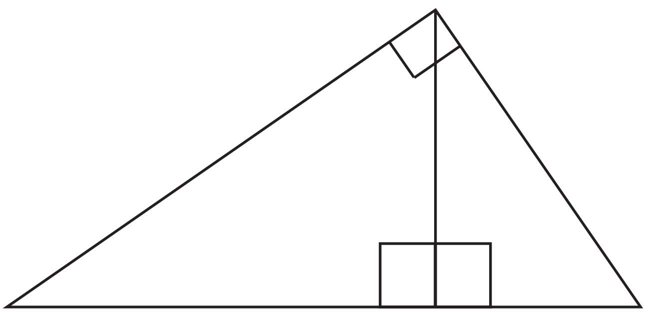
BE é uma distância difícil de ser determinada e seria bom se pudéssemos expressá-la em termos de h (altura da nave) e de r (raio da Terra), que são distâncias conhecidas.

Para isso, vamos trabalhar com triângulos e figuras que envolvam r, h, BE.

O triângulo ACD é retângulo, visto que DC é tangente à superfície da Terra, sendo, portanto, perpendicular ao raio da Terra. BC é uma altura deste triângulo, relativa à hipotenusa. Nesta situação, temos uma semelhança de três triângulos muito conhecida e usada em Matemática. Veja a seguir.

Articulando conhecimentos

A altura relativa à hipotenusa e três triângulos semelhantes especiais



Descubra que, no triângulo grande e nos dois pequenos (todos triângulos retângulos), os três ângulos de cada um são congruentes aos três ângulos dos outros (use o fato de que ângulos nos quais os lados de um são perpendiculares aos lados do outro são ângulos congruentes). Por terem três ângulos congruentes, os três triângulos são semelhantes.

Voltando à figura do problema, vamos usar a semelhança do triângulo maior ACD com o triângulo menor ACB e vamos escrever a proporcionalidade entre os catetos menores e as hipotenusas:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}. \qquad \text{Portanto} \qquad AB = \frac{(AC)^2}{AD} \qquad \text{ou} \qquad AB = \frac{r^2}{r+h}$$

Usando esse valor de AB, podemos expressar BE em termos de r e de h:

$$\begin{aligned} BE &= r - AB \\ &= r - \frac{r^2}{r+h} = \frac{r^2 + rh - r^2}{r+h} = \frac{rh}{r+h} \end{aligned}$$

Chamando de A_z a área da superfície visível da Terra, temos:

$$A_z = 2\pi\, r\, (BE) = 2\pi\, r\, (BE)\ \left(\frac{rh}{r+h}\right)$$

A razão entre essa área e a superfície total da Terra é:

$$\frac{A_z}{S} = \frac{2\pi\, r}{4\pi\, r^2}\ \frac{rh}{r+h} = \frac{rh}{2\,(r+h)}$$

Podemos usar as medidas em milhas ou quilômetros, pois o quociente será um número puro. Tomando h como 850 milhas e r como 4000 milhas, temos:

$$\frac{A_z}{S} = \frac{850}{2\,(4000+850)} = \frac{85}{970} = 0{,}088 = \frac{88}{1000} = \frac{8{,}8}{100}$$

Os astronautas podem ver, portanto, 8,8% da superfície da Terra.

Embora não influam na resposta do problema, podemos calcular a altura atingida e o raio da Terra em km. Sabendo que 1 milha $\cong$ 1,61km, temos:

h = 1368,5 km

r $\cong$ 6440 km

Poderíamos ter resolvido o problema substituindo, desde o início, h e r pelos seus valores em milhas ou quilômetros.

Como os números são grandes, precisaríamos de uma calculadora e de muita atenção nos cálculos.

Em vez disso, optamos por conservar as letras e efetuar um cálculo literal que nos esclareceu sobre cálculos com frações algébricas.

Reflita sobre alguns esquemas desses cálculos:

1) $r - \dfrac{r^2}{r + h}$ foi calculado como uma soma de frações.

Podemos calcular, como já foi comentado, fazendo o produto dos denominadores:

$$r - \frac{r^2}{r + h} = \frac{r(r + h) - r^2}{r + h} = \frac{rh}{r + h}$$

2) Em $\dfrac{A_z}{S}$ fizemos o quociente de $2\pi\, r\,(\dfrac{r^h}{r + h})$ por $4\pi\, r^2$ usando o lembrete a seguir:

Lembrete

Para dividir um produto por um número, basta dividir um dos fatores por esse mesmo número. Assim, para a divisão dos produtos 6 x 3 ou $6 \times \dfrac{3}{4}$ por 2, podemos fazer:

$$\frac{6 \times 3}{2} = \frac{6}{2} \times 3 \text{ ou ainda } \frac{6 \times 3/4}{2} = \frac{6}{2} \times \frac{3}{4}.$$

Por isso, escrevemos:

$$\frac{A_z}{S} = \frac{2\pi\, r}{4\pi\, r^2}\left(\frac{rh}{r + h}\right) = \frac{2\pi\, r^2}{4\pi\, r^2}\ \frac{h}{(r + h)} = \frac{h}{2\,(r + h)}$$

Os demais cálculos foram somas, subtrações e produtos de termos simples.

Produtos notáveis – o que são e para que servem?

Produtos de uma soma ou diferença (numérica ou literal) por si mesma ou de uma soma por uma diferença, bem como outros, aparecem com freqüência em problemas matemáticos. Os resultados seguem uma forma padrão aos considerados produtos especiais, ou notáveis.

Como exemplos, temos:

(100 + 2)(100 +2)

(50 – 3)(50 – 3)

(100 + 2)(100 – 2)

(3 + h)(3 + h)

(m – n)(m – n)

(b + c)(b – c)

Mais do que ensinar as fórmulas dos produtos notáveis ou justificar sua validade e depois dar aos alunos uma extensa lista de exercícios para aplicação, é importante o uso mental desses resultados em uma série de situações em que o uso deles seja prático e útil.

O cálculo mental será mais fácil se apoiado na verbalização do resultado. Deste modo, evita-se que seja necessária a reprodução mental da fórmula escrita para o cálculo do resultado.

No caso do quadrado da soma, é uma verbalização útil a do resultado sendo obtido com:

- o quadrado do primeiro somado ao quadrado do segundo;
- o produto dos dois, duplicado;
- a soma desses dois resultados.

Assim, para calcular 13^2, pensamos em $(10 + 3)^2$ e calculamos:

- 100 + 9 = 109 (soma dos quadrados de ambos);
- 10 x 3 = 30, dobrado o resultado será 60 (o produto dos dois, duplicado);
- a soma é 169.

No caso de $26^2 = (20 + 6)^2$, pensamos:

- 400 + 36 = 436;
- 20 x 6 = 120, dobrado dá 240;
- a soma pode ser feita em duas etapas: 436 + 200 = 636; 636 + 40 = 676.

Quadrados menos simples também podem ser calculados:

$1000,1^2 = (1000 + 0,1)^2$

- 1.000.000 + 0,01 = 1.000.000,01;
- 1.000 x 0,1 = 100 (pensar em 1 décimo de 1.000) , dobrado dá 200;
- A soma das parcelas é igual a 1.000.200,01.

Outro uso freqüente que se faz desses resultados, em cálculos escritos, é no sentido inverso, pelo reconhecimento de três parcelas que podem ser identificadas como o quadrado de uma soma. Duas das parcelas devem ser quadrados de números ou expressões, e a terceira parcela deve ser o produto duplicado desses números ou expressões.

Atividade 5

Usando produtos notáveis, e apoiando-se no cálculo oral, calcule:

a) 999^2

b) 1012^2

c) $99,9^2$

d) Sabendo-se que a diferença entre dois números é 1,1 e que a sua soma é 3,9, que outra relação se pode ter sobre esses números?

No problema a seguir, adaptado da revista Educação e Matemática nº 71, faremos uso desse procedimento, o que facilitará os cálculos algébricos.

Problema

Duas crianças que gostavam de fazer operações numéricas contaram o número de lápis que cada uma tinha e calcularam a soma, a diferença, o produto e o quociente desses números, somando tudo ao final e obtendo 363. Depois, disseram o que tinham feito ao irmão mais velho de uma delas, desafiando-o a descobrir a quantidade de lápis de cada uma.

Sejam x e y as quantidades de lápis de cada criança.

Em princípio, temos apenas uma equação com duas incógnitas, o que admitiria infinitas soluções:

$$(x + y) + (x - y) + xy + \frac{x}{y} = 363$$

Em todo caso, vamos fazer as simplificações algébricas possíveis:

$$2x + xy + \frac{x}{y} = 363$$

ou

$$x\,(2 + y + \frac{1}{y}) = 363$$

Também podemos colocar 1/y em evidência. Isto equivale a trabalhar no primeiro membro, que é um produto de dois fatores, dividindo o primeiro fator por y e multiplicando o segundo fator por y:

$$\frac{x}{y}\,(2y + y^2 + 1) = 363$$

Repare que, dentro dos parênteses, temos três parcelas: duas sendo quadrados de y e de 1; e a terceira parcela correspondendo ao produto y x 1 dobrado.

Logo, a soma corresponde ao quadrado de y + 1:

$$\frac{x}{y}\,(y + 1)^2 = 363$$

No primeiro membro, temos uma fração algébrica (veja o Lembrete abaixo). O polinômio do denominador é y. A expressão toda é uma *equação algébrica* (veja o Lembrete a seguir), em duas incógnitas (x e y). Não há uma fórmula para resolver tal equação, mas nem tudo está perdido.

O primeiro membro está em uma forma algébrica bem simplificada. Uma idéia é investigar o segundo membro, o que pode ser feito, por exemplo, com a decomposição do número em fatores primos:

$$\frac{x}{y}\,(y + 1)^2 = 3 \times 11^2$$

O primeiro membro é um produto e um dos seus termos é uma expressão ao quadrado.

O segundo membro também é um produto de dois fatores, sendo um deles o quadrado de um número. É natural tentarmos a solução:

$$\frac{x}{y} = 3 \qquad (y + 1)^2 = 11^2, \text{ de onde teremos } x = 30 \text{ e } y = 10$$

Substituindo estes valores na equação inicial, veremos que estas soluções são também soluções da equação inicial.

Na conclusão, foi importante considerar a decomposição de 363 em dois fatores, que poderiam também ser 33.11.

Haveria outras possibilidades de igualar os fatores do primeiro e do segundo membros:

a) $\frac{x}{y} = 11 \qquad (y + 1)^2 = 3$

b) $\frac{x}{y} = 33 \qquad (y + 1)^2 = 11$

c) $\frac{x}{y} = 11 \qquad (y + 1)^2 = 33$

Ou ainda, considerando cada membro como um produto de três fatores, poderíamos ter:

d) $x = \frac{31}{y} = 11 \qquad (y + 1)^2 = 33$

e as demais combinações possíveis.

Fazendo uma análise dessas possibilidades, vemos que nenhuma é plausível. Em todas elas, y + 1 é raiz de um número natural que não tem uma raiz quadrada exata, logo será um número irracional (isto foi visto no TP4, Unidade 14: *a raiz de um número natural é outro número natural ou é um número irracional*).

Mas, se y + 1 é irracional, concluiremos que y é irracional, o que não é possível na situação considerada, em que y representa o número de lápis de uma criança.

Lembrete

Frações algébricas – Assim como frações numéricas podem ser consideradas como o quociente de dois números naturais (o divisor sendo diferente de zero), frações algébricas podem ser consideradas como o quociente de duas expressões algébricas, com a segunda sendo tomada apenas em pontos que não a anulam.

Equações algébricas – Assim como nas igualdades (numéricas) temos o equilíbrio ou a igualdade entre expressões numéricas, em equações temos uma igualdade ou equilíbrio de expressões algébricas, envolvendo números, incógnitas, parâmetros. Tanto igualdades quanto equações exigem o equilíbrio ou a igualdade dos dois membros.

Resumindo

Nesta Seção, você:

- Identificou a introdução à álgebra vinculada à solução de problemas, e não apenas como um conjunto de regras abstratas.
- Identificou o surgimento natural de polinômios e frações algébricas, quando são introduzidas variáveis ou incógnitas.
- Identificou o conceito de frações algébricas ou polinomiais
- Identificou analogias entre as operações com frações numéricas e com frações algébricas.
- Identificou o papel dos produtos notáveis na simplificação dos cálculos e em cálculos mentais.

Seção 3

Transposição Didática – Revendo os números fracionários e fazendo analogias algébricas

Objetivo da seção

- Desenvolver estratégias adequadas para os alunos ultrapassarem a falta de entendimento sobre os números fracionários.
- Explorar um novo paradigma para a compreensão dos números fracionários e das relações entre eles.
- Perceber invariantes presentes no conceito de números fracionários (análogos a esquemas a serem usados em frações algébricas).
- Explorar aplicações de números fracionários e, mais geralmente, de números racionais.

As avaliações locais e nacionais da aprendizagem têm apresentado como uma constante o mau rendimento em números fracionários, o que gera, entre outras coisas, dificuldades no trabalho com a álgebra. Em geral, os alunos aprendem frações associando-as a figuras geométricas divididas e pintadas e a um símbolo matemático constituído por dois números naturais separados por um traço horizontal. Depois aprendem a somar, subtrair, multiplicar e dividir esses símbolos. Geralmente, os alunos não chegam a perceber a idéia de número que está por trás desses símbolos. É comum fazerem uma associação pontual e localizada dos símbolos a partes pintadas de figuras, como algo estático e que vai se limitar àquela figura. Não estabelecem relações entre esses símbolos, ou entre os números que eles representam, a não ser por meio de regras.

Atividade 6

Resolva mentalmente as questões:

- quanto vale metade de $\frac{3}{5}$?
- quanto dá $2 - \frac{1}{4}$?

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de 1ª a 4ª séries, na área de Matemática, não mencionam o trabalho com operações entre números racionais positivos, expressos na forma fracionária. Ou seja, este conteúdo não é recomendado para ser trabalhado nessas séries. Desse modo, faz-se necessária, nas 5ª e 6ª séries, uma construção cuidadosa desses números e de suas operações, com significado e compreensão. Para alunos de 6ª e 7ª séries que não passaram por esse processo, faz-se necessário que o professor, sem parar de desenvolver a proposta curricular, encontre momentos de resgate para uma verdadeira compreensão desses números, das relações entre eles e de suas operações.

Esse resgate pode ser feito em meio a problemas de qualquer tipo, como geométricos, métricos ou algébricos, os quais envolvam frações. Podem e devem referir-se aos significados dos números fracionários, às relações e às operações entre eles. Há vários modos de se fazer esse resgate, à medida que as situações surgem, em problemas que podem ser aritméticos, algébricos, geométricos ou de tratamento da informação.

Exemplos desses modos são: destacar os invariantes associados à conceituação de número fracionário; usar a verbalização – não como mera repetição das regras usadas, mas como uma expressão verbal que introduza significados; explorar soluções alternativas de problemas, com apelo ao raciocínio sobre esses números.

Como exemplos, sugerimos:

Esquemas a serem destacados

1) Equivalências em ação.	Em inúmeras situações podemos dar maior significado à equivalência de frações, como em 1/4 de litro de leite, lembrando que em 1 litro há 4 quartos de litro, mais 1/4, são 5 quartos de litro de leite.
2) A fração como resultado da divisão de dois números naturais. Exemplo: 5 ÷ 4.	Pode-se pensar que dá 1 e 1/4 ou 5/4. Também pode-se pensar em dividir cada uma (das 5 coisas) em 4 partes. Da divisão de cada coisa vai 1/4 para cada parte. Logo, da divisão das 5 surgem 5/4 em cada parte.
3) Quanto mais dividir, menor fica.	$\frac{1}{9} < \frac{1}{6}$
4) Quanto mais partes forem tomadas, de pedaços do mesmo tamanho, mais se tem.	$\frac{9}{5} > \frac{6}{5}$
5) Multiplicar o denominador por n significa dividir o pedaço que se tem em n partes.	$\frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$ Cada terço ficou dividido por 2, gerando sextos.
6) Se, multiplicando o denominador por n, cada pedaço fica dividido por n, para não alterar a fração, é preciso pegar n vezes a quantidade de pedaços.	$\frac{1}{3} = \frac{2 \times 1}{2 \times 3} \rightarrow$ O terço fica reduzido à metade, surgindo sextos. É preciso pegar o dobro de pedaços (2 x 1) para se ter uma fração equivalente.
7) Comparando com a metade. Para ser equivalente a 1/2, uma fração deve ter o denominador igual ao dobro do numerador, ou seja, n/2n. Significa que o todo foi dividido em 2n partes e apenas n foram tomadas.	$\frac{5}{9}$ é maior do que a metade, pois $\frac{4,5}{9}$ é igual a $\frac{1}{2}$. (3) $\frac{1}{2}$ é menor do que $\frac{1}{2}$, pois $\frac{11,5}{23}$ é igual a 23.

Isso permite também decidir se uma fração é maior ou menor do que a metade. Analogamente, uma fração será equivalente a 1/4 se o denominador for o quádruplo do numerador.	$\frac{3}{4} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. $\frac{2}{6} < \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, logo $\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$. $\frac{3}{13}$ é menor do que $\frac{1}{4}$, pois $\frac{3{,}25}{13}$ é igual a $\frac{1}{4}$.
8) Comparando com o inteiro. Para ser equivalente a 1, uma fração deve ter o denominador igual ao numerador, ou seja, n/n. Significa que o todo foi dividido em n partes, e todas as n foram tomadas. É possível se comparar frações comparando cada uma com a unidade.	2 < 3. $\frac{9}{7} > \frac{12}{15}$, pois: $\frac{9}{7} > \frac{7}{7} = 1$ e $\frac{12}{15} < \frac{15}{15} = 1$. $\frac{8}{9} < \frac{5}{3}$, pois $\frac{8}{9} < 1$ e $\frac{5}{3} > 1$.
9) Comparando pelo complementar.	$\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$, com $\frac{2}{3}$, falta $\frac{1}{3}$ para formar a unidade. Com $\frac{3}{4}$, falta $\frac{1}{4}$ para formar a unidade. $\frac{1}{4}$ é menor do que $\frac{1}{3}$. Quando falta menos, o número é maior.

Verbalizações que dão maior significado

Em problemas onde surgem:	**Verbalizações possíveis:**
1) Símbolos fracionários, como $\frac{2}{3}$.	1) Então temos $\frac{2}{3}$, que é o dobro de $\frac{1}{3}$, ou $2 \times \frac{1}{3}$, ou "2 de $\frac{1}{3}$".

2) Somas de frações, como $\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$.	2) Quartos e sextos são pedaços diferentes da unidade. Temos que achar frações equivalentes a essas, mas que se refiram a pedaços do mesmo tipo, que são expressos com denominadores iguais. Pode-se fazer pelo m.m.c. ou então se pode tomar o produto dos denominadores, que é múltiplo dos dois, embora não seja o menor. Produto dos denominadores: 4 x 6 = 24. $\frac{1}{4} = \frac{1 \times 6}{4 \times 6} = \frac{6}{24}$ (multiplicando-se os dois termos por um mesmo número, a fração não se altera: multiplicar o denominador diminui os pedaços, multiplicar o numerador aumenta o número de pedaços). $\frac{5}{6} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{20}{24}$ $\frac{1}{4} + \frac{5}{6} = \frac{6}{24} + \frac{20}{24} = \frac{26}{24}$
3) Multiplicações do tipo $52 \times \frac{1}{20}$.	3) São 52 pedaços de $\frac{1}{20}$, que correspondem a $\frac{52}{20}$.
4) Multiplicações do tipo $\frac{51}{2} \times 120$.	4) São 5 x 120 mais meia vez 120, o que é igual a 660. $\frac{51}{2} \times 120 = (5 + \frac{1}{2}) \times 120 = 5 \times 120 + \frac{1}{2} \times 120 =$ 600 + 60 = 660.

Articulando conhecimentos

Qualquer operação entre números racionais tem como resultado um novo número racional. Entretanto, não é verdade que operações entre números irracionais conduzam sempre a um número irracional. Um exemplo trivial é que $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$. Do mesmo modo, $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \frac{4}{2} = 2$.

Soluções alternativas de problemas, com apelo ao raciocínio sobre esses números. Muitas das soluções provenientes dos alunos devem ser discutidas e socializadas.

1) 3 alunos comem igualmente uma pizza dividida em 4 quartos. Quanto cada um comerá?	1) Soluções por raciocínio: a) 1 quarto mais 1 terço de 1 quarto. b) 4 terços de $\frac{1}{4}$. c) 1 quarto mais 1 doze avos. d) 4 doze avos. e) 1 terço. Na solução b, cada quarto foi pensado e dividido em três partes, gerando 3 terços de $\frac{1}{4}$, que, somados a mais um terço de $\frac{1}{4}$, resultaram em 4 terços de $\frac{1}{4}$. Na solução e, o problema foi pensado globalmente: se 3 alunos comem igualmente uma pizza, cada um comerá $\frac{1}{3}$ da pizza, não importando como esteja dividida.
2) Pensar em uma maneira concreta de dividir 10 doces por 6 alunos.	2) a) Cada aluno ganha inicialmente 1 doce e sobram 4. Desses 4, tomo 3 e parto ao meio, dando metade a cada aluno. Sobra um doce, que divido em 6 partes, resulta em 1 sexto para cada um. Cada aluno recebe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$. b) Tomo cada um dos doces e divido em 6. Cada aluno recebe um sexto de cada um dos 10 doces, logo, cada um recebe 10 sextos do doce. Os alunos deverão verificar se as soluções são iguais. Além disso, devem dividir usando números decimais e usando regras de frações ($10 \div 6 = 10 \times \frac{1}{6}$) e verificar a equivalência das respostas.

Atividade 7

Explique diretamente como proceder para a obtenção dos seguintes resultados em operações com frações:

a) 10 doces ÷ 6 crianças = $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.

b)
$$
\begin{array}{r}
12\frac{1}{2} \\
\times\ 7 \\
\hline
84 + 3\frac{1}{2} \\
87\frac{1}{2}
\end{array}
$$

Atividade 8

Problema escrito no túmulo de Diofante

Diofante viveu no século III em Alexandria, cidade que fica no norte do Egito, mas que, naquele tempo, pertencia à Grécia.

Um fato interessante é a mensagem gravada em seu túmulo, a qual descreve a duração de períodos da sua vida, e que foi provavelmente escrita por Hipatia, uma matemática também de Alexandria.

Uma tradução livre dessa mensagem seria a seguinte:

"Aqui, esta tumba cobre Diofante. Admira o milagre!
Através da arte dos números a pedra nos ensina sua idade.
Deus destinou um sexto de sua vida a que fosse infante.
Um doze avos após, surgiu a barba sobre sua face.
E após isso um sétimo da existência transcorreu até que
contraísse matrimônio.
E mais cinco anos até que surgisse dessa união um filho,
que o destino levou, quando atingiu a metade dos anos que seu
pai viveria.
Após isso, quatro anos viveu com profundo pesar.
Quando então também ele chegou ao fim último terrestre."

Descubra com que idade Diofante morreu.

Observações sobre a Transposição Didática

Este problema é adequado para ser usado na introdução ao cálculo algébrico, por envolver uma soma de várias frações da quantidade desconhecida x com números naturais, que deverá ser igualada à quantidade total x.

Assim, chega-se a uma necessidade natural do uso da linguagem algébrica; a situação requerendo tanto a construção da equação quanto idéias do número fracionário.

Deve-se questionar os alunos sobre uma maneira de representar as relações mencionadas no problema, e, uma vez obtida a equação, questionar sobre como fazer esses cálculos, e deixar os alunos apresentarem as suas soluções. Elas mostrarão os diferentes esquemas usados pelos alunos, vários deles podendo levar ao resultado correto.

Introduzir conceitos (soma de frações algébricas), no âmbito de uma situação-problema, é um modo de tornar o conceito útil e significativo ao aluno. Ele deverá mobilizar conhecimentos anteriores (de frações e soma de frações) e formular hipóteses.

Esse modo é mais significativo e desafiante para o aluno do que as intermináveis regras do cálculo algébrico, introduzidas sem qualquer motivação ou explicação.

Para ampliar o conhecimento, o professor poderá escolher no livro didático três ou quatro exercícios de outras somas mais complexas. Os procedimentos que generalizam podem ser construídos oralmente, com a participação dos alunos.

Usando outros métodos

Ariabata foi um matemático hindu que viveu no século V (iniciado no primeiro dia de 401 e finalizado no último dia de 500). Ele trabalhou em muitos problemas algébricos, sem o simbolismo que usamos atualmente.

Entre os processos usados por ele para a solução de problemas (também utilizado freqüentemente por Baskara, que viveu no século XII), está o método da inversão.

Esse método é bastante intuitivo e consiste em seguir o caminho inverso do que se seguiu para chegar a um número.

Veja um exemplo. Você deve primeiro ler toda a coluna da esquerda, descendo, e depois ler a coluna da direita, subindo.

Pensei em um número

1) elevei ao quadrado	5) extraio a raiz quadrada	± 4
2) multipliquei por 3	4) divido por 3	16
3) subtraí 33	3) somo 33	48
4) dividi por 5	2) multiplico por 5	15
5) somei 5	1) tiro 5	3

O resultado foi igual a 8
Método da inversão intuitivo: inversão do caminho
Logo, o número em que pensei foi 4 ou -4.

Verificação do resultado:

Pensei em um número (± 4)

1) elevei ao quadrado	16	5) extraio a raiz quadrada	± 4
2) multipliquei por 3	48	4) divido por 3	16
3) subtraí 33	15	3) somo 33	48
4) dividi por 5	3	2) multiplico por 5	15
5) somei 5	8	1) tiro 5	3

O resultado foi igual a 8

Observe que, correspondendo-se cada operação com a sua inversa, cada resultado na coluna da direita corresponde ao número da linha superior na coluna da esquerda.

Muito tempo depois, nos séculos XVI e XVII, esse problema poderia ter sido resolvido, por esse mesmo método, com o auxílio da álgebra simbólica:

Número:	x		
1) elevei ao quadrado	x^2	5) extraio a raiz quadrada	$x = \pm 4$
2) multipliquei por 3	$3x^2$	4) divido por 3	$x^2 = 16$
3) subtraí 33	$3x^2 - 33$	3) somo 33	$3x^2 = 48$
4) dividi por 5	$\frac{3x^2 - 33}{5}$	2) multiplico por 5	$3x^2 - 33 = 15$
5) somei 5	$\frac{3x^2 - 33}{5} + 5$	1) tiro 5	$\frac{3x^2 - 33}{5} = 3$
O resultado foi 8	$\frac{3x^2 - 33}{5} + 5 = 8$		$\frac{3x^2 - 33}{5} + 5 = 8$

Solução algébrica

Atividade 9 (a ser proposta aos alunos)

Problema formulado por Ariabata:

Diga-me, formosa jovem de olhos radiantes, se você entende o método da inversão, qual é o número que multiplicado por 3, aumentado em 3/4 desse total, dividido por 7, diminuído por 1/3 do quociente, multiplicado por si mesmo, diminuído em 52, extraindo-se a raiz quadrada, somando 8 e dividindo por 10, dá 2 como resultado?

Faça os alunos perceberem como os problemas podiam ser expressos em linguagem poética, evidenciando não haver uma separação rígida entre ciências exatas e ciências humanas.

Desafie os alunos a descobrir o número, usando, como Ariabata sugeriu, o método da inversão, em qualquer das suas formas – intuitiva ou algébrica.

Comentários sobre a solução:

Operações diretas, feitas a partir de certo número		**Operações inversas (começar pela última linha)**	
1 - multiplicar por 3	84	9 - dividir por 3	28
2 - somar 3/4 do total	147	8 - diminuir 3/4 de uma quantidade que não conhecemos	84
3 - dividir por 7	21	7 - multiplicar por 7	147
4 - diminuir 1/3 do valor anterior	14	6 - aumentar 1/3 de um valor que não conhecemos	21
5 - multiplicar por si mesmo	196	5 - extrair a raiz quadrada	14
6 - diminuir 52	144	4 - aumentar 52	196
7 - extrair a raiz quadrada	12	3 - elevar ao quadrado	144
8 - somar 8	20	2 - diminuir 8	12
9 - dividir por 10	2	1 - multiplicar por 10	20
e obter 2.		2	

As cinco primeiras ações do caminho inverso são:

$2 \times 10 = 20$; $20 - 8 = 12$; $12^2 = 144$; $144 + 52 = 196$; $\sqrt{196} = 14$.

Na etapa 6, nada podemos fazer diretamente sobre o número 14.

Aparece aqui um obstáculo que permitirá um aprofundamento sobre números racionais.

Como já mencionado, o resultado 14, na etapa 5 da coluna da direita, é o mesmo que deve aparecer uma linha acima, na coluna da direita.

Olhando as quatro primeiras linhas da esquerda, vemos que um número inicial havia sido multiplicado por 3, somado a 3/4 do seu total, dividido por 7 e, do número obtido, havia sido subtraído 1/3 de seu valor.

Chamando de y o número obtido, teríamos $y - y/3 = 14$. Para resolver essa equação, fazemos a subtração, obtendo $2/3\ y = 14$, que nos dá $y = 3/2\ (14)$. Isto nos sugere que:

$y - y/3 = 14$ (diminuir 1/3 de certa quantidade)

é equivalente a

$2/3\ y = 14$ (calcular 2/3 dessa quantidade).

O passo direto – calcular 2/3 de certa quantidade – pode ser interpretado como *dividir a quantidade por 3 e multiplicar por 2*. O passo inverso é dividir por 2 e multiplicar por 3, ou seja, multiplicar por 3/2. Aplicando este procedimento ao 14, o resultado será 21. Preenchendo a tabela do caminho inverso:

Operações diretas, feitas a partir de certo número	**Operações inversas (começar pela última linha)**	
1 - multiplicar por 3	9 - dividir por	3
2 - somar 3/4 do total	8 - diminuir 3/4 de uma quantidade que não conhecemos	
3 - dividir por 7	7 - multiplicar por 7	147
4 - diminuir 1/3 do valor anterior	6 - calcular 3/2 do número	21
5 - multiplicar por si mesmo	5 - extrair a raiz quadrada	14
6 - diminuir 52	4 - aumentar 52	196
7 - extrair a raiz quadrada	3 - elevar ao quadrado	144
8 - somar 8	2 - diminuir 8	12
9 - dividir por 10	1 - multiplicar por 10	20
e obter 2.		2

O próximo passo é multiplicar por 7, obtendo-se 147 como resultado.

Na etapa 8, temos um problema análogo ao anterior. Uma idéia é substituir a expressão da coluna da direita "somar 3/4 do total" por "calcular 7/4 do total" (pois, se um total – 4/4 – é somado a 3/4, obtemos 7/4 deste total). Na coluna da operação inversa, deve aparecer "calcular 4/7 do número". Calculando 4/7 de 147, obtemos 84. Falta dividir por 3, o que resultará em 28.

Atividade 10

Verifique se o número 28 é realmente o resultado do problema proposto por Ariabata.

Resumindo

Nesta Seção, você encontrou idéias para a sua ação em sala de aula, como:

- Desenvolvimento de situações-problema com o tema:
  - Método algébrico e método da inversão na resolução de problemas algébricos.

- Idéias para trabalhar tópicos específicos, como:
  - Discussão sobre conceitos e procedimentos relacionados a frações, explorando-se esquemas, verbalizações e situações-problema adequadas.
  - Introdução de representações de equações algébricas.
  - Introdução de métodos para resolvê-las.

- Considerações sobre o trabalho em sala de aula, do ponto de vista de Educação Matemática:
  - Importância de se trabalhar, durante a introdução de um conceito, situações motivadoras que tornem o conceito útil e necessário.
  - Importância de se permitir ao aluno buscar conhecimentos prévios e elaborar hipóteses sobre como lidar com o novo conceito.

Leituras sugeridas

VALLADARES, R.J.C. *O jeito matemático de pensar*. p. 362 Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.

Bibliografia

Aaboe, A. *Episódios da História Antiga da Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

Bertoni, N.E. *Número fracionário: primórdios esclarecedores*. Coleção História da Matemática para Professores. Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2005.

Fremont, H. *Teaching Secondary Mathematics through applications*. 2ª ed. p. 342. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1979.

Valladares, R.J.C. *O jeito matemático de pensar*. p. 362. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.

Viana, J.P. *As quatro operações*. *Educação e Matemática*, nº 71. p. 39. Lisboa: Associação de professores de Matemática, 2003.

Tropfke, J. *Geschichte der Elementarmathematik*. Volume 1. Berlin, New York: de Gruyter, 1980.

Texto de referência

O sentido do símbolo
Atribuindo um sentido informal à Matemática formal

Adaptado do capítulo de mesmo nome do livro:
Álgebra, História, Representação de Abraham
Arcavi, Rio de Janeiro: Universidade Santa Úrsula

É amplamente difundido e aceito que a execução correta das operações aritméticas não deva ser o foco solitário do ensino/aprendizagem da aritmética. O conhecimento de "quando usar uma equação" e temas como "senso numérico" estão recebendo atualmente uma atenção crescente.

Senso numérico pode ser descrito como uma sensibilidade em relação aos números; uma compreensão profunda da sua natureza e da natureza das operações; uma necessidade de examinar a razoabilidade dos resultados; uma sensibilidade para os efeitos relativos das operações com números; uma sensibilidade para as ordens de magnitude e a liberdade de reinventar modos de operar com os números, diferentemente da repetição mecânica daquilo que está sendo ensinado e memorizado.

Existiria um paralelo com a Álgebra? Será que as manipulações simbólicas não têm sido a questão central no ensino da Álgebra ? A resposta parece ser afirmativa. Até mesmo aqueles estudantes que executam a manipulação das técnicas algébricas com êxito, freqüentemente não vêem a Álgebra como um instrumento para compreensão, expressão e comunicação de generalizações, um instrumento revelador das estruturas, do estabelecimento de conexões e da formulação de argumentações matemáticas. O ensino nem sempre oferece oportunidades para os estudantes não apenas memorizarem, mas também para "esquecerem" as leis e os detalhes e serem capazes de ver através deles, de modo a conseguirem pensar, abstrair, generalizar e planejar estratégias de solução. Portanto, parece razoável tentarmos desenvolver uma descrição de uma noção paralela àquela do "senso numérico" da aritmética: a idéia de "sentido do símbolo".

O que é sentido do símbolo? Uma Primeira Etapa

Existe muito pouco na literatura sobre «sentido do símbolo». Uma exceção surpreendente é Fey (1990)[2]. Ele lista um conjunto razoável de objetivos para ensinar esse sentido, incluindo:

"a habilidade de explorar, correr os olhos sobre uma expressão algébrica para fazer estimativas curtas dos padrões que emergirão em uma representação numérica ou gráfica..."

"a habilidade de fazer comparações conscientes das ordens de magnitude para funções com leis do tipo n, n^2, n^3, ..."

2. Fey, J. *Quantity*. In Steen, L.A. (Ed.) On the Shoulders of Giants, New Approaches to Numeracy. National Academy Press. Washington, D.C., pp. 61-94, 1990.

“a habilidade de explorar rapidamente uma tabela de valores de uma função ou um gráfico, de interpretar verbalmente condições expressas, de identificar a forma adequada de uma lei algébrica que expresse determinado padrão...”

“a habilidade de inspecionar operações algébricas e prever a forma do resultado ou, como na estimativa aritmética, de inspecionar o resultado e julgar a possibilidade de que a execução tenha sido correta...”

“a habilidade de determinar qual das várias formas equivalentes pode ser a mais apropriada para responder questões particulares...”

Neste artigo, tentaremos ampliar as situações anteriores, tanto quantitativa quanto qualitativamente. Não tentaremos definir “sentido do símbolo”, mas iremos nos concentrar na descrição e na discussão de comportamentos que ilustrem o que acreditamos ser exemplos de sentido do símbolo.

Propomos dispensar os riscos de má interpretação (seja pela supervalorização ou pela desconsideração) dos comentários dos estudantes. Apresentamos os exemplos como meras ilustrações de instâncias nas quais, sob o nosso ponto de vista, está presente uma sensibilidade simbólica.

Familiarizando-se com os símbolos

Defendemos que ter *sentido do símbolo* deve incluir uma sensibilidade intuitiva para quando forem usados os símbolos no processo de resolução de um problema e, inversamente, quando for abandonado um tratamento simbólico para usar instrumentos melhores.

Costumamos desenvolver uma aula em que apresentamos três ou mais quadrados mágicos a serem completados:

	3	
2		1

	2	
1		5

	4	
2		2

No primeiro, a soma dos elementos (de qualquer linha, coluna ou diagonal) deve ser 9; no segundo, deve ser 6; e no terceiro, 8.

Os alunos resolvem bem os dois primeiros quadrados (no segundo, os alunos perceberão a necessidade da utilização de números negativos). Entretanto, espantam-se ao não encontrar solução para o terceiro. Refazem contas, fazem discussões e conjecturas. Na maioria dos casos, é necessário um longo período de tempo antes que alguém timidamente sugira o uso da Álgebra, ou o professor precisa sugerir o seu uso (por exemplo, perguntando: “que instrumentos temos para verificar ou refutar as conjecturas?”).

Alunos que sabem manipular algebricamente, mas não percebem a relevância dos símbolos para revelar a estrutura do problema, não desenvolveram integralmente o *sentido do símbolo*, pois não os consideram disponíveis como instrumentos de atribuição de significado.

Uma evidência da falta de *sentido do símbolo* ocorre quando, no processo de resolução do problema algebricamente, alunos se mostram incapazes de reconhecer a solução, mesmo frente a ela.

Por exemplo, no processo de completar o quadrado mágico «geral», ocorreu de chegarmos ao seguinte estágio:

2 S - b - c		1 S - a - b
3 b + c - a	b	4
a		c

As casas 1 e 2 podem ser completadas pela observação da soma na diagonal, embora alguns estudantes possam querer introduzir uma nova variável. A casa 3 pode ser completada sem dificuldade, impondo-se que a soma da primeira coluna resulte em S. A casa 4 foi completada pela soma da terceira coluna, obtendo-se: a + b - c.

Alguém percebe que a soma da linha do meio é 3b e não contém S. Demora um pouco até que se perceba que, se desejamos que a soma seja S, devemos ter S = 3b.

Isso valia no primeiro quadrado (S = 9 e b = 3), valia também no segundo (S = 6 e b = 2), mas não valia no terceiro, em que S = 8 e b = 4. Desse modo, foi impossível completá-lo.

Perceber quando a introdução do símbolo é apropriada, como no exemplo acima, reconhecendo o significado da solução simbólica, está incluído no que chamamos de sentido do símbolo.

Do mesmo modo, perceber o momento de abandonar os símbolos, quando estivermos nos afogando em suas manipulações técnicas, faz parte desse sentido.

Por exemplo[3], o tratamento algébrico da inequação $|x-2| > |x-6|$ envolve um uso pesado de conectivos lógicos, muito trabalho técnico e uma alta probabilidade de se cometer erros. Entretanto, agir com sentido do símbolo implicaria "descobrir" significados: $|x - 2|$ é a distância de qualquer número x a 2, então, o que o problema quer é descobrir quais são os números cuja distância a 2 é maior do que a sua distância a

3. A solução de $1 - x = 1/2$, por manipulação algébrica, pode demandar algumas linhas. No entanto, se interpretarmos como "qual o valor de x que, subtraído de 1, dá 1/2?", veremos facilmente que tal valor é 1/2 (nota da autora deste caderno).

6. Uma simples consideração na reta numérica dá a solução do problema como x > 4. Nesse exemplo, o sentido do símbolo inclui a tendência de tentar outros modos de representação do problema, em abordagens mais elegantes e diretas.

Além das manipulações: lendo pelos símbolos

Embora o uso de manipulações padronizadas nos permitam, de certo modo, esquecer do que eles significam, Freudenthal[4] (1983) lembra que fontes de visualização podem ser bloqueadas por automatismos e que se pode dominar uma atividade tão bem que as questões do **como** e do **porquê** não são mais formuladas, nem compreendidas como significativas e relevantes.

Interromper um procedimento simbólico mecânico de modo a inspecioná-lo e reconectá-lo a seus significados poderia ser um bom "desbloqueio".

Ler em vez de manipular
A equação $3x + 5 = 4x$ pode ser resolvida pelos processos mecânicos usuais ou pode ser interpretada como: "o acréscimo de 5 unidades a $3x$ produziu $4x$, logo, 5 deve ser igual a x".

Interromper uma rotina quase automática e perceber uma relação simbólica, como neste caso, é uma instância pequena mas saudável de *sentido do símbolo*.

Ler e manipular
O ensino e a aprendizagem da Álgebra têm conduzido a um «instinto» para a manipulação técnica. É necessária uma certa maturidade para, ao se deparar com a equação

$\dfrac{2x + 3}{4x + 6} = 2$, "defender-se" desse instinto e tentar ler o significado contido nos símbolos.

Isto implica perceber que, como o numerador é metade do denominador, o primeiro membro não pode ser igual a 2 e, portanto, a equação não tem solução. É interessante notar que uma resolução automatizada conduz a $x = -3/2$, mas esse valor é inadmissível, por anular o denominador.

A leitura como objetivo da manipulação

Existem situações em que a leitura por meio de símbolos é essencial. Por exemplo, na questão: "o que você pode dizer sobre o número $n^3 - n$?". Uma investigação inicial, substituindo n por 1, 2, 3,..., sugere que $n^3 - n$ é sempre múltiplo de 3. Na tentativa de provar isso, uma manipulação algébrica pode levar a $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n + 1)(n - 1)$. Nesse momento, é preciso ler e interpretar o significado dos símbolos, percebendo que o segundo membro expressa o produto de três números consecutivos e que, portanto, um deles é múltiplo de 3.

4. Freudenthal, H. *The didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel, p. 469, 1983.

Expressões equivalentes para significados não-equivalentes

No problema: “o que se pode dizer sobre o quadrado de um número ímpar menos 1?” ou “o que se pode dizer sobre $(2n - 1)^2 - 1$?”, o desenvolvimento do quadrado pode levar à forma equivalente $4n^2 - 4n$, que nos sugere a conclusão de que tal número é múltiplo de 4. Entretanto, reorganizando os símbolos, podemos chegar a $4n^2 - 4n = 4n(n-1)$, que, lidos de modo adequado, nos mostram que n e n-1 são dois números naturais consecutivos, um deles sendo portanto par, o que mostra que o segundo membro é o produto de 4 por um número par, ou seja, é múltiplo de 8.

Esse exemplo mostra que manipulações algébricas devidamente lidas podem levar a significados mais ricos e emergentes de expressões equivalentes.

A escolha dos símbolos

Quando traduzimos uma situação em símbolos, é importante escolher o que e como representar. No último exemplo, foi importante representar um número ímpar por $2n – 1$. Se o representássemos apenas por a, não conseguiríamos concluir que se trata de um múltiplo de 8.

Habilidades flexíveis de manipulações algébricas

Mesmo a manipulação mecânica dos símbolos, se feita corretamente, consiste em muito mais do que uma obediência cega às regras. Alguns aspectos que devem ser levados em consideração são a circularidade potencial na manipulação simbólica, o ponto de vista “gestalt” de algumas expressões simbólicas e manipulações dirigidas na direção de alvos formais.

Circularidade

Por circularidade queremos nos referir ao processo de manipulação simbólica que resulta em uma identidade óbvia que é desinformativa e improdutiva. O *sentido do símbolo* pode prevenir a paralisia, isto é, pode desencadear uma resposta natural de procura por outras abordagens. Veja, por exemplo, a citação de Wenger[5] (1987), a seguir.

Gestalt

Ter um ponto de vista de “gestalt” é sentir os símbolos não apenas como uma concatenação de letras, mas ser capaz de discernir a sua forma. Wenger afirma que, se pudermos encontrar o caminho no intrincado dos símbolos, o problema está essencialmente resolvido. Por exemplo, na equação da incógnita v : $v\,u\sqrt{\ }= 1 + 2v\sqrt{(1+u)}$, o essencial é perceber que se trata de uma equação linear em v, da forma $av = b + cv$. Logo, a sua solução é da forma $v = b/(a-c)$, com $a \neq c$. A complicação das expressões representadas por a, b e c não altera a solução. Mesmo assim, ela oferece dificuldade aos alunos, os quais acabam obtendo equações ainda mais difíceis, perambulando em círculos e recriando equações já obtidas. A primeira parte – reconhecer a equação na forma $av = b + cv$ – refere-se à

5. Wenger, R.H. *Cognitive Science and Algebra Learning*. In Schoenfeld, A.H. (ed.) *Cognitive Science and Mathematics Education*. L. Erlbaum Associates, Inc. Hillsdale, NJ, pp. 217-251, 1987.

"gestalt"; a segunda parte refere-se à circularidade na qual os estudantes parecem escolher seu próximo movimento quase aleatoriamente, em vez de ter um propósito específico em mente ou ter alvos formais em mente. Isso significa que é necessário representar o problema em uma forma que seja de fácil manipulação e interpretação e escolher adequadamente as manipulações formais necessárias para a solução.

Símbolos em contexto

Um componente desejável do *sentido do símbolo* consiste no reconhecimento dos diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar na Álgebra. Esse reconhecimento implica a capacidade de selecionar, entre múltiplas possibilidades, significados que os símbolos podem ter, dependendo do contexto. Observe o problema abaixo.

Na expressão y = $(x^2 - 4)/ (d - 2)$, encontre, se possível, um número que, substituído em d, torne a expressão uma função linear.

O problema é resolvido diretamente, não importando os valores substituídos em d, desde que sejam diferentes de 2. Obtemos no denominador um número k, e a expressão y = $(x^2 - 4)/ k$ nunca se tornará uma função linear.

Entretanto, certo estudante decompôs $x^2 - 4$ em $(x - 2)(x + 2)$ e, fazendo x = d (com d + 2), cancelou e obteve a função linear y = $x + 2$.

Embora com uma visão de "gestalt" da expressão, ele pecou por não distingüir entre os diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar. O problema referia-se explicitamente a: encontrar um número para ser substituído em d.

O que é sentido do símbolo? Uma segunda rodada

Acompanhando as histórias anteriores, podemos dizer que o sentido do símbolo inclui:

- Uma compreensão e uma sensibilidade estética do poder dos símbolos : como e quando os símbolos podem e devem ser usados para exibirem relações, generalizações e provas que, de outro modo, estariam escondidas e invisíveis.
- Uma sensibilidade para quando forem utilizadas outras abordagens, de modo a progredir em um problema, encontrando uma solução mais fácil e mais elegante.
- Uma habilidade de manipulação e de leitura das expressões simbólicas como dois aspectos complementares na resolução de problemas algébricos. Por um lado, a desvinculação do significado articulada a uma visão de "gestalt" das expressões simbólicas torna o manuseio dos símbolos relativamente rápido e eficiente. Por outro lado, a leitura das expressões simbólicas buscando seus significados pode acrescentar níveis de conexões e de razoabilidade aos resultados.
- A consciência de que podemos satisfatoriamente construir relações simbólicas que expressam determinadas informações verbais ou gráficas necessárias ao progresso da resolução do problema, e a habilidade de construir tais expressões.
- A habilidade de selecionar uma representação simbólica possível para um problema e, se necessário, a coragem, primeiro, de reconhecer e assumir a nossa insatisfação

com aquela escolha e, segundo, estar aberto à procura de uma representação melhor para substituí-la.

- A percepção da necessidade constante de verificar os significados simbólicos enquanto resolvemos um problema e de comparar e confrontar estes significados com as nossas próprias intuições ou com os resultados esperados para aquele problema.
- A sensibilidade para os diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar em diferentes contextos.

Existem, contudo, duas importantes limitações da caracterização acima do *sentido do símbolo*: primeiramente, o "catálogo" apresentado está longe de ser exaustivo e, segundo, existe muito mais acerca desse sentido do que um catálogo possa conter, independentemente de quão completo ele possa ser.

Finalmente, sugerimos colocar a questão "o que é o *sentido do símbolo*?" no amplo contexto do pensamento e aprendizagem da Matemática. O *sentido do símbolo* é o componente algébrico de um tema mais amplo: a construção do senso matemático. A construção de significado na Matemática e com a Matemática parece ser o objetivo mais amplo para a maior parte, senão a totalidade, da Educação Matemática.

Implicações educativas

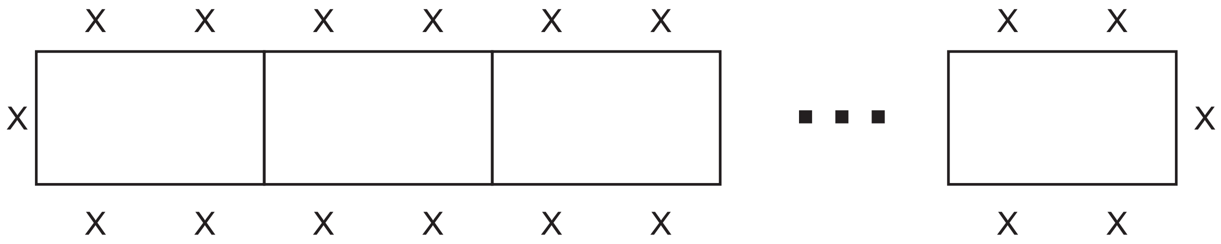
Algumas questões que se colocam a respeito do *sentido do símbolo*, são: Como as pessoas adquirem *sentido do símbolo*? Qual o conhecimento subjacente necessário? Qual o papel das manipulações técnicas do símbolo? O exercício de repetição e prática precede, é concomitante ou impede o desenvolvimento do *sentido do símbolo*? O *sentido do símbolo* é uma postura de especialistas ou pode ser esperada de novatos também e em que medida?

A seguir, sugerimos algumas implicações que podem ser derivadas a partir de nossas descrições.

(1) Começamos supondo que o sentido do símbolo está no âmago do que significa ser competente em Álgebra, e que o ensino da Álgebra deva ser gerido em sua direção. Resulta que as manipulações simbólicas devam ser ensinadas em contextos ricos que forneçam oportunidades de aprendizagem de quando e como usar essas manipulações.

(2) Não queremos dizer que o currículo tradicional deva ser dispensado completamente. Serão necessárias novas tarefas e novos problemas, mas será a atividade do estudante que determinará se ela suporta a construção do sentido do símbolo. E vice-versa, uma tarefa aparentemente tradicional pode ser uma fonte potencial de discussões repletas de *insights*.

(3) O simbolismo algébrico poderia ser introduzido desde o início em situações onde os estudantes possam apreciar o quão poderosos os símbolos podem ser em expressar generalizações e justificativas de fenômenos aritméticos. Ao exporem a estrutura, os símbolos algébricos não são introduzidos como entidades formais e sem significados, mas como modos poderosos de resolver e compreender problemas. O seguinte problema exemplifica esse tratamento:



No arranjo de n mesas acima apresentado, X indica uma cadeira para uma única pessoa, e as reticências indicam um número variável de mesas.

Quantas pessoas podem se sentar nesse arranjo?

Em tarefas dessa natureza, as manipulações estão a serviço da estrutura e dos significados.

(4) É importante a análise das soluções apresentadas para um problema. Em particular, a comparação entre abordagens alternativas é útil ao estabelecermos conexões entre a abordagem simbólica e outras abordagens.

(5) Os diálogos e as práticas em sala de aula devem legitimar e estimular as questões do tipo: "o que aconteceria se...?", em geral e, especialmente, relativas aos símbolos e seus papéis. Por exemplo: $y = mx + b$ é a expressão geral de uma função linear. Você pode dar algum significado à substituição de x e y, para obter, por exemplo, $2 = m.3 + b$?

Questões deste tipo podem auxiliar os estudantes a considerar os símbolos como entidades que podem ser o objeto de sua constante re-inspeção e não apenas entidades governadas por regras arbitrariamente impostas de cima para baixo.

Epílogo

"Uma vez lidei com um homem que tinha seu escritório em seu apartamento, no quarto andar de um prédio residencial. Ele tinha uma grande clientela, e o acesso ao seu apartamento era feito por uma porta dos fundos no andar térreo adjacente a um estacionamento. Esta porta normalmente estava fechada, e a maneira de subir ao escritório era a seguinte: após telefonar-lhe, pouco antes do encontro, o cliente parava o seu carro no estacionamento e tocava a buzina. O homem chegava, então, até a janela dos fundos e descia uma chave até o térreo numa longa corda. O cliente abria a porta com a chave, subia ao escritório e devolvia a chave. Este procedimento me parecia altamente excêntrico e misterioso. Um dia, perguntei-lhe: "Por que você simplesmente não instala um interfone elétrico, de modo que você possa apertar um botão para a porta abrir?" "Mas já existe um interfone elétrico na portaria", ele afirmou. "Santo Deus, por que você não o utiliza?" "Eu lhe conto. Há cerca de dez anos, minha esposa e eu nos divorciamos. Foi uma situação desagradável, e, por meses e meses após o divórcio, ela me cercava provocando problemas. Um dia eu decidi que quando alguém tocasse o interfone, eu ignoraria. Mas, é claro, eu tinha que achar um modo para os meus clientes me visitarem. Assim, chegamos a esse arranjo." "Mas ela ainda o cerca e provoca problemas?" "Não. Ela morreu há cinco anos!"

"Formalismo, no sentido em que eu ainda uso o termo, é a condição onde a ação se separou do significado integrado e tomou lugar insensatamente ao longo de alguma direção pré-estabelecida!"

“Ao longo dos tempos, os matemáticos têm lutado para restaurar o pensamento e o significado do ensino da Matemática, para fornecer alternativas para o modo formal e ritualístico de aprendizagem na maioria das salas de aula, mas, a despeito de novas teorias, novas aplicações, novos cursos e novos instrumentos, a batalha nunca é vencida. A guerra contra a ação formal e impensada é perpétua.”

(todas as citações do epílogo foram extraídas de Davis e Hersh[6], 1986).

6. Davis, P.J. e Hersh, R. *Descartes´Dream – The world according to Mathematics*. Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, San Diego, Boston, New York; pp. 283, 287, 289, 1986.

Solução das atividades

Solução das atividades

Atividade 1

a) Cada um receberia:

Sem o empréstimo de mais um camelo:

1º filho: 3/8 de 47 = (3/8).47 = 141/8 = 17 e 5/8 de 47 =	17 e 30/48
2º filho: 5/16 de 47 = (5/16).47 = 235/16 = 14 e 11/16 de 47 =	14 33/48
3º filho: (7/24).47 = 329/24 = 13 e 17/24 de 47 =	13 34/48
Soma	44 e 97/48
	46 e 1/48

Após o empréstimo de mais um camelo:

O mais velho: 3/8 de 48 = 3 x (1/8) de 48 = 3 x 6 =	18
O do meio: 5/16 de 48 = 5 x (1/16) de 48 = 5 x 3 =	15
O mais novo: 7/24 de 48 = 7 x (1/24) de 48 = 7 x 2 =	14
Soma	47

b) Não sobrou nenhum camelo, pois, após o empréstimo, eles receberam os 47 camelos e devolveram o que foi emprestado.

c) Há vários modos possíveis de explicar. Um desses modos é:

O pai destinou aos filhos 3/8 + 5/16 + 7/24 = 47/48 dos camelos. Esse número é quase igual ao total, que deveria ser 48/48, mas, distribuindo os 47/48, sobra 1/48. Isso ocorre após a distribuição de qualquer número de camelos – com essas frações, sobra sempre 1/48 do número a ser dividido.

No caso de 47 camelos, sobrou 1/48 de 47, que é igual a 47/48 de camelo (quase um camelo inteiro).

No caso de 48, sobrou 1/48 de 48, igual a 48/48 de camelo, o mesmo que um camelo.

Atividade 2

A contradição é apenas aparente.

O total pago foi de R$ 27,00, mas a conta era de R$ 25,00, então sobraram R$2,00 para o garçom.

A quantia de R$ 30,00 ficou assim distribuída: R$ 25,00 para o caixa, R$ 3,00 como troco (R$ 1,00 para cada cliente) e R$ 2,00 para o garçom.

Atividade 3

Resposta pessoal.

É importante mencionar, com as próprias palavras:

- sobre a necessidade de transformar todas as frações em frações *do mesmo tipo* (cada uma indicando um ou vários pedaços de uma unidade, todos os pedaços iguais entre si);
- sobre como transformar as frações em frações *do mesmo tipo*;
- que, quando são todas *do mesmo tipo*, a quantidade que se tem em cada uma é dada pelo numerador, então, para saber o total de pedaços, basta somar os numeradores.

Atividade 4

Resposta pessoal. Uma resposta possível é dando uma idéia do que ocorre, por exemplo, como a seguir:

Suponha que se tenha 2/3. Se eu multiplico o denominador por 2, passo a ter sextos, que são a metade de terços.

Se eu tiver apenas 2 sextos, ficarei com a metade do que eu tinha antes.

Para continuar a ter o mesmo, devo pegar o dobro de pedaços, isto é, devo pegar 4/6, o que equivale a multiplicar o numerador por 2.

Atividade 5

Respostas pessoais. Respostas possíveis:

a) $999^2 = (1.000 - 1)^2$.

Mentalmente, pensar no produto 1x1.000 e dobrá-lo, obtendo 2.000.

Calcular os quadrados 1.000^2 e 1^2 e somá-los, obtendo 1.000.001.

Tirar 2.000, obtendo 998.001 (é importante saber que 1.000.000 menos 2.000 dá 998.000).

O cálculo oral seria: *somar os quadrados dos dois termos e tirar o produto dos dois, duplicado*.

b) $1.012^2 = (1000 + 12)^2$.

100x12 = 12.000, duplicado dá 24.000.

$1.000^2 + 12^2 = 1.000.000 + 144 = 1.000.144$.

Somados: 1.024.144.

c) $99{,}9^2 = (100 - 0{,}1)^2$.

100 x 0,1 = 10 (1 décimo de 100 é igual a 10); duplicado dá 20.

$100^2 + 0{,}1^2 = 10.000 + 0{,}01 = 10.000{,}01$.

Somados: 10.020,01.

(Repare: $0,1^2 = (1/10)^2 = 1/100 = 0,01$).

d) A diferença entre os quadrados dos números é igual ao produto 1,1 x 3,9.

Atividade 6

- A metade de 3/5 vale 3/10.
- 2 - 3/4 é igual a 1 3/4.

Atividade 7

a) 10 doces divididos por 6 crianças resultam em 1 para cada uma e sobram 4 doces.

Dividimos 3 dos doces que sobraram ao meio e damos metade a cada uma.

Dividimos o doce restante em 6 pedaços e damos um pedaço a cada uma.

Cada criança recebe: 1 + 1/2 + 1/6.

b)
$$
\begin{array}{l}
12\ \dfrac{1}{2}\,. \\
\underline{\quad \times\ 7 \quad} \\
84 \times 3\ \dfrac{1}{2} \\
87\ \ \dfrac{1}{2}
\end{array}
$$

7 x 12 = 84;   7 x 1/2 = 7/2 = 3 1/2. Juntando, temos 87.

Atividade 8

É possível que algumas representações iniciais sejam:

$$\frac{1}{6} \text{ de } x + \frac{1}{12} \text{ de } x + \frac{1}{7} \text{ de } x + 5 + \frac{1}{2} \text{ de } x + 4 = x$$

É uma boa oportunidade para questionar o significado da representação fracionária e mencionar outras representações possíveis:

$$\frac{1}{6} \text{ de } x = \frac{1}{6} \times x = \frac{x}{6}$$

Desse modo, na linguagem algébrica atual, denominando x como a idade vivida por Diofante, podemos escrever:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

Atividade 9

Resposta no texto.

Atividade 10

1 - multipliquei por 3	9 - dividiu por 3	28
2 - somei 3/4 do total (tomou 7/4)	8 - tomou 3/4	84
3 - dividi por 7	7 - multiplicou por 7	147
4 - diminui 1/3 do quociente (tomou 2/3)	6 - Tomou 3/2	21
5 - multipliquei por si mesmo	5 - extraiu a raiz quadrada	14
6 - tirei 52	4 - somou 52m	196
7 - extraí a raiz quadrada	3 - multiplicou por si mesmo	144
8 - somei 8	2 - diminuiu 8	12
9 - dividi por 10	1 - multiplicou por 10	20

Deu 2

Verificação do resultado:

$28 \times 3 = 84$; $84 + 3/4(84) = 84 + 63 = 147$; $14 \div 7 = 21$; $21 - 1/3\ (21) = 21 - 7 = 14$;

$14 \times 14 = 196$;

$196 - 52 = 144$;

$\sqrt{144} = 12$; $12 + 8 = 20$; $20 \div 10 = 2$.

Unidade 22

Migração – a busca do sonho

Sinval Braga de Freitas

Iniciando nossa conversa

Em nosso país, um fenômeno observado constantemente é o movimento de migração. As pessoas, por inúmeros fatores, mudam constantemente de município, de estado e de região. Nesta Unidade, vamos pensar em como a Matemática pode nos ajudar a compreender, descrever e representar este fenômeno social.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) prevêem que seja trabalhado o bloco de conteúdo, espaço e forma, não apenas para exploração de conceitos geométricos tradicionalmente relacionados ao estudo das formas, visualização e aplicação de propriedades das figuras, construções geométricas com régua e compasso, transformações geométricas, mas, além destes, as noções relativas à posição, localização de figuras e deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas.

Um dos objetivos do trabalho com a noção de espaço no Ensino Fundamental é o desenvolvimento do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que instrumentalizem o aluno a resolver situações-problema de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo, nas noções de direção e sentido, de ângulo (como mudança de direção), de paralelismo e de perpendicularismo, elementos fundamentais para a constituição de sistemas de coordenadas cartesianas.

Um estudo sobre os movimentos migratórios no mundo e no Brasil pode contribuir em muito com contextos significativos para questões de localização espacial. Uma análise mais "geométrica" do fenômeno pode ser um modo de o aluno compreender, descrever e representar, de forma mais organizada, fatos que ocorrem no mundo em que vive.

Esta Unidade também será composta por três Seções:

- Resolução de uma situação-problema
- Conhecimento matemático em ação
- Transposição didática

A Seção 1 apresenta uma situação-problema, envolvendo o tema: migração – a busca do sonho, introduzindo a Matemática integrada ao mundo real.

A Seção 2 explora os conteúdos matemáticos presentes na situação-problema, especificamente os conceitos envolvidos na exploração do espaço físico, como localização, deslocamento, leitura de guias, mapas e plantas, competências muito exigidas no mundo atual, principalmente porque um grande número de pessoas desloca-se constantemente de região e precisa aprender a lidar e a se locomover em diferentes espaços.

Ainda serão exploradas as construções com régua e compasso, uma vez que serão projetados deslocamentos no plano, em papel quadriculado, o que facilita a localização de pontos no espaço, um conteúdo essencial em Geometria.

A Seção 3 é destinada à transposição didática e apresentará algumas sugestões de trabalho com estes conteúdos em sala de aula.

Definindo o nosso percurso

Ao longo desta Unidade, esperamos que você possa:

1. Com relação ao seu conhecimento sobre conteúdos matemáticos:

- Resolver uma situação-problema relacionada aos movimentos migratórios que ocorrem em nosso país, identificando os conhecimentos que são essenciais a um jovem estudante que pertence a uma família em "estado de mudança" de espaço, deslocando-se de um município a outro ou de um estado a outro.
- Construir modelos matemáticos que representem adequadamente os movimentos migratórios, observando o sistema de coordenadas como um modelo de representação de pontos no espaço.

2. Com relação aos seus conhecimentos sobre Educação Matemática:

- Rever a importância das situações-problema no ensino-aprendizagem da Matemática.
- Repensar o significado de transposição didática.
- Discutir algumas idéias sobre o currículo em rede.
- Repensar sobre a necessidade da ação do aluno no processo de aprendizagem, especificamente em relação aos conceitos geométricos (Texto de Referência).

3. Com relação ao seu conhecimento sobre conteúdos matemáticos:

- Conhecer e produzir situações didáticas envolvendo conceitos de localização no espaço e deslocamento e todos os aspectos relevantes para o domínio e a operacionalização deste conceito pelos alunos em situações cotidianas.
- Retomar as noções de currículo em rede, campos conceituais e conhecimento em ação presentes em diferentes situações de aprendizagem.
- Rever, no caso específico do sistema de coordenadas cartesianas, a possibilidade de explorar os conceitos que fazem parte de um mesmo campo conceitual.
- Compreender a Educação Matemática integrada à formação global do aluno, principalmente em relação à habilidade de se localizar no espaço.

Seção 1

Resolução de situação-problema: localização, deslocamentos e construção de um sistema de coordenadas relacionado aos movimentos migratórios no Brasil

Objetivo da seção

- Observar o comportamento de fenômenos do mundo real, especificamente com relação aos movimentos migratórios no Brasil.
- Resolver uma situação-problema, representando, em um sistema de coordenadas cartesianas, algumas situações vivenciadas por uma família de migrantes em uma nova cidade.
- Representar, em um sistema de coordenadas cartesianas, a localização de pontos no plano.
- Observar o mapa do Brasil e identificar o sistema de coordenadas presentes neste.
- Repensar sobre a necessidade da leitura de mapas, plantas e guias representativos de diferentes espaços.

Integrando a matemática ao mundo real

A busca do sonho
Migrações no Espaço Mundial e no Brasil[1]

Desde o surgimento do homem, há milhares de anos, a busca por melhores condições de vida sempre foi uma das metas a serem alcançadas. Por conta disso, as primeiras sociedades eram nômades, pois migravam sempre em busca daquilo que havia se esgotado por onde já haviam passado. A sedentarização do homem só vai se dar com a chamada Revolução do Neolítico, quando o homem passa a domesticar animais e, a partir daí, a desenvolver a agricultura e a pecuária.

A mobilidade espacial das populações humanas, ou seja, a migração, é motivada por vários fatores que podem ser: políticos, religiosos, naturais, culturais, mas, sem sombra de dúvidas, o fator que historicamente tem sido predominante é o econômico.

1.Texto adaptado do texto Migrações no Espaço Mundial e no Brasil, disponível na página do clip educacional: http://www.educacional.com.br/.

Migrações no Brasil

No Brasil, os movimentos migratórios sempre foram muito intensos. As primeiras migrações foram as de europeus e de negros africanos, que foram forçados a vir para cá. Ocorreram muitas migrações de fundamental importância para o país, como, por exemplo, a dos migrantes italianos no século XIX, assim como de migrantes espanhóis, eslavos, japoneses, árabes, portugueses, dentre outros.

Com a industrialização, nas décadas de 60 e 70, passamos a viver de forma mais intensa as migrações internas no território nacional, como a de nordestinos a caminho das duas grandes metrópoles brasileiras, Rio e São Paulo, e o intenso êxodo rural, que fez o Brasil se tornar um país predominantemente urbano em um espaço de menos de 30 anos.

Atualmente, as antigas metrópoles industriais não são mais os locais preferidos por migrantes. Por conta do processo de desconcentração industrial, novas áreas do país passaram a ser pólo de atração desses cidadãos, como o interior de São Paulo, do Paraná, etc. As migrações continuam a ser muito comuns no Brasil, tanto do campo para a cidade, como entre centros urbanos.

Articulando conhecimentos

Migração é a movimentação de entrada (imigração) ou saída (emigração) de indivíduo ou grupo de indivíduos, em busca de melhores condições de vida. Essa movimentação pode ser entre países diferentes ou dentro de um mesmo país.

Fonte: dicionário Houaiss.

Como situação-problema inicial, vamos pensar em uma típica família brasileira que, por viver em uma determinada região do país onde as condições são desfavoráveis quanto a questões referentes à saúde, moradia, emprego e renda, resolve deslocar-se para outro município, localizado em outro estado que, por sua vez, pertence a uma outra região do país.

Atividade 1

Imagine que a família Lima, constituída por cinco pessoas: Seu João, o pai, Dona Ivete, a mãe, e três filhos: Marina, de 14 anos, Bruno, de 19 anos, e Vitória, que está com 10 anos, conseguiu dinheiro suficiente para migrar de sua terra natal, Teresina, no Piauí, para São Paulo, e precisa calcular a distância entre estas duas cidades em quilômetros. Desenvolva uma estratégia para medir o trajeto por estradas saindo de Teresina até chegar a São Paulo e calcule em centímetros essa distância no mapa. Depois, utilizando a escala do mapa apresentado na Figura 1, calcule a distância real desse trajeto.

Figura 2

Uma competência essencial às pessoas que viajam é a interpretação de informações contidas em tabelas, muito freqüentes em guichês de companhias rodoviárias.

Atividade 2

Utilize o conceito de escala estudado na Unidade 1 para resolver a Atividade a seguir.

a) Descubra a escala utilizada no mapa da Atividade 1.
b) Para a escala encontrada:

- Expresse-a por meio de uma razão, tipo a: b.
- Expresse-a por meio de uma fração.
- Expresse-a por meio de um segmento de reta, indicando a proporcionalidade correta.
- Defina qual a medida que expressa esta escala.

Atividade 3

Trabalhando com informações:

Figura 2

Distância em Km	
Teresina a Salvador	1163 Km
Salvador a Vitória da Conquista	487 Km
Vitória da Conquista a Belo Horizonte	849 Km
Belo Horizonte a São Paulo	586 Km

Tabela 1

Trajeto	**Horário de saída**	**Horário de chegada**
Teresina a Salvador	8 h 10	21 h 15
Salvador a Vitória da Conquista	21 h 20	4 h 10
Vitória da Conquista a Belo Horizonte	4 h 20	12 h 30
Belo Horizonte a São Paulo	12 h 40	18 h 50

Tabela 2

a) Observe as informações contidas na Tabela 1 e calcule quantos quilômetros a família Lima percorrerá saindo de Teresina para São Paulo, passando por Salvador, Vitória da Conquista e Belo Horizonte.

b) Retorne à Atividade 1 e compare a distância que você calculou com a distância encontrada neste percurso. Você percorreu o mesmo caminho para chegar a São Paulo ou existem outras possibilidades?

c) Quando se chegar a Vitória, qual porcentagem da distância entre Teresina e São Paulo já terá sido percorrida?

d) Com base nas informações contidas na Tabela 2, diga quanto tempo leva, aproximadamente, um ônibus para ir de Teresina a Belo Horizonte.

Chegando a São Paulo, a família Lima foi até um balcão de informações no terminal rodoviário, localizado em Santana, perguntou a localização do bairro do Butantã e como chegar até lá. O informante forneceu um mapa à família.

Atividade 4

Professor, considere que a família chegou à rodoviária, que fica na margem do Rio Tietê, junto ao campo de Marte.

a) Destaque, no mapa apresentado na Figura 3 a seguir, as informações necessárias para que esta família possa sair da rodoviária e chegar ao bairro desejado – Butantã – onde moram alguns conhecidos, que há algum tempo fizeram este mesmo percurso, saindo da sua terra natal e indo procurar um novo lugar para viver.

b) Qual o caminho a ser percorrido pela família?

c) Como descrever isso de forma competente e clara?

Figura 3

Seção 2

Construção do conhecimento matemático em ação

Objetivo da seção

- Ressignificar o conceito de sistema de coordenadas cartesianas – noções de paralelismo e perpendicularismo.
- Representar e localizar pontos no plano cartesiano.
- Interpretar a posição e o deslocamento no plano (pontos, direção, sentido, distância, ângulo).
- Movimentar uma figura no plano por meio de reflexões, translações.
- Desenvolver croquis com o auxílio de régua e compasso.
- Utilizar instrumentos geométricos na construção de retas perpendiculares.
- Compreender o conceito de posição relativa de retas a partir da noção de ângulo reto.
- Aplicar o Teorema de Pitágoras.
- Resolver situações-problema aplicando o conhecimento sobre múltiplos e divisores.

Revendo conceitos

Como dissemos na nossa conversa inicial, o bloco de conteúdos relacionados ao espaço, previsto nos Parâmetros Curriculares Nacionais, deve explorar, entre outros conteúdos, noções relativas à posição, localização e deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas. Estes são conteúdos essenciais nos dias atuais, por isso torna-se importante que sejam tratados em sala de aula, em diferentes situações-problema.

Para um aprofundamento destes conteúdos, inicialmente é interessante que sejam revistos alguns conceitos básicos sobre plano cartesiano. Retorne ao Caderno de Teoria e Prática 3 e retome a Unidade 11, onde estão bem explicitadas algumas idéias sobre plano cartesiano.

Retomando algumas idéias

Um plano cartesiano possui dois eixos perpendiculares: um horizontal – eixo x – também chamado de eixo das abscissas; e outro vertical – eixo y – chamado de eixo das ordenadas. Para efeito de compreensão, convencionou-se que a localização no plano cartesiano deve ser feita sempre nesta ordem: primeiro o número correspondente ao eixo x e depois o número correspondente ao eixo y. Não podemos esquecer que no plano cartesiano é preciso definir sentidos e unidade de medida, esta última sendo a mesma nos dois eixos.

Nesta Unidade, vamos aprender a construir um plano cartesiano.

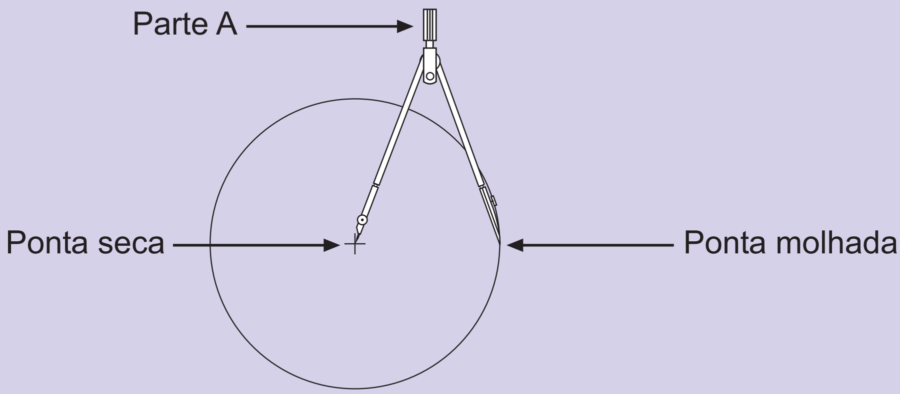
Para a construção de um plano cartesiano, precisamos relembrar alguns conceitos sobre retas perpendiculares que constituem este plano. Antes de iniciarmos a próxima Atividade, vamos rever o conceito de retas perpendiculares[2] e os procedimentos para a sua construção.

Inicialmente, lembremos como se usa o compasso.

O compasso é composto por duas pontas (a molhada, que é a que possui o grafite, e a seca).

Para utilizá-lo, é só fixar a ponta seca na folha, como mostra a figura abaixo, e depois girá-lo em torno do próprio eixo.

Observação: Para manter a abertura fixa, sem alterá-la em um momento de transferência, a forma correta é segurando firmemente a parte A.

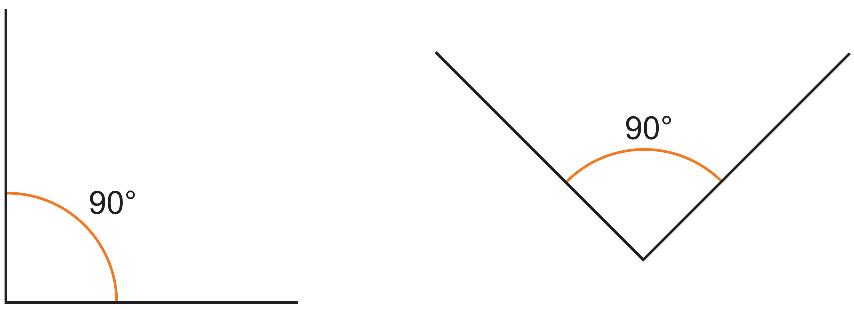


É importante lembrar que a função do compasso inicialmente não era traçar circunferências, mas transportar medidas lineares e angulares (o que faremos nas próximas Atividades).

Agora vamos rever como construir retas perpendiculares usando régua e compasso.

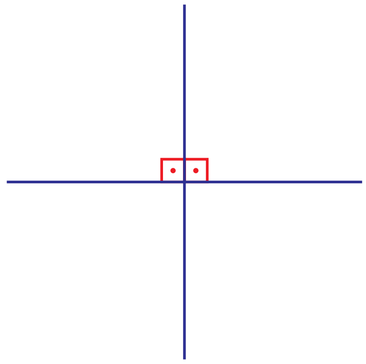
Construindo retas perpendiculares – Conceitos básicos

Ângulo reto: um ângulo que mede 90 graus.

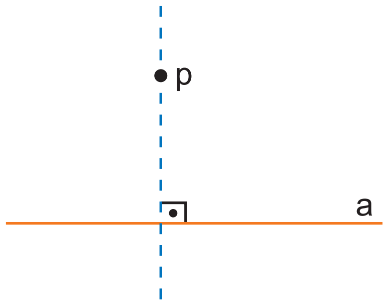


2. Fonte: http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/geometria/geo-basico.htm#m112a02.

Retas perpendiculares: são retas concorrentes que formam ângulos de 90 graus. Usamos a notação a ⊥ b para indicar que as retas a e b são perpendiculares.

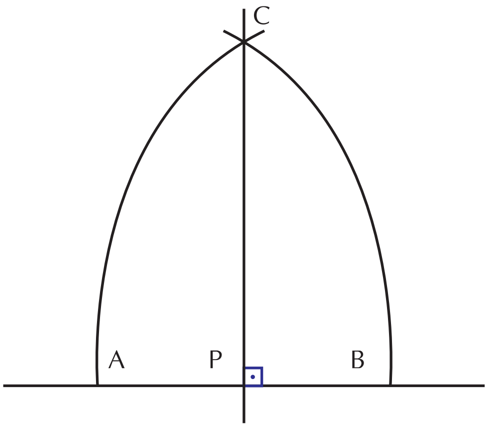


Lembre-se de uma propriedade da reta perpendicular: por um ponto localizado fora de uma reta dada, pode ser traçada apenas uma reta perpendicular.



Agora que relembramos como utilizar o compasso, vamos acompanhar passo a passo a construção de retas perpendiculares.

1. Construir um segmento de reta qualquer e marcar sobre ele um ponto P.
2. Colocar a ponta seca do compasso no ponto P e marcar os pontos A e B sobre o segmento de reta à mesma distância de P.
3. Colocar a ponta seca do compasso no ponto A para traçar um arco cujo raio tem a medida do segmento AB.
4. Proceder do mesmo modo colocando a ponta seca do compasso sobre o ponto B, traçando um outro arco.
5. Marcar o ponto onde os arcos traçados se cruzam e denominar este ponto como C.
6. Traçar um segmento de reta unindo o ponto P ao ponto C.
7. O segmento de reta contendo PC é perpendicular ao segmento AB.



É interessante que você, professor, pegue os seus instrumentos (compasso, régua e uma folha de papel ofício) e construa retas perpendiculares.

Você poderá observar, na Atividade seguinte, que o sistema de coordenadas cartesianas (note que este plano é formado por várias perpendiculares) pode ser utilizado como um instrumento para a localização de pontos em um plano que representa o espaço.

Sobre o mesmo mapa que a família Lima recebeu no balcão de informações, foi colocado um sistema de eixos cartesianos. O par (0, 0) foi associado à Praça da Sé, onde justamente se cruzam as linhas Leste-Oeste e Norte-Sul do metrô de São Paulo.

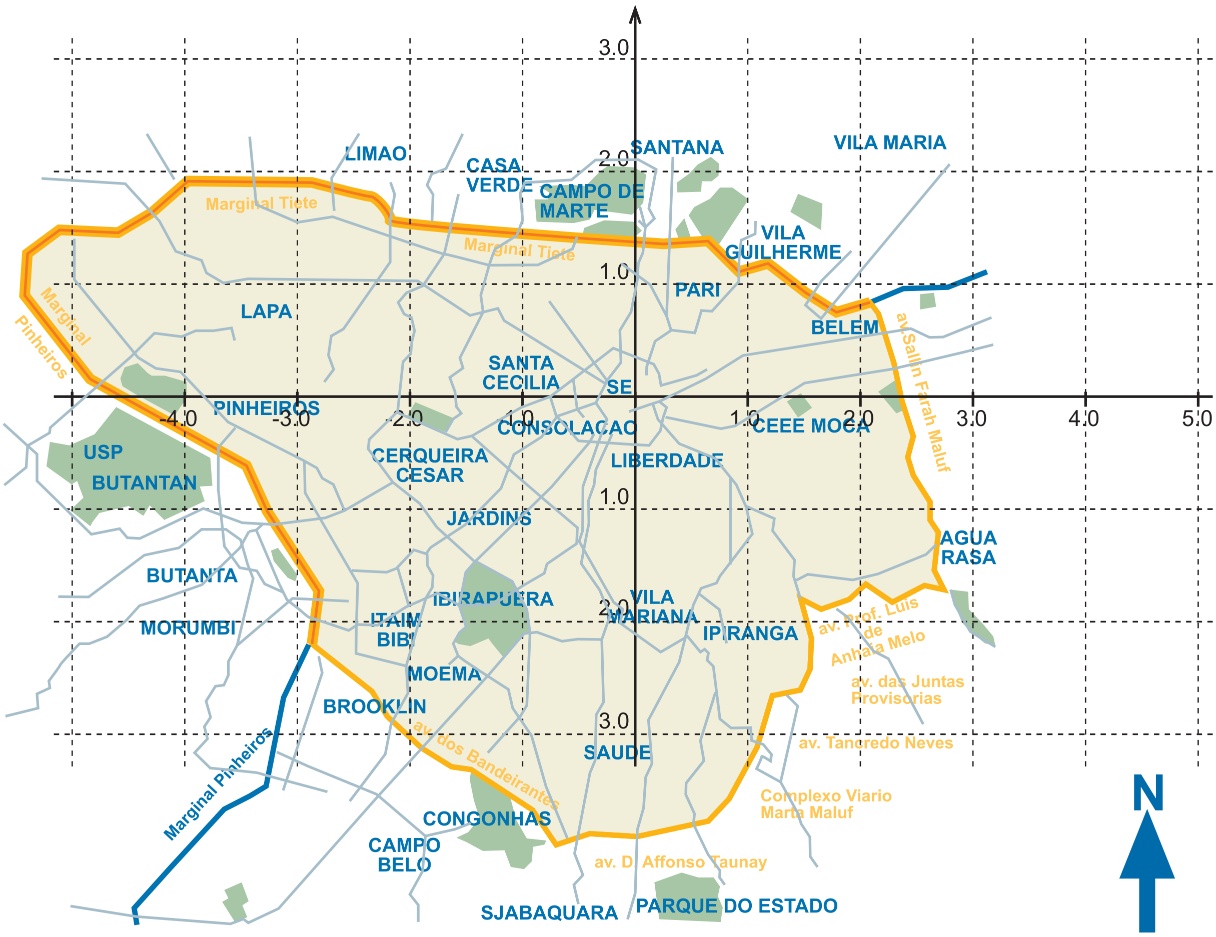


Figura 4

Vejamos alguns caminhos possíveis para deslocamentos neste plano (mapa representativo do espaço próximo à praça da Sé).

- (+1, -2): saindo de (0, 0), andando 1 para a direita (+1), ou seja, para o leste, em direção à avenida Salim Farah Maluf, e, em seguida, 2 para baixo (-2), ou seja, para o sul, em direção à avenida Tancredo Neves, chegamos ao bairro Ipiranga (famoso por fazer parte da nossa história, pois foi lá que D. Pedro I proclamou a Independência do Brasil, em 1822).

- Itaim-Bibi: para localizarmos este bairro, partindo de (0, 0), devemos andar 2 para a esquerda (-2), ou seja, para oeste, em direção à marginal Pinheiros, e 2 para baixo (-2), ou seja, para o sul, em direção à avenida dos Bandeirantes. Então, as coordenadas Itaim-Bibi são: (-2, -2).

Professor, é interessante refletir com seus alunos sobre a questão ideológica implícita nos termos "para cima" e "para baixo" utilizados freqüentemente para denominar o Norte e o Sul na representação espacial dos países no mapa. Procure um mapa e observe que países se localizam "acima" da linha do equador e que países se localizam "abaixo" da linha do equador. Converse com os seus colegas professores que trabalham com Geografia e junto com eles faça uma crítica sobre esta idéia.

Atividade 5

Agora é com você! Localize, no mapa apresentado na Figura 4, os bairros abaixo, por meio de coordenadas cartesianas, e indique o par correspondente a cada bairro:

- Limão (,   )
- Pinheiros (,   )
- Morumbi (,   )
- Ibirapuera (,   )
- Vila Mariana (,   )
- Casa Verde (,   )

Como a utilização do sistema de coordenadas cartesianas contribuiu para uma melhor localização dos bairros? Você já pensou na possibilidade de relacionar as coordenadas cartesianas às coordenadas geográficas?

Para entender mais sobre localização[3]

Lembre-se de que todos os pontos da superfície terrestre são localizados pelo cruzamento de duas coordenadas geográficas: latitude e longitude. As coordenadas são linhas imaginárias, separadas em intervalos regulares e medidas em graus. As latitudes, ou paralelos, são as linhas paralelas ao Equador. As longitudes, ou meridianos, são as linhas paralelas ao meridiano de Greenwich.

Paralelos: Os paralelos são as distâncias, medidas em graus, partindo do Equador (0°) até 90° na direção norte (N) – sul (S).

Equador: a rotação da Terra estabelece um eixo imaginário, cuja intersecção com a superfície terrestre estabelece os dois pólos. O meio do caminho entre os pólos é a linha do Equador.

3. http://www.conhecimentosgerais.com.br/geografia.

Trópicos: paralelos situados em latitudes simétricas (23° 27′). Representam o movimento aparente do Sol sobre a superfície da Terra durante os solstícios, quando os raios caem verticalmente sobre a região.

Solstícios: são as épocas em que o Sol está na sua maior inclinação boreal (norte) ou austral (sul). A inclinação boreal máxima é chamada de solstício de inverno (em 22 ou 23 de junho) e corresponde ao dia mais curto do ano. A maior inclinação austral é o solstício de verão, quando acontece o dia mais longo do ano (22 ou 23 de dezembro). Assim como as estações do ano, os solstícios se invertem nos dois hemisférios.

Trópico de Câncer: está ao norte do Equador. É a projeção do movimento do Sol durante o solstício de verão do hemisfério Norte.

Trópico de Capricórnio: fica ao sul do Equador e representa o movimento do Sol no solstício de inverno do hemisfério Norte.

Meridianos: são linhas imaginárias, medidas em graus, partindo de Greenwich (0°) até 180° na direção oeste (W) – leste (L).

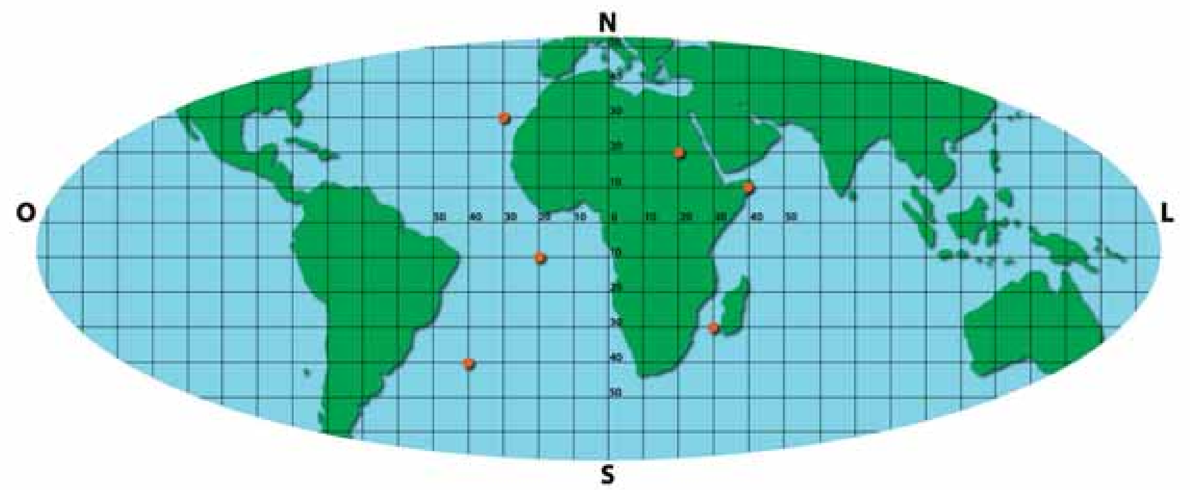
Meridiano de Greenwich: é o meridiano inicial, ou zero, estabelecido em 1884 por acordo internacional. Foi definido, tendo como referência o meridiano que passa pelo Observatório Astronômico Real Inglês, na cidade de Greenwich, próxima a Londres, Inglaterra.

Observe o seguinte exemplo: o ponto A está localizado a uma latitude de 20° S e a uma longitude de 30° W. Indicamos este ponto assim: P(20° S, 30° W).

> Observe que mantivemos o processo utilizado em Cartografia, onde primeiro escrevemos a latitude e depois a longitude. Lembre-se de que em Matemática a localização no plano cartesiano é realizada de uma forma diferente, pois nele encontramos primeiro a coordenada na horizontal (abscissa) para depois localizarmos a coordenada na vertical (ordenada).

Atividade 6

Agora é com você! Fazendo o mesmo procedimento, localize os pontos.



A = B = C = D = E = F =

Você utilizou conhecimentos sobre coordenadas geográficas ao localizar pontos em um globo que representa a superfície terrestre. Agora busque um mapa-múndi e localize nele as cidades abaixo, dando a latitude e a longitude aproximadas de cada uma delas.

a) Londres

b) Brasília

c) São Paulo

d) Cidade em que você mora

e) Natal

Atividade 7

Professor, você já pensou na seguinte indagação: se a latitude e a longitude indicam a localização espacial de um ponto sobre a superfície, traduzindo-se em distâncias, respectivamente, em relação às linhas do paralelo do Equador e do meridiano de Greenwich, por que as suas medidas são dadas em medidas angulares e não lineares? Pense no porquê de dizermos que o ponto P(20° S, 30° W) é localizado em graus e não em metros.

É interessante que você pesquise essa questão junto aos professores de Geografia da sua escola e em livros didáticos de Geografia.

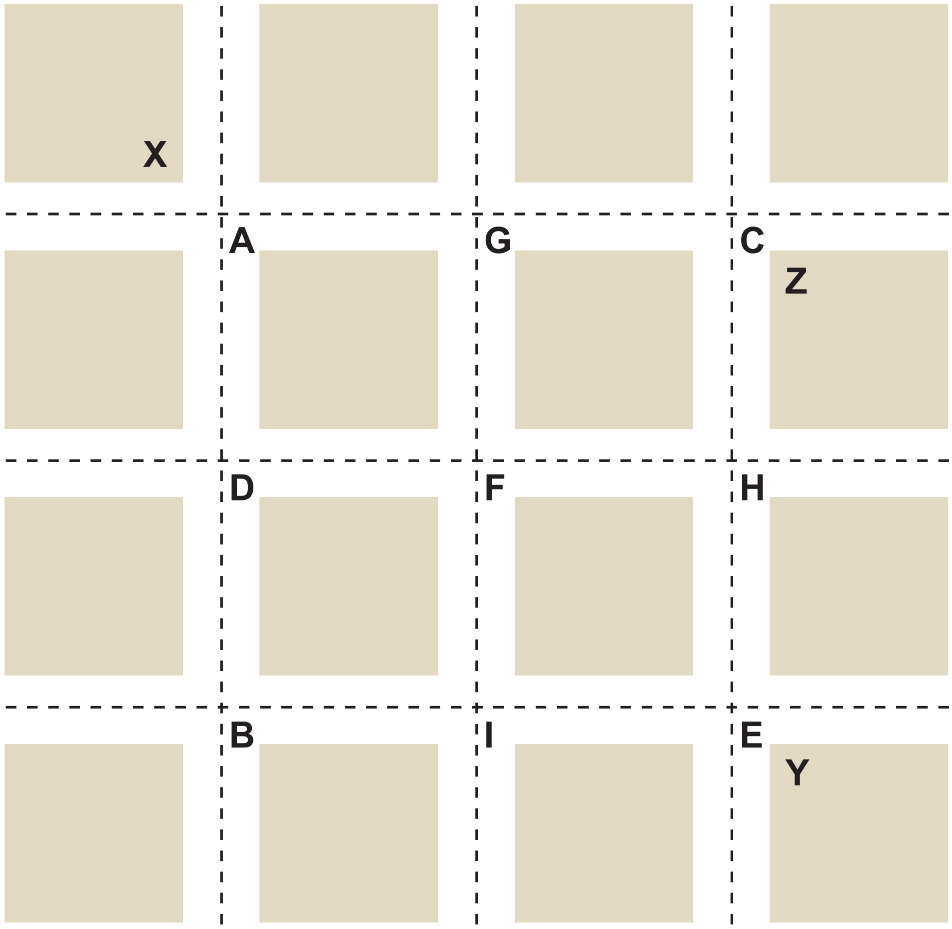
Após esse passeio observando as conexões existentes entre os conhecimentos matemáticos e geográficos, vamos continuar estudando o sistema de coordenadas cartesianas, entendendo que este contribui tanto na localização, em contextos mais amplos, como nas Atividades anteriores, quanto em situações cotidianas, como, por exemplo, na hora de se localizar em um bairro.

Indo além da localização de pontos no plano

Além de localizar pontos no plano cartesiano, você, professor, pode explorar a malha quadriculada obtida com a construção de várias retas perpendiculares, onde definimos a posição das ordenadas e das abscissas e a que estamos denominando de plano cartesiano para explorar outras noções como as que irão ser exploradas nas Atividades a seguir.

Atividade 8

Observe a planta do bairro onde a família Lima irá morar. Sabendo que a distância entre duas esquinas é sempre de 120 m, responda as questões:



a) A casa da família fica localizada em X, e a escola onde Vitória vai estudar fica em Y. Quantos e quais são os roteiros que Vitória poderá usar?

b) Qual o trajeto mais curto da casa para a escola e quantos metros, aproximadamente, Vitória percorrerá fazendo este trajeto?

c) Se a padaria fica localizada no ponto Z, qual o caminho mais longo possível, saindo da casa e sem passar duas vezes pelo mesmo ponto?

Explorando outras situações de localização

1. Suponha que, algum tempo depois de estarem morando em São Paulo, Marina e Bruno arrumem empregos: Marina como secretária em uma grande empresa e Bruno, finalmente, na construção civil. (Retornando ao mapa da Atividade 5) Bruno e Marina observaram atentamente o mapa e descobriram que o trabalho de Marina fica na posição (0,0), bem próximo à estação da Sé, e o trabalho de Bruno fica na posição (3, -1), próximo à Água Rasa. Desta maneira, os dois decidiram alugar um apartamento juntos, localizado de tal forma que a soma das distâncias que eles teriam que caminhar para o trabalho fosse a menor possível. Professor, descubra em que região Bruno e Marina devem procurar o apartamento.

2. Se Bruno e Marina não encontrarem nada na sugestão dada por você, isto é, onde a soma das distâncias é mínima, e resolverem procurar um apartamento localizado em um ponto de modo que ambos caminhassem a mesma distância, qual seria a sua sugestão para ajudá-los?

Ainda trabalhando com o plano cartesiano, podemos explorar um pouco mais as noções de direção e sentido e representar em um plano cartesiano a reflexão, a translação e a ampliação de figuras.

Atividade 9

Lembrete

Para esta Atividade, você precisará de régua e folha de papel quadriculado.

Examine o triângulo de vértices R (1, 2), S (3, 3) e T (4, 1) da Figura 5 abaixo.

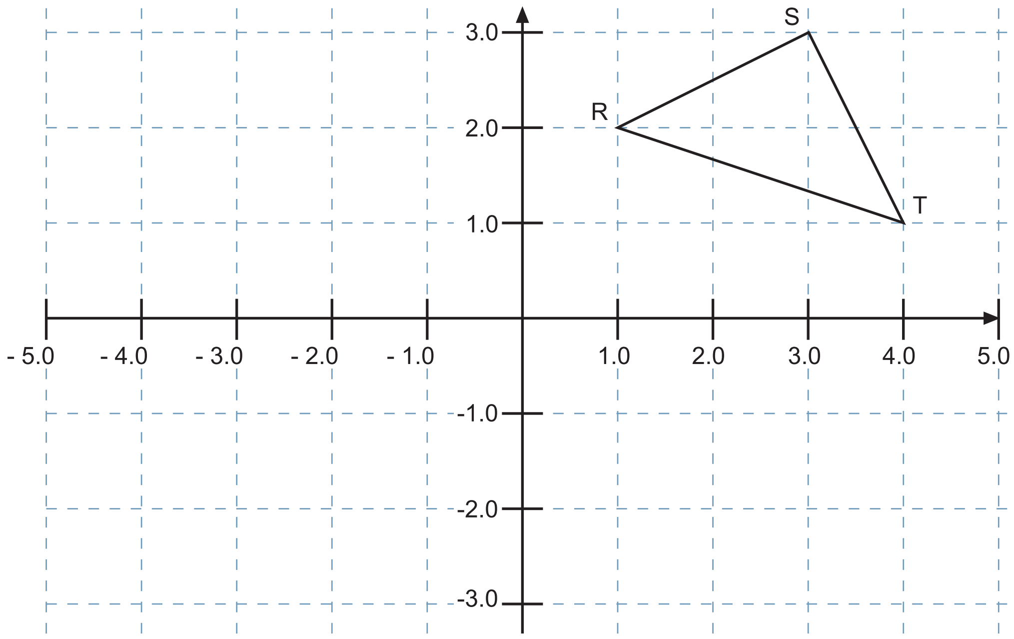


Figura 5

Vamos multiplicar a primeira coordenada de cada vértice por -1 e ver o que acontece.

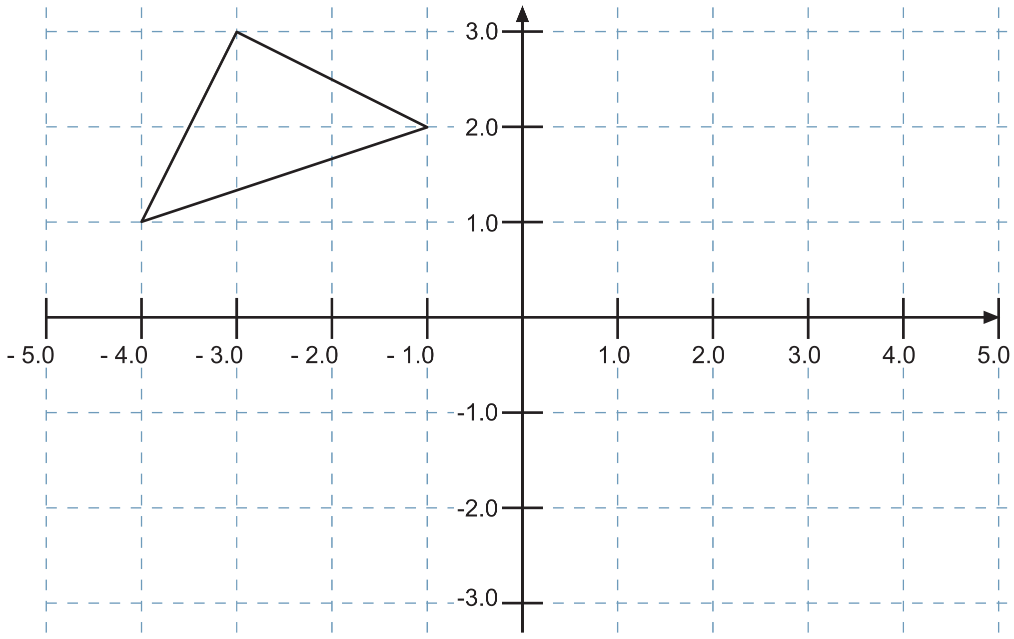


Figura 6

Agora é com você! Como você poderia fazer uma reflexão do triângulo anterior para o terceiro quadrante? Construa este triângulo no plano abaixo.

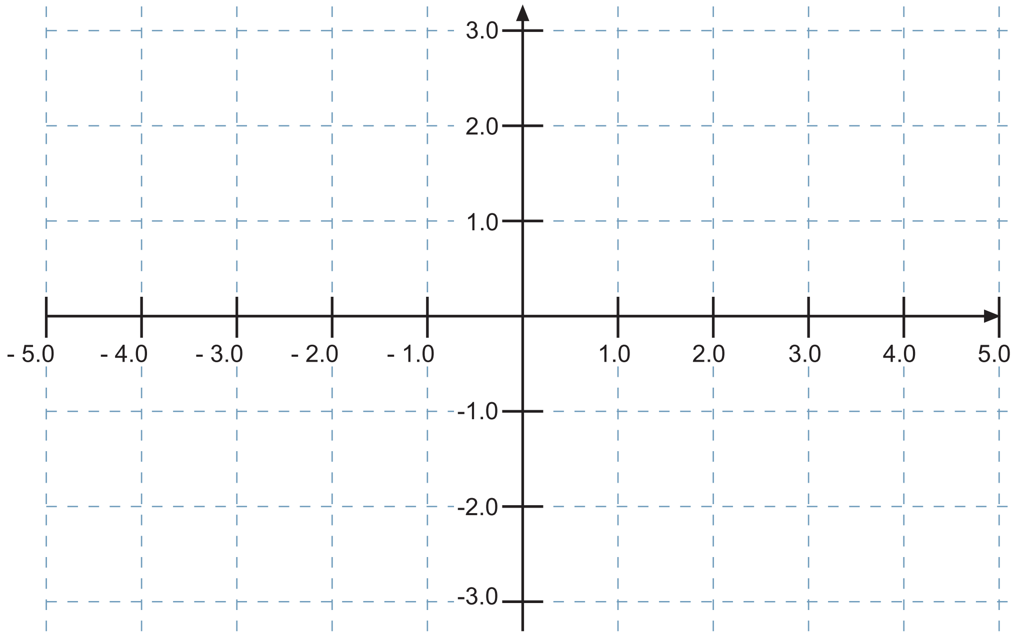


Figura 7

Atividade 10

a) Desenhe em uma folha quadriculada um triângulo cujos vértices são P (1, 1), Q (2, -3) e R (4, 0). Faça a translação do triângulo PQR três unidades para cima. Escreva as coordenadas de cada vértice obtido.

b) Descreva o procedimento que você utilizou para realizar o movimento de translação.

Atividade 11

Desenhe em uma folha de papel quadriculado um triângulo cujos vértices são M (-1, 1), N (1, 0) e L (-1, -1). Depois multiplique as duas coordenadas de cada vértice por 3. Desenhe o novo triângulo. O que é este novo triângulo em relação ao original?

Articulando conhecimentos

Translação
É um movimento de um sistema físico no qual todos os seus componentes se deslocam paralelamente e mantêm as mesmas distâncias entre si (Dicionário virtual Houaiss).

Ampliação e Redução
Maior a figura original, e, do mesmo modo, reduzir é reproduzir em formato menor a figura original.

Reflexão
É a operação que transforma um ponto no seu simétrico em relação a outro ponto, a uma linha ou a um plano (Dicionário virtual Houaiss).

Professor, após esse breve estudo para ilustrar possibilidades de exploração do plano cartesiano, pense na surpresa da família Lima com a visão de muitas áreas verdes ao longo da estrada durante a sua viagem. A família ficou impressionada com a vista de determinadas áreas produtivas do interior do Brasil, as quais revelam um mosaico de formas e cores que fascinam os olhos de qualquer observador que chega de outro estado. Isso ocorre devido ao cuidado que vários produtores têm no cultivo das terras.

Como exemplo, suponha que um agricultor decida dividir uma grande área plana e retangular (não quadrada) em vários quadrados diferentes, para plantar tipos distintos de cereais. A situação está esquematizada na Figura 8 abaixo, na qual o menor quadrado tem as dimensões 1m x 1m, e o trajeto tracejado ABCDE é uma estrada formada pelo segmento AB, pelos lados BC e DE de dois dos quadrados e pelo segmento CD. Usando: $\sqrt{2} = 1{,}41$.

Aprendendo sobre Educação Matemática

Buscamos no GESTAR a concepção de uma Matemática em que os conteúdos curriculares encontram-se em rede e não de forma estanque e desarticulada. Você com certeza fez a leitura do Texto de Referência: Currículo em rede, apresentado na TP1 - Unidade 3. Para resolver a situação-problema proposta na Atividade 12 a seguir, você terá que buscar alguns **conceitos na rede** como: Teorema de Pitágoras e áreas de figuras planas.

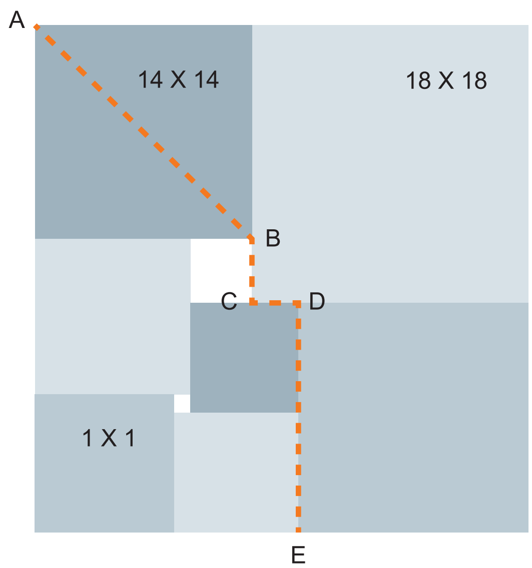


Figura 8

Atividade 12

Observando as informações e a Figura 8 anterior, veja se é possível calcular:

a) A medida do segmento AB.

b) O comprimento do trajeto ABCDE.

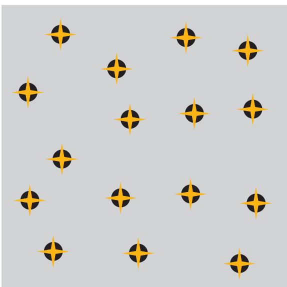
c) A medida da grande área plana retangular.

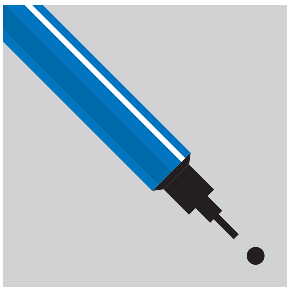
Professor, após tantas atividades, veja por onde anda a nossa família de migrantes. Após alguns anos, Bruno, o filho mais velho da família de migrantes, começou a trabalhar no projeto para uma casa própria. Ele possui muita habilidade para trabalhar com construções, pois adquiriu experiência trabalhando como ajudante de pedreiro. Podemos utilizar os nossos conhecimentos geométricos e ajudá-lo nesta construção.

Para iniciar esta Atividade, vamos rever alguns conceitos[4]

Podemos ilustrar com as seguintes idéias para entender alguns conceitos primitivos em Geometria:

O Ponto pode ser representado por uma estrela, um pingo de caneta, um furo de agulha, etc.


Estrelas


Caneta

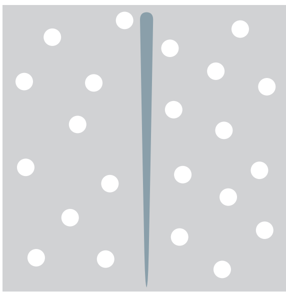

Agulha

Figura 9

4.Estas imagens foram retiradas do site: http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/geometria/geo-basico.htm#m112a02

A Reta pode ser representada por um fio esticado, lados de um quadro, etc.

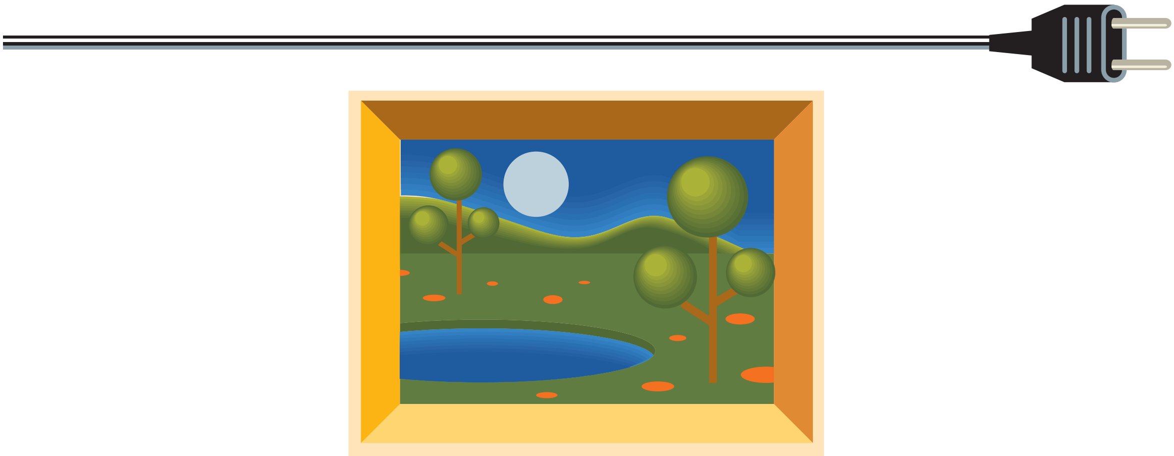


Figura 10

O Plano pode ser representado por um quadro negro, pela superfície de uma mesa, etc.

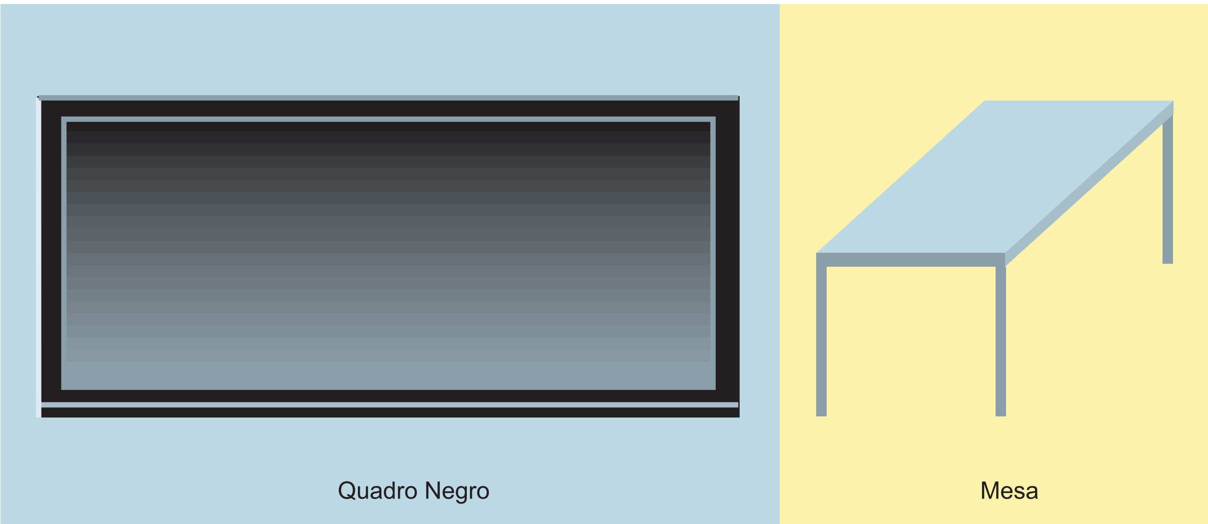


Figura 11

Notações de Ponto, Reta e Plano: as representações de objetos geométricos podem ser realizadas por letras usadas em nosso cotidiano, da seguinte forma:

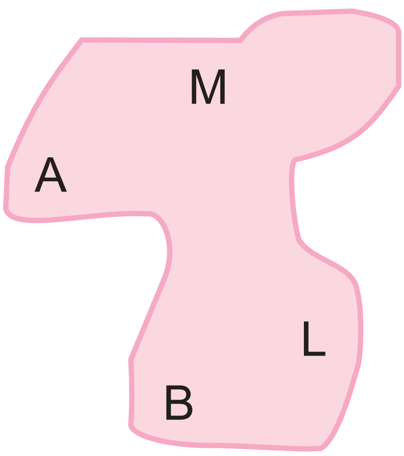


Figura 12

Pontos A, B, L e M representados por letras maiúsculas latinas.

Retas r, s, x, p, q, u, v representadas por letras minúsculas latinas.

Planos Alfa, Beta e Gama representados por letras gregas minúsculas. Plano Alfa (rosa), Plano Beta (azul) e Plano Gama (amarelo).

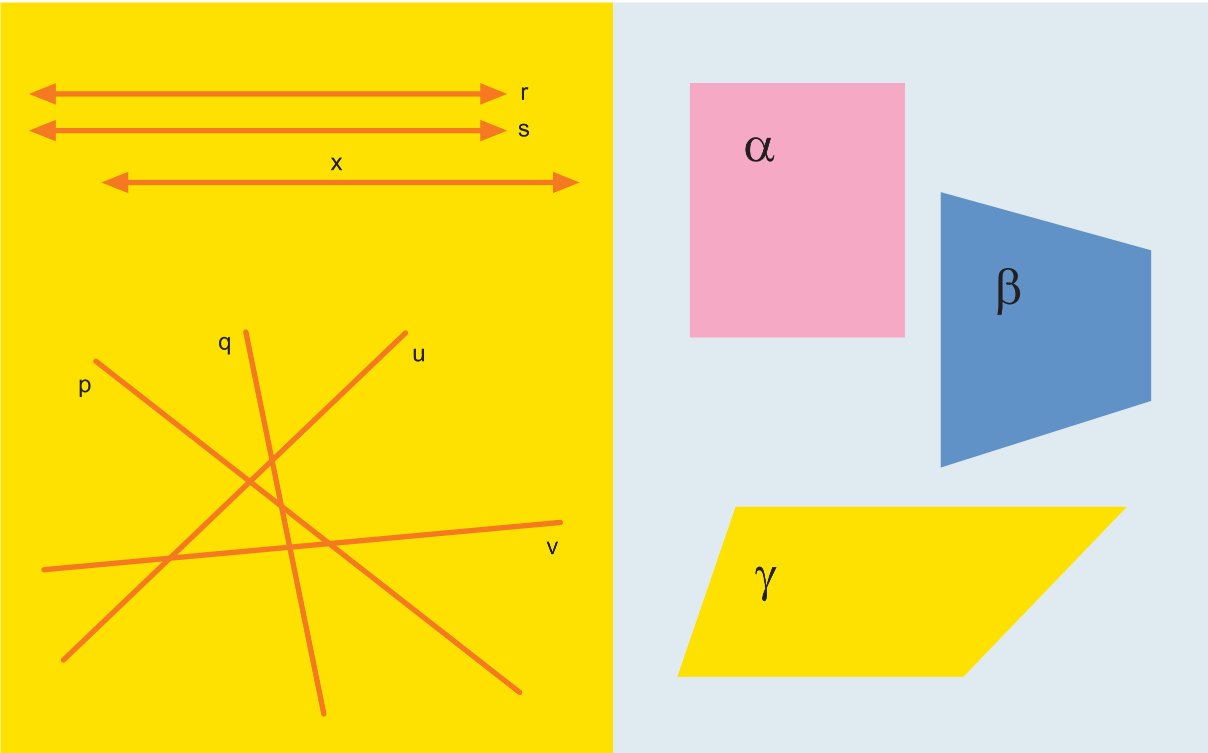


Figura 13

Atividade 13

Para complementar o estudo sobre esses conceitos, é interessante uma pesquisa sobre reta, semi-reta e segmento de reta. Após a pesquisa, preencha a ficha abaixo:

Reta, semi-reta e segmento de reta – Como diferenciá-las? Agora é com você!

Reta: ____

Semi-reta: ____

Segmento de reta: ____________________________________

Faça algumas reflexões sobre a adequação conceitual e a adequação didática destas noções.

____

____

____

____

Professor, neste ponto é interessante refletir sobre o significado de conceito e representação, pois na verdade as imagens que usamos são representações de um ponto, de uma reta e de um plano, uma vez que ponto, reta e plano são noções primitivas adotadas sem definição, como afirmam Dolce e Pompeu em seu livro Fundamentos de Matemática Elementar (1980). De cada um desses entes geométricos, temos um conhecimento intuitivo decorrente da experiência e da observação.

Após relembrarmos essas noções básicas, vamos retomar a proposta de Bruno em seu projeto de construção de uma casa:

A primeira coisa que Bruno fez foi localizar uma ilustração de uma pequena casa que há muito tempo tirou de uma revista e guardou imaginando que um dia realizaria o sonho de construir a sua própria casa.

Figura 14

Vamos ajudar Bruno a fazer o transporte de segmentos e ângulos. Começaremos pelos segmentos.

Transporte de segmentos:

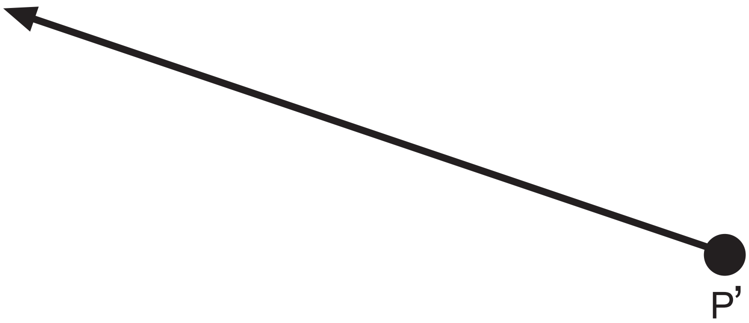
1º passo
Observe o segmento AB na Figura 14. Agora, trace uma reta r qualquer e marque nela um ponto A′ (correspondente a A).

2º passo
Abra o compasso com as pontas em A e B.

3º passo
Com a mesma abertura, centrando o compasso em A′, obtenha B′ correspondente a B.

Transporte de ângulos:

1º passo
Trace uma semi-reta qualquer e marque P′ na origem.



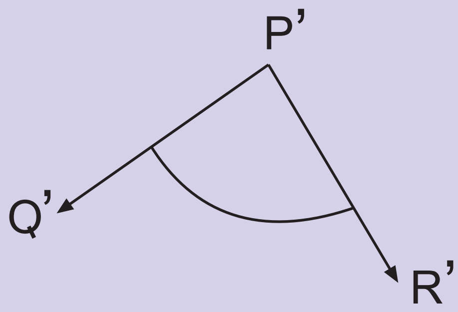
2º passo
Na Figura dada, centre o compasso em P e trace um arco que toque os dois lados do ângulo em Q e R.

3º passo
Centre o compasso em P′ e, com a mesma abertura, repita o arco e marque Q′.

4º passo
Volte à Figura inicial e abra o compasso de Q a R.

5º passo
Com a mesma abertura, centre o compasso em Q′, marque R′ e trace a semi-reta $\overline{P'R'}$.

O ângulo QPR representa o ângulo transportado da figura inicial.



Atividade 14

Com essas noções de transporte de segmentos e ângulos, você já é capaz de reproduzir a Figura 14.

Professor, caso você sinta dificuldades, retome todos os passos acima, transportando todos os segmentos e todos os ângulos da Figura 14.

Atividade 15

Agora vamos assumir o papel de arquitetos, ajudando Bruno a projetar a sua casa. Vamos construir a planta baixa da casa. Para isso, precisaremos de:

- papel quadriculado;
- lápis, borracha e régua;
- criatividade e conhecimento.

Em uma das Unidades anteriores, você teve a oportunidade de ver uma planta baixa. Esta forma de representação do espaço aparece comumente em jornais, em anúncios de vendas de apartamentos. Aproveite esta oportunidade para folhear os jornais de circulação em seu município e localizar alguns projetos de apartamentos expostos em anúncios de prédios que estão em construção e com unidades colocadas à venda.

A planta baixa é utilizada para mostrar as formas e as dimensões de cada ambiente, seja um apartamento, uma casa, um quarto, uma cozinha. É como se olhássemos uma casa de cima, sem o telhado.

Usando a escala 1 cm: 1 m, desenhe usando a régua no papel quadriculado um terreno retangular, medindo 15 m por 24 m. Neste terreno, você vai fazer a planta baixa de uma casa térrea, de aproximadamente 120 m^2, contendo três dormitórios, sala, cozinha, banheiro e área de serviço.

Deixe um recuo de 4 m na frente para o jardim ou entrada de carro. Reserve 2 m de cada lado da casa para passagens laterais.

Não se esqueça de que ao fazer o projeto é preciso imaginar como ficará a casa depois de pronta.

Será funcional? Arejada? Ensolarada? Espaçosa? A circulação entre os cômodos ficará boa? A área livre será agradável?

Um recado para sala de aula

Professor, é sempre importante aproveitar ao máximo as situações propostas. Assim pensamos que é possível explorar algumas situações-problema, no contexto da família de migrantes, em que estejam presentes os conceitos de múltiplos e divisores.

Relembrando múltiplos e divisores

Estes são conteúdos muitas vezes considerados sem significado para os alunos, mas dependendo da forma como são explorados em sala de aula, podem tornar-se um espaço de reflexão sobre as relações entre os números.

Atividade 16

Retomando a Tabela 2 da Atividade 3 – Trabalhando com informações – vamos pensar na seguinte situação:

Horário de saída e de chegada de ônibus da empresa BOA VIAGEM

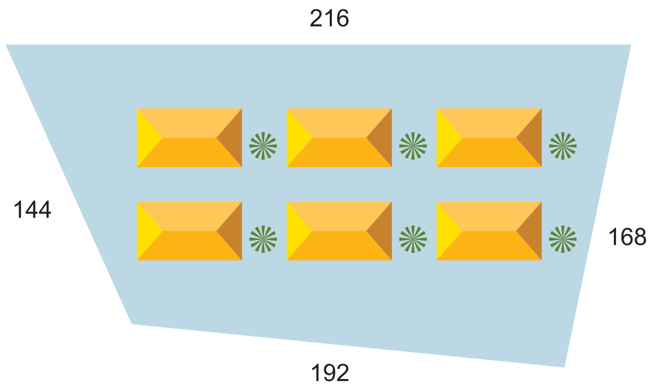
Trajeto	Horário de saída	Horário de chegada
Teresina a Salvador	8 h 10	21 h 15
Salvador a Vitória da Conquista	21 h 20	4 h 10
Vitória da Conquista a Belo Horizonte	4 h 20	12 h 30
Belo Horizonte a São Paulo	12 h 40	18 h 50

Supondo que um ônibus parta de Teresina a Salvador a cada três horas, de Teresina para Vitória da Conquista a cada seis horas e de Teresina para Belo Horizonte a cada oito horas. Em um determinado dia, às sete horas da manhã, partiram ônibus para essas três cidades, ao mesmo tempo. Após quantas horas esta coincidência voltará a ocorrer?

Atividade 17

No bairro onde se encontra o terreno que a família Lima comprou para construir a casa, irão ser plantadas árvores. Pense na situação abaixo e relembre os seus conhecimentos sobre múltiplos e divisores.

A Figura abaixo mostra a planta do bairro cujas divisas medem 144, 168, 192 e 216 metros. O proprietário deseja plantar coqueiros ao longo das divisas, de modo que a distância entre cada coqueiro e o seguinte seja a maior possível. Calcule quantos coqueiros são necessários para o plantio (adaptada – Bianchini, 2002).



Atividade 18

O Sr. João está trabalhando em uma serralheria. Ele tem duas barras de ferro, uma de 180 cm e outra de 150 cm de comprimento, e precisa cortá-las em pequenos pedaços, todos do mesmo tamanho e com o maior comprimento possível.

a) Qual deve ser o comprimento de cada pedaço?

b) Quantos pedaços o serralheiro vai obter?

Atividade 19

Agora é com você! Produza duas situações: uma envolvendo o m.m.c entre (2, 4, 5) e outra com o m.d.c entre (12, 18, 36).

Resumindo

Nesta Seção, os conteúdos de Matemática trabalhados foram:

- Sistema de coordenadas cartesianas – noções de paralelismo e perpendicularismo.
- Representação e localização de pontos no plano cartesiano.
- Interpretação de posição e deslocamentos no plano (pontos, direção, sentido, distância, ângulo).
- Movimentação de uma figura no plano por meio de reflexões e translações.
- Ampliação de figuras.
- Construção de croquis com o auxílio de régua.
- Aplicação do Teorema de Pitágoras.
- Múltiplos e divisores.

Seção 3

Transposição didática: sistema de coordenadas cartesianas, posição e deslocamento no plano, construções com régua e compasso, múltiplos e divisores

Objetivo da seção

- Conhecer e produzir situações didáticas envolvendo os conceitos: sistema de coordenadas cartesianas, posição e deslocamento no plano, construções com régua e compasso, múltiplos e divisores e todos os aspectos relevantes para o domínio e a operacionalização deste conceito pelos alunos em situações cotidianas.
- Retomar as noções de currículo em rede, campos conceituais e conhecimento em ação presentes em diferentes situações de aprendizagem.
- Rever, no caso específico do sistema de coordenadas cartesianas, a possibilidade de explorar os conceitos que fazem parte de um mesmo campo conceitual.
- Compreender a Educação Matemática integrada à formação global do aluno, principalmente em relação à habilidade de localizar-se no espaço.
- Analisar propostas de trabalho que exijam do aluno o uso do instrumento de Geometria como uma alternativa na resolução de situações-problema.

Nesta Seção, serão consideradas atividades que deverão ser desenvolvidas em sala de aula, envolvendo os conceitos de: sistema de coordenadas cartesianas, posição e deslocamento no plano, construções com régua e compasso, múltiplos e divisores.

Para iniciarmos o nosso trabalho, vamos refletir sobre alguns pontos relevantes em nossa proposta didática que devem ser considerados no planejamento de atividades em sala de aula.

Aprendendo sobre Educação Matemática

Currículo em rede, campos conceituais e conhecimentos significativos

- Você conseguiria fazer um mapa conceitual dos conceitos relacionados ao sistema de coordenadas cartesianas?

Quando você trabalha com conceitos que fazem parte do mesmo campo conceitual, isto pode facilitar a compreensão, pois permite ao aluno visualizar a inter-relação entre os conceitos.

Por exemplo: como vimos nas Atividades propostas na Seção 1, em uma situação em que você exija do aluno a mobilização de conceitos relacionados ao sistema de coordenadas cartesianas, é possível explorar múltiplos conceitos e as relações entre eles, tais como: retas perpendiculares ao traçar os eixos ortogonais, retas paralelas, localização e deslocamento no plano como reflexão e translação, etc.

- Ao contrário de trabalhar com conteúdos estanques e compartimentados torna-se mais produtivo propor situações em que vários conceitos interligados podem ser explorados.
- Explorar conceitos em rede permite que o aluno resgate conteúdos que foram trabalhados e que talvez não tenham sido bem compreendidos e, no momento em que precisam ser mobilizados em ação, ganham um novo significado.

Por exemplo, o trabalho com as coordenadas cartesianas sobre a superfície de um mapa possibilitará ao aluno compreender melhor as coordenadas geográficas. E, ainda, para construir a planta de uma casa, observando um modelo como no caso do Bruno, estudado nesta Unidade, o aluno terá a oportunidade de fazer o transporte de ângulos e segmentos, e esta atividade poderá adquirir um novo significado.

Nesta Seção, vamos discutir algumas possibilidades de trabalho com o sistema de coordenadas cartesianas, posição e deslocamento no plano, construções com régua e compasso, múltiplos e divisores.

Professor, algumas sugestões aqui apresentadas irão contribuir para a elaboração do seu planejamento de aula. Lembre-se de que é importante articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, o que ampliará a compreensão por parte do aluno.

Um excelente recurso didático que poderá enriquecer as suas aulas é a utilização do Logo, que é uma linguagem de programação com a qual se constroem programas. Estes geram desenhos geométricos na tela do computador. Ao construí-lo, o aluno organiza o pensamento e desenvolve o seu raciocínio lógico, além de aprender conceitos básicos de Geometria. Este programa poderá ser utilizado na construção de ângulos. É gratuito, e você poderá baixá-lo no endereço: www.mat.ufrgs.br/~edumatec/ (site de um grupo de pesquisa da Universidade Federal do Rio Grande do Sul).

Sistema de Coordenadas Cartesianas

É importante considerar que, ao se trabalhar este conceito, deve-se buscar situações de aprendizagem que levem o aluno a resolver problemas de deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo, nas noções de direção e sentido de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo, elementos fundamentais para a constituição de sistema de coordenadas cartesianas[4].

Sabe-se que em situações cotidianas a falta de habilidade em ler e utilizar efetivamente guias, mapas e plantas pode causar grandes dificuldades, e estas situações em algumas propostas ficam distantes da sala de aula. Por exemplo, para entender fatos e notícias veiculados em televisão, jornais e revistas, é essencial localizar pontos do mapa do Brasil e do mundo. Para acompanhar o trajeto de um ônibus e decidir qual a melhor opção de transporte, de acordo com a sua necessidade, é importante saber ler um guia.

4. Retirado dos PCN.

Na exploração de diferentes situações em que os mapas representam macroespaços ou representam uma localização mais específica, o trabalho com a construção da planta de um bairro ou de uma quadra poderá tornar significativo para o aluno o estudo das coordenadas cartesianas, e, como vimos, este levará também uma maior compreensão das coordenadas geográficas.

A construção da planta de uma casa, como vimos, tanto contribuirá para o desenvolvimento de habilidades de transporte de ângulos e segmentos, quanto para a observação de relações entre tamanhos, proporcionalidade entre medidas, o que remeterá à noção e à utilização do conceito de escala, além de medidas de área, volume e comprimento.

Ao se pensar no sistema de coordenadas cartesianas representado por uma malha quadriculada, existe a possibilidade de exploração de atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais e com a nossa experiência em sala de aula, isto permite o desenvolvimento de uma Geometria mais dinâmica, com figuras em movimento, sendo possível realizar a reflexão, a translação e a ampliação de figuras.

Atividade 20

Peça aos alunos que pesquisem, em livros de Geografia, jornais e revistas, as cidades das regiões Norte e Nordeste nas quais ocorrem os maiores índices de casos de emigração, ou seja, em que as pessoas mudam para outros estados em busca de melhor qualidade de vida.

Com estes dados, peça a eles que construam uma tabela e elaborem situações-problema pensando nas dificuldades enfrentadas pelos migrantes: o deslocamento, a localização em outro município, a construção de um novo lugar para morar, entre outros problemas.

Construção com régua e compasso

É comum, ainda nos dias atuais, encontrar, em algumas propostas de trabalho, certa negligência com relação ao pensamento geométrico, principalmente quando se trata da utilização de ferramentas para a construção de ângulos e outras figuras planas. Sabe-se que, pelo fato de a Geometria ter sido colocada em segundo plano nas propostas pedagógicas, alguns de nós, professores, não temos familiaridade com esta parte da Matemática e que, por este motivo, não nos sentimos à vontade para explorar estes conteúdos em sala de aula.

É preciso então que busquemos formas de superação destas lacunas em nossa formação e que enfrentemos o desafio de criar e selecionar atividades que venham a ser significativas para o aluno. A construção de figuras com régua e compasso irá contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico, na medida em que auxiliará na compreensão de conceitos geométricos, de propriedades de figuras geométricas, no desenvolvimento de habilidades de traçado de triângulos, quadriláteros e outros polígonos e no transporte de ângulos e segmentos. Essas atividades estimulam a criatividade e desenvolvem atitudes de organização, de limpeza e de valorização da beleza e da harmonia. O livro de 7ª série de Luiz Roberto Dante, da Coleção Tudo é Matemática, apresenta algumas atividades interessantes no que se refere a construções geométricas.

Atividade 21

Peça para os alunos criarem diferentes tipos de compassos com material de sucata.

Múltiplos e divisores

É importante que o trabalho de múltiplos e divisores não fique restrito à apresentação de diferentes técnicas ou de dispositivos práticos que apenas conduzem o aluno a encontrar mecanicamente o m.m.c e o m.d.c entre dois números naturais, sem, no entanto, realmente compreender em que situações-problema esses conceitos podem ser utilizados.

A idéia de múltiplos e divisores deverá ser colocada por meio de situações-problema, considerando que estes conceitos são uma ampliação do campo multiplicativo. É importante possibilitar a descoberta de relações e de regularidades que ampliam a compreensão acerca dos números.

Em situações-problema contextualizadas, os alunos poderão perceber padrões e regularidades de seqüências, chegando à seqüência dos múltiplos de um número e às primeiras generalizações.

Atividade 22

Professor, estimule os alunos a inventarem seqüências de múltiplos e a fazerem generalizações. Traga essas produções para a sessão presencial.

Resumindo

Retomamos as noções de currículo em rede, campos conceituais e conhecimento em ação presentes em diferentes situações de aprendizagem, considerando que articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos ampliará a compreensão por parte do aluno.

Analisamos algumas propostas de trabalho que solicitam do aluno o uso do instrumento de Geometria como uma alternativa na resolução de situações-problema.

Vimos ainda que:

- É importante propor situações de aprendizagem que levem o aluno a resolver problemas de deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo, nas noções de direção e sentido de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo, elementos fundamentais para a constituição do sistema de coordenadas cartesianas.
- A construção de figuras com régua e compasso contribui para o desenvolvimento do pensamento geométrico, pois auxilia na compreensão de conceitos, de propriedades de figuras, no desenvolvimento de habilidades de traçado de triângulos, quadriláteros e outros polígonos e no transporte de ângulos e segmentos.
- Os conceitos de múltiplos e divisores são uma ampliação do campo multiplicativo. Situações–problema envolvendo estes conceitos possibilitam a descoberta de relações e de regularidades que ampliam a compreensão acerca dos números.

Leituras sugeridas

MONTEIRO, A; POMPEU Júnior, G. *A Matemática e os temas transversais*. São Paulo: Moderna, 2001 – (Educação em pauta: temas transversais).

O livro traz algumas reflexões sobre transversalidade, ensino de Matemática, Ciência e Cultura. Aborda questões como: O que significa relacionar a Matemática ao cotidiano? O que se entende por cotidiano? Qual a relação entre a Etnomatemática e a proposta de transversalidade? Os autores apresentam algumas sugestões de projetos, onde colocam em prática a Modelagem Matemática, explorando conexões entre a Matemática e outras áreas de conhecimento.

ROSA, E. *Em busca das coordenadas*. Coleção A descoberta da Matemática. 11ª ed. São Paulo: Ática, 2001.

O livro conta a estória de alguns amigos que fazem uma viagem espacial e que, para conseguir voltar para casa, usam as coordenadas cartesianas. É muito interessante e inclui resumos dos conceitos matemáticos. Toda a estória é ilustrada com desenhos coloridos, apresenta dicas e curiosidades sobre a Matemática, além de trazer um encarte com atividades e desafios.

Bibliografia

BIANCHINI, E. *Matemática*. São Paulo: Moderna, 2002.

BIGODE, A.J.L. *Matemática hoje é feita assim*. São Paulo: FTD, 2000.

COELHO, M.A.; SOARES, L.T. *Geografia do Brasil*. 5ª ed. São Paulo: Moderna, 2002.

DANTE, L.R. *Tudo é matemática*. São Paulo: Ática, 2002.

DANTE, L.R. *Matemática contexto e aplicações*. São Paulo: Ática, 2002.

DOLCE, O.; POMPEU, J.N. *Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo: Atual Editora, 1980.

DOLLFUS, O. *O espaço geográfico*. São Paulo: DIFEL, 1982.

GIOVANNI, J.R. *Matemática Fundamental-Uma nova abordagem*. FTD, 2002.

IMENES, L.M.P.; LELLIS, M. Matemática. 2ª ed. São Paulo: Scipione, 1997.

LONGEN, A. *Matemática: Uma atividade humana*. 1ª ed. Curitiba: Base Editora 2003.

PAIVA, M. *Matemática Conceitos, Linguagem e Aplicações*. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2002.

VASCONCELOS, M.J.; SCORDAMAGLIO, M.T.; CÂNDIDO, S. *Matemática*. Coleção Matemática Ensino Médio. Projeto escola e cidadania para todos. São Paulo: Editora do Brasil, 2004.

Sites consultados

http://www.educacional.com.br/

http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/geometria

http://www.conhecimentosgerais.com.br/geografia

Outras fontes

Dicionário Houaiss.

Texto de referência

Explorando a Geometria da orientação e do deslocamento[5]

Cristiano A. Muniz

Sabemos que, infelizmente, muitos de nós tivemos poucas oportunidades de uma aprendizagem de qualidade no campo da Geometria, de forma que o professor deve, inicialmente, perguntar a si mesmo: tenho buscado no dia-a-dia explorar com meus alunos os conceitos geométricos? Não tenho evitado tratar deste assunto com eles, ficando quase todo o tempo tratando apenas dos números e das suas operações? Tenho insegurança quanto aos conceitos geométricos e receio propor trabalhos implicando construções geométricas? O meu ensino de Geometria tem sido quase que exclusivamente uma memorização de terminologia das figuras e entes geométricos? Busco ver a Geometria fora das formas e figuras?

Discutir a aprendizagem e o ensino da Geometria impõe uma série de desafios, em especial porque a nossa formação geométrica, ao longo da nossa escolaridade, deixou muito a desejar, fazendo com que muitos de nós tenhamos uma representação negativa da Geometria. Ao longo dos nossos estudos, muitos de nós acabamos por desenvolver uma representação desta importante área de conhecimento como sendo de difícil aprendizagem, com conceitos excessivamente complexos, definições desarticuladas de contextos significativos e representações formais distantes das construções dos alunos. Enfim, para muitos de nós, professores, formados nas últimas décadas, a Geometria aparece como um permanente desafio e motivo de perda de sono.

Mas será que tem que ser assim? Não seria a Geometria um campo de conhecimento altamente prático, ligado à nossa vida cotidiana e presente na natureza?

Que tal assistirmos o desenho animado do Walt Disney, no qual o Pato Donald visita o mundo da Matemática ("Pato Donald no País da Matemágica")? Nele vemos de que forma a Matemática aparece no nosso mundo por meio da sua presença obrigatória na natureza e na produção da cultura humana.

Nesta perspectiva, o presente pretende resignificar as concepções acerca do conhecimento geométrico, procurando novas concepções dos conceitos, o processo de sua aprendizagem e o seu valor social e de desenvolvimento humano. Conseqüentemente, é importante que o professor repense a sua práxis pedagógica acerca do papel da Geometria no currículo das séries iniciais.

Infelizmente, são as visões erradas, frutos de experiências escolares negativas, que muitos dos professores trazem para a sala de aula. É necessário buscar uma nova forma de conceber o "fazer Geometria" no espaço escolar, sendo este um dos grandes objetivos da Educação Matemática hoje.

---

5. Adaptação do texto Espaço e Forma do Professor Cristiano Muniz –FE/UnB.2004.

A atual desvalorização do ensino da Matemática na Escola Básica no Brasil (Pavanello, 1989) está bastante associada à formação geométrica do professor. Assim, não cabe a ninguém culpar o professor pelos problemas existentes, mas sim investir na formação inicial e continuada deste profissional, procurando resgatar o significado cultural da Geometria, bem como a sua importância no desenvolvimento humano, na produção da cultura e na constituição das ciências.

A História da Matemática associada à própria História da Geometria: o sentido etimológico de "geo-metria"

A origem da Matemática nos leva ao encontro da construção filogenética do conhecimento da Geometria. Desde os primórdios da civilização humana, quando o homem passou à condição de sedentário – fixando sua residência, iniciando sua produção agrícola, confinando animais e produzindo instrumentos e utensílios, inicia-se a produção de novas ferramentas mentais e de representação utilizadas para agir sobre a natureza e representá-la, no sentido tanto da sobrevivência humana quanto da sua transcendência. Segundo a História da Matemática, podemos constatar como o homem começa a utilizar bem cedo figuras geométricas para representar os astros, o raio, os animais, as plantas e os seus deuses. Veja, professor, que até hoje ainda observamos, primordialmente, as regularidades geométricas nas tecelagens de cestos, na construção de peças de argila, etc.

Assim, a Geometria aparece inicialmente atrelada às necessidades de resolução de problemas para demarcar a terra, prever o estoque de água e construir instrumentos de trabalho. Em suma, os conceitos geométricos surgem como ferramentas para que o homem aja racionalmente no processo de transformação do seu mundo.

Do grego, *geo-metria*, que significa *terra-medida* – a medida da terra – pois, em situações de delineamento da terra tanto pelos egípcios como pelos mesopotâmeos, o homem inicia a construção do conhecimento nesta área. Bem mais tarde, por volta do século V a.C., os gregos buscaram estudar esses conceitos, transformando-os em objetos mais abstratos, em ferramenta de construção do conhecimento lógico-formal. A história conta que Pitágoras esteve viajando na Ásia, investigando a utilização de ferramentas geométricas pelos egípcios. O conhecimento produzido pela abstração desta Geometria mais pragmática forneceu grande contribuição para o desenvolvimento da Matemática.

Acontece que no currículo escolar observa-se uma forte priorização da Geometria formal, com significativo abandono da Geometria como ferramenta de resolução de problemas da vida concreta. Na escola, com a excessiva valorização dos aspectos formais da Geometria, constata-se um distanciamento entre o seu ensino e as situações de vida que dão origem e sentido aos conceitos e procedimentos geométricos. Portanto, na formação do professor, é necessário resgatar uma Geometria mais significativa, impregnada de motivação sócio-cultural. Isto implica, por parte dos professores, durante seu processo formativo, a descoberta de outros aspectos epistemológicos desta área de conhecimento, para o desenvolvimento de uma postura diferente em relação a ela. Assim, será possível que estes profissionais, a partir de um novo paradigma, concebam novas e diferentes formas de mediação pedagógica da Geometria na sala de aula, nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Na verdade, há uma grande diferença entre aprender Álgebra ou Análise e aprender Geometria. Teóricos da epistemologia das ciências matemáticas, tal como Poincaré (1968), francês do início do século XX, apoiados em Kant (*apud* Piaget, 1947), já diziam que enquanto a aprendizagem da Álgebra se sustenta em um "olhar para dentro", a aprendizagem de conceitos geométricos apóia-se em um "olhar para fora".

É importante refletir sobre tal afirmação e suas implicações de ordem tanto psicológica quanto didática. Enquanto a fonte da produção dos conhecimentos algébricos sustenta-se na lógica, na reflexão, na abstração de conceitos formais, ao contrário, a fonte primária e primeira da construção do conhecimento geométrico pelo homem é a observação do seu meio ambiente e a ação efetiva na conservação e na transformação da natureza na busca da própria preservação, proliferação, sobrevivência, desenvolvimento e transcendência da vida humana.

Observar a natureza, os produtos culturais e agir sobre eles, produzi-los, reproduzi-los, transformá-los e representá-los mentalmente, criar projetos mentais e buscar concretizá-los deve, nesta perspectiva teórica, ser a fonte geradora de saber geométrico, que insere grande importância para a didática de sala de aula: **aprende-se Geometria pela observação e pela ação efetiva sobre o mundo real**. Ninguém pode construir conceitos geométricos pela simples contemplação inerte do mundo. É sendo agente ativo sobre o mundo que podemos construir, nas séries iniciais, os conceitos fundamentais da Geometria.

Assim, é necessário discutir como trazer para a práxis pedagógica esta perspectiva que concebe que o aluno deva agir sobre o seu mundo para aprender Geometria. Como conceber uma proposta pedagógica da ação, da representação e da reflexão, permitindo que os conceitos geométricos sejam produtos mentais produzidos pelos próprios alunos, em sua efetiva ação sobre o seu mundo? O debate acerca da aprendizagem da Geometria ainda apresenta um grande desafio tanto para os professores quanto para os pesquisadores, e, por isso, temos o ensino da Geometria como um campo fértil de pesquisa e de debate, impulsionando pesquisadores da psicologia cognitiva e educadores matemáticos à investigação científica deste campo.

Níveis da aprendizagem geométrica: da percepção (nível sensorial), da representação mental (nível simbólico) e da concepção (nível conceitual) e a relação dialógica entre eles

A conceitualização geométrica se realiza em três níveis: da percepção (nível sensorial), da representação mental (nível simbólico) e da concepção (nível conceitual).

Seguindo a lógica do "olhar o mundo e agir sobre ele" como fonte primária da construção do conhecimento geométrico, vamos discutir sobre o desenvolvimento de conceitos geométricos, o que é vital para o conhecimento do professor.

O conceito geométrico aparece em um primeiro estágio atrelado às experiências físicas e sensoriais (tatos, movimentos, olhares) realizadas no mundo físico que nos cerca. Este primeiro estágio é concebido como o **nível perceptivo**, quando os conceitos geométricos surgem e são dependentes dos sistemas sensoriais. Desde bem cedo, a criança, agindo sobre contextos reais e próximos a ela, realiza experiências, levanta hipóteses, planeja ações, avalia resultados e revê posições consideradas importantes na construção dos primeiros conceitos geométricos.

O ato de se “dar à luz”, no momento do nascimento da criança, tem um forte significado geométrico, pois é a real possibilidade de o jovem bebê receber e tratar de novas informações do seu meio, tais como formas, cores, profundidade, proporções. Entretanto, é errado pensar que o conceito em nível sensorial somente está presente no início da infância, pois mesmo no adulto, professor ou não, em situações espaciais, o sistema nervoso central apela inicialmente às estruturas sensoriais. É assim que ao vermos:

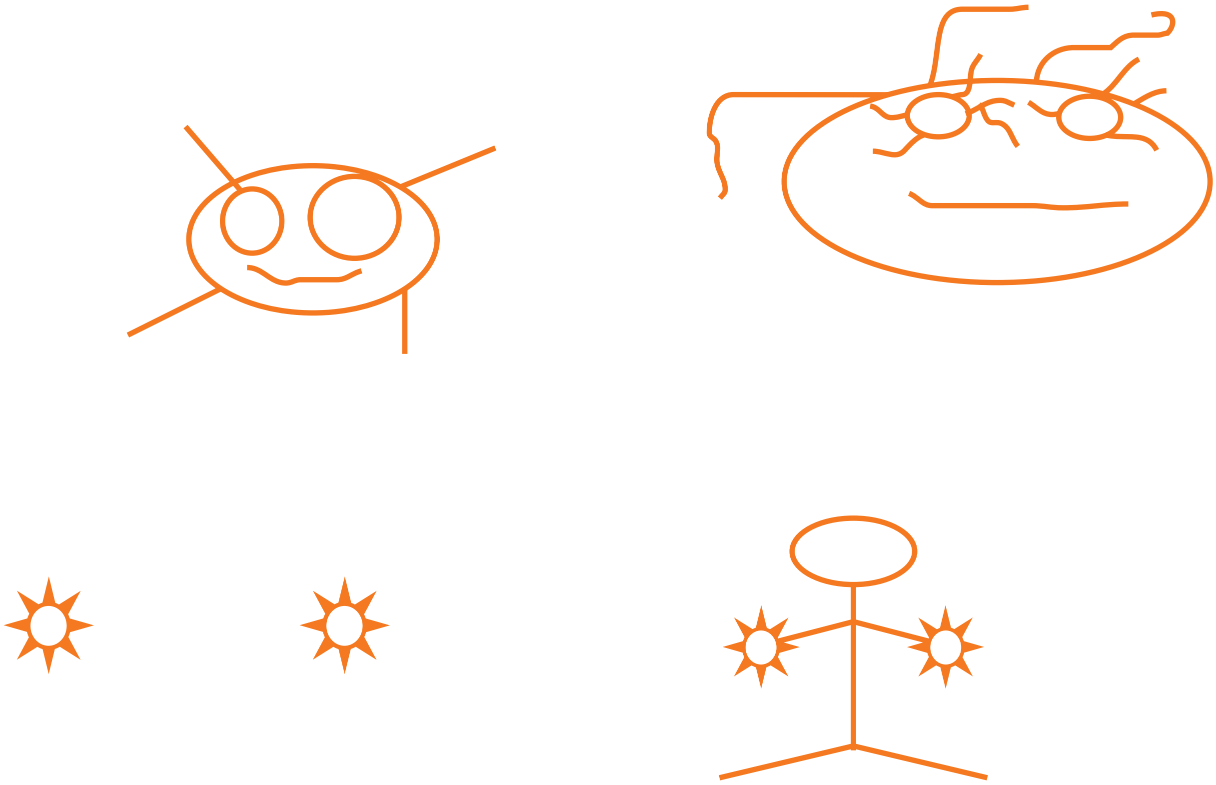
- uma pessoa que vem de longe, ao olharmos, em um primeiro momento, a percebemos como pequena em relação ao nosso tamanho;
- uma linha de trem, em uma grande reta, temos a impressão que ela se encontra em um ponto bem distante.

Tais noções, mesmo sendo frutos da percepção e podendo nos levar a falsos julgamentos acerca da realidade, não são e não podem ser negadas no processo da construção do conhecimento geométrico. Mesmo nas ciências, vemos como tais conceitos são fundamentais, quando dizemos que “duas retas paralelas se encontram no infinito”, quando da utilização do **ponto de fuga** para desenhos em perspectiva. Com isso, queremos dizer (e que fique bem claro) que o conceito geométrico, em nível perceptivo, tem fundamental importância no processo da construção do conhecimento matemático e, por conseqüência, deve ser valorizado e respeitado no processo da aprendizagem escolar da Geometria mediada pelo educador.

Lembre-se de que, ao atravessarmos uma avenida movimentada, não fazemos cálculos, nem traçamos retas paralelas e/ou perpendiculares, e nem utilizamos instrumentos de medidas antes de atravessá-la. No dia-a-dia, para estabelecer estratégias e tomar decisões, a intuição tem papel preponderante, pois, nas ações geométricas corriqueiras, apelamos muito mais aos nossos conceitos perceptivos que aos formais. Assim, a escola deve partir desses conceitos, valorizá-los, colocá-los em xeque, sempre com um ensino sustentado nas experiências sobre o espaço.

Associadas às experiências temos **as representações** mentais: o que o sujeito constrói mentalmente a partir das ações bem ou mal sucedidas. Tais representações têm a ver com a forma como o sujeito concebe mentalmente as suas experiências; com o modo como se dá a interiorização do espaço nas estruturas mentais. Isso nos leva aos objetos geométricos construídos mentalmente que servem como instrumento para as representações mentais do espaço circundante. As formas geométricas são exemplos disso; aparecem como forma de representação do mundo e dos objetos a ele pertencentes. Uma vez concebidos no sistema nervoso central, os objetos geométricos são por ele utilizados para assimilação e representação do espaço. Círculo, quadrado, retângulo, esferas e pirâmides passam a servir para um novo olhar sobre a natureza. Utilizamo-nos das formas geométricas para representar o mundo à nossa volta e, por meio de sua representação, expressar nossos pensamentos e sentimentos. Essas representações servem, também, a partir de certo nível de desenvolvimento, como instrumento de nosso pensamento matemático.

O processo presente, via desenho, nas representações das crianças, evolui da garatuja (traços circulares, disformes, sem significados fixos, mesmo para aquele que os produz) às figuras esquemáticas, passando pela mandala – célula-mãe da representação (sol, corpo humano, cabeça, olhos, membros, etc.).



A escola deve levar em conta o desenvolvimento infantil, uma vez que sendo a representação via desenho uma das dimensões da Geometria, a competência da criança em mobilizar tal representação depende, dentre outros fatores, do desenvolvimento da sua representação por meio de desenhos.

Terminada a experiência, o que fica de mais significativo em termos de aprendizagem são os conceitos construídos na experiência – aquilo que a experiência permite ao aluno conceber em termos geométricos. A ação internalizada passa a fazer parte da estrutura conceitual, constituindo-se nas ferramentas utilizadas pelo sujeito para resolver problemas. Veja, professor: o que o sujeito concebe das experiências é parte essencial da aprendizagem. Portanto, a aprendizagem geométrica é alicerçada por esta tríade construída a partir da ação do sujeito no seu mundo: o que percebe, o que representa e o que concebe da experiência. A pedagogia deve levar em conta a tríade na ação educativa.

Os conceitos geométricos e o papel da ação sobre o meio

A nossa discussão acaba por canalizar toda a argumentação acerca da aprendizagem e do ensino da Geometria para a importância da ação efetiva do sujeito para que haja a construção de conceitos: é na ação efetiva, refletindo e representando-a, que construímos os nossos conceitos geométricos. Isso traz duas conseqüências importantes: uma de ordem psicológica e outra de ordem pedagógica, ambas vitais para a formação do professor.

A **dimensão psicológica** deste aspecto da ação na construção de conceito geométrico vai ao encontro da perspectiva teórica de Vygotsky (1987) sobre o papel da ação do sujeito no desenvolvimento conceitual (processo da conceitualização), assim como reforça a idéia do conceito como ferramenta para a ação transformadora do meio pelo sujeito. Outra forma de expor essa idéia seria dizer que, em um primeiro momento, a ação sobre o meio permite ao sujeito a construção de conceitos, e, em um momento posterior, o conceito construído será ferramenta cognitiva essencial para futuras intervenções do sujeito em seu meio. Entre esses dois momentos, segundo o referido teórico, existe um complexo processo de estruturação mental, via funções superiores do sistema nervoso, que constitui o processo de conceitualização. Esse conhecimento é importante para o professor, uma vez que ele deve ter em mente que não é na ação imediata, nem em curto período de tempo e tampouco por meio de atividades restritas ao contexto didático em sala de aula ou via livro didático que a criança constrói seus conceitos geométricos. Podemos dizer, ainda com base em Vygotsky, que não é meramente memorizando terminologias que se desenvolverá o processo de conceitualização geométrica.

A **dimensão pedagógica** desta discussão nos leva à necessária constituição de um currículo sustentado na ação, reflexão e representação *multimediatizada*. Não é, portanto, fazendo com que o aluno fique sentado na carteira, permanecendo entre quatro paredes e lendo o livro didático que o educador participará eficazmente do processo de conceitualização geométrica. Ao contrário, um contexto que favoreça tal processo deve privilegiar, dentre outros, aspectos como:

- extrapolar o espaço da sala de aula;
- resgatar o corpo como o elemento vital na orientação e no deslocamento espacial;
- delimitar, demarcar, comparar, medir e representar, via desenho, diversos espaços de significado sócio-cultural para o aluno (moradia, esporte, escola, etc.);
- desmontar, projetar e construir embalagens;
- trabalhar com jogos tipo quebra-cabeças, explorando a noção de superfície e sua conservação;
- explorar as noções de espaço presentes nos esportes;
- desenvolver jogos por meio dos quais as noções de espaço sejam centrais, tais como finca, bolinha de gude, queimada, pipa (inclusive a confecção delas);
- trabalhar com croquis, plantas, mapas;
- valorizar o papel do desenho no processo de representação de espaços.

Essas são apenas algumas idéias de conseqüências pedagógicas da valorização da ação efetiva do aluno sobre seu espaço na construção de conceitos geométricos. Mais do que "reproduzir" tais idéias, cabe ao professor observar os interesses e as situações que envolvem o espaço e a sua representação para, então, propor atividades mais significativas para o aluno.

Concepção ampliada da Geometria e do seu ensino: mais amplo que a aprendizagem de formas geométricas

Na década de 80 do século passado, as pesquisas coordenadas pela Professora Nilza Bertoni, no Departamento de Matemática da Universidade de Brasília (Bertoni, 1987), já apontavam para a necessidade de uma revisão das concepções da Geometria na Escola Básica. Bertoni e sua equipe de pesquisadores levantavam a necessidade da ampliação das categorias do conhecimento geométrico, revelando que uma Geometria restrita às formas geométricas é insuficiente diante da amplitude do conhecimento que a Geometria suscita.

Naquela época, os relatórios de pesquisas indicavam a forte presença de uma Geometria Euclidiana no currículo, na forma de teoria lógico-dedutiva. A partir da consideração das necessidades do indivíduo e do seu contexto sócio-cultural contemporâneo, o referido grupo de pesquisa propôs três categorias para o estudo da Geometria no currículo, de forma a ampliar a visão desta, permitindo assim tratar de conceitos geométricos até então desconsiderados pela escola.

> A primeira é a **Geometria das Formas e das Propriedades de Construção**, onde seu principal objetivo é o conhecimento das formas presentes no mundo real: como elas são realmente, como nós as vemos e como nós as representamos. Esta categoria engloba tópicos como exploração do espaço, perspectiva, sombra, ângulo de visão, etc.
>
> A segunda categoria é a da **Geometria das Medidas e Proporções**, que engloba, entre outros aspectos, tópicos como decomposição e equivalência de figuras, comprimentos, áreas e volumes, semelhanças, escalas e mapa.
>
> A terceira categoria foi denominada como **Geometria da Orientação**. Ela visa suprir as necessidades cada vez mais crescentes do homem do mundo atual, tais como a de saber se orientar em cidades, estradas, regiões, países; e a de saber decodificar mapas, etc. Ela abrange ainda tópicos relacionados à Geografia: o conhecimento dos movimentos dos astros e sua incorporação ao cotidiano e ao calendário anual." (Bertoni, 1987, p. 1-2).

Fomos buscar as propostas desta pesquisa por considerar que elas se mostram cada vez mais vigorosas e atuais. Levar em conta tais categorias implica uma abertura do currículo de Geometria em uma perspectiva mais coerente com os desafios do mundo presente e futuro. Entretanto, requer dos professores em formação inicial e continuada a descoberta de novos aspectos da Geometria até então ausente no currículo.

Neste texto, vamos priorizar as atividades relacionadas à **Geometria da Orientação** e do deslocamento, propondo algumas atividades que devem ter múltiplas funções – atividade de formação, exercícios, atividade de ressignificação do conhecimento, fomento para reflexão epistemológica e metodológica, atividades em sala de aula, propostas a serem executadas junto aos alunos, etc. Enfim, como elemento transformador do currículo vigente, como promotor de novas experiências na práxis pedagógica a serem discutidas no corpo docente da escola, extrapolando o espaço da formação.

Geometria da orientação e do deslocamento: o próprio corpo como referência

Quantos de nós sentimos dificuldade para nos deslocarmos ou nos orientarmos em um *shopping*, para interpretarmos um mapa ou uma planta, para desenharmos uma trajetória ou para indicarmos um endereço a uma pessoa?

Isso tem a ver diretamente com a nossa educação geométrica, na qual questões ligadas à orientação e ao deslocamento sempre foram renegadas pela escola. Consideramos que nossos alunos não podem ficar alijados desta tão importante formação geométrica, em especial, visando ao desenvolvimento de suas habilidades e competências no mundo atual.

Toda atividade envolvendo esta categoria implica situarmos nosso próprio corpo em relação ao espaço vivido, representado ou imaginado. A visão do próprio corpo e noções de lateralidade, distância e proporcionalidade estarão presentes em atividades desta categoria. Muitos de nós não sabemos utilizar, com competência, um mapa, em função de não sabermos nos colocar corporalmente em relação ao mapa que representa o espaço vivido. Ainda podemos citar a mobilização de conceitos fundamentais, tais como para frente, para trás, ao lado, para cima, para baixo, pontos cardinais (Norte, Sul, Nordeste...), giros à direita, à esquerda, meia volta, medidas de ângulos como 90°, 45°, etc.

Como fazer para sabermos o que é "para cima" ou " para a esquerda" quando estamos com um mapa na mão?

Na verdade, algumas habilidades são consideradas complexas e não podem ser desenvolvidas em apenas algumas aulas, mas sim por meio de experiências de qualidade realizadas ao longo dos anos escolares, tendo as séries iniciais um importante papel nesta seara. Para tanto, daremos exemplos de algumas atividades a serem desenvolvidas na escola neste sentido:

- brincar de pique-esconde;
- brincar de caça ao tesouro a partir de um mapa;
- explorar jogos envolvendo labirintos;
- fazer a planta da escola;
- fazer o croqui da sala de aula;
- fazer o croqui do quarto de dormir;
- desenhar o trajeto realizado para ir de casa à escola ou vice-versa;
- desenhar trajetos para deslocamentos dentro da escola (como um plano de fuga em caso de incêndio);
- realizar atividades a partir de plantas de croquis;
- explorar croquis e plantas encontradas nos classificados e propagandas de imobiliárias, traçando, na quadra de esporte, com giz, a planta baixa do imóvel em tamanho real;
- realizar um trabalho integrado da Matemática com a Geografia;
- explorar plantas presentes em guias de roteiros de viagem ou de turismo;
- explorar mapas do seu bairro e cidade, identificando locais conhecidos;
- fazer excursões a partir de mapas previamente traçados;
- fazer mapas, representando trajetórias realizadas durante alguma excursão;
- planejar a mudança de posição dos móveis a partir de simulações em desenhos;
- realizar jogos de estratégia em plataforma envolvendo espaços representados e simulados;
- explorar a organização de um supermercado e formas de deslocamento dentro dele ou de *shoppings*;
- representar no papel estratégias de jogos de quadra (como será o deslocamento de cada um).

É necessário que a sala de aula seja um espaço de reflexões acerca das produções geométricas de cada aluno, assim como um ambiente de trocas, fazendo com que cada aluno reflita sobre seus próprios procedimentos ao ver a produção do outro e ao desenvolver um discurso argumentativo acerca das diferentes produções e representações geométricas.

Avaliação do processo de aprendizagem geométrica na escola

Ao tecer algumas reflexões acerca do ensino da Geometria faz-se necessário, ainda, tecer alguns comentários a respeito da avaliação da aprendizagem geométrica em um contexto onde o ensino é fundamentado na ação efetiva do aluno sobre sua realidade.

Descarta-se a perspectiva de uma avaliação estritamente pautada sobre as representações geométricas escritas pelo aluno, afinal, advogamos o tempo todo um trabalho pedagógico em que a ação tem lugar privilegiado e deve ocorrer no contexto da avaliação do desenvolvimento geométrico dos alunos.

A nosso ver, alguns aspectos devem ser considerados no processo de avaliação:

- É na ação efetiva que encontramos o espaço legítimo de avaliação.
- A ação, como espaço de avaliação, deve estar inserida no contexto de resolução de situação-problema sócio-culturalmente significativa para o aluno.
- Não devemos avaliar o desenvolvimento geométrico do aluno somente pelo que representa graficamente no papel, mas também pela sua ação sobre os objetos, sua relação com o seu espaço presente ou distante, assim como a sua capacidade de argumentação lógica.
- Ao invés de buscarmos centrar a avaliação em provas, devemos investir mais na observação das produções geométricas dos alunos na elaboração e na realização de projetos, com interesse especial em suas atitudes favoráveis às atividades geométricas propostas, observando a sua auto-estima e autoconfiança na produção do conhecimento geométrico.
- Não devemos valorizar as terminologias descabidas e desprovidas de significado para os alunos, mas devemos sempre buscar acolher e respeitar as formas destes comunicarem as suas idéias geométricas, indo, pouco a pouco, inserindo na fala e nos textos as definições, de forma tal que a linguagem retrate um desenvolvimento próprio do conhecimento geométrico dos alunos.

Essa mudança requer uma nova postura em relação ao “fazer Geometria” na escola bem diferente daquela pela qual fomos formados. Assim, mudar vai significar um investimento por parte do professor na realização de novas experiências pedagógicas que busquem colocar a ação como o centro da aprendizagem geométrica.

Bibliografia

BERTONI, N. E. (direção). *Módulos/Apostila de Ensino do Projeto um Novo Currículo de Matemática do 1º grau*. Departamento de Matemática-Unb, 1986.

BERTONI, N. E. *Um novo enfoque para o saber matemático do professor:* In Jornada de reflexão e capacitação sobre a Matemática na Educação Básica de jovens e adultos. Brasília: Ministério da Educação, 1995.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto – MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais*, 1996. (http://www.paulofreire.org/proj/pec6par.htm).

NEVES, R.S.P. *A formação de conceitos geométricos no contexto dos projetos de trabalho mediada pelo Cabri Géométre*. Dissertação de Mestrado em Educação pela Universidade de Brasília, 2002.

PAIS, L. P. *Transposição didática*. In: MACHADO, S. (Org.). Educação matemática: uma introdução. São Paulo: PUC, 1999.

PIAGET, J. *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Lausanne, Delachaux et Niestlé, 1947

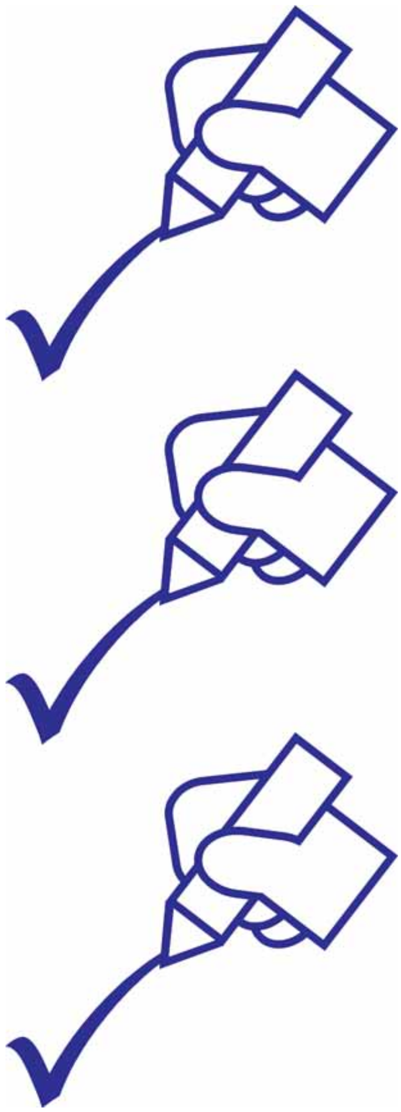
POINCARÉ, H. *La science et l'hypothèse*. Paris : Flammarion, 1968.

POINCARÉ, H. *La valeur de la science*. Paris : Flammarion, 1970.

VYGOTSKY, L. S. *A formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes, 1994.

VYGOTSKY, L. S. *Pensée et langage*. Paris, Medissor : Ed. Sociales, 1995.

Solução das atividades



Solução das atividades

Atividade 1

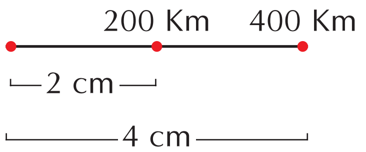
Resposta pessoal.

Atividade 2

a) 1 cm para cada 400 Km.

b 1: 400

$$\frac{1}{400}$$



Uma escala não apresenta unidade de medidas.

Atividade 3

a) 1163+487+849+586=3085.

b) Resposta pessoal.

c) $1650 - x$

$3085 - 100\%$

$3085x = 165000$

$$x = \frac{165000}{3085}$$

$x = 53{,}48\%$

d)

$$\begin{array}{r} 21 \text{ h } 15 \text{ min} \\ - \ 8 \text{ h } 10 \text{ min} \\ \hline 13 \text{ h } 05 \text{ min} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23 \text{ h } 60 \text{ min} \\ - 21 \text{ h } 20 \text{ min} \\ \hline 2 \text{ h } 40 \text{ min} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \text{ h } 30 \text{ min} \\ - \ 4 \text{ h } 20 \text{ min} \\ \hline 8 \text{ h } 10 \text{ min} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \text{ h } 05 \text{ min} \\ 2 \text{ h } 40 \text{ min} \\ + \quad 8 \text{ h } 10 \text{ min} \\ 4 \text{ h } 10 \text{ min} \\ \hline 27 \text{ h } 65 \text{ min} \end{array}$$

ou seja: 28 h 05 min

Atividade 4

Resposta pessoal.

Atividade 5

Limão (-2, 2)
Pinheiros (-3, 0)
Morumbi (-4, -2).
Ibirapuera (-1, -2).
Vila Mariana (0, -2)
Casa Verde (-1, 2)

Atividade 6

B = (30° S, 30° L)
C = (10° N, 40° L)
D = (10° S, 20° W)
E = (30° N, 30° W)
F = (20° N, 20° L)

a) Londres (57°, 0).

b) Brasília (-16°, -47°).

c) São Paulo (-23°, - 46°).

d) Depende de onde você mora.

e) Natal (-5°, -35°).

Atividade 7

Porque esta medida diz respeito aos ângulos centrais de acordo com a posição do ponto na superfície, que define arcos, e não retas. Lembre-se de que a definição, por exemplo, de latitude é "arco do meridiano compreendido entre determinado observador ou determinada localidade e o equador terrestre". (Dicionário Aurélio, 1986, pág. 1013).

Atividade 8

a) Possibilidades

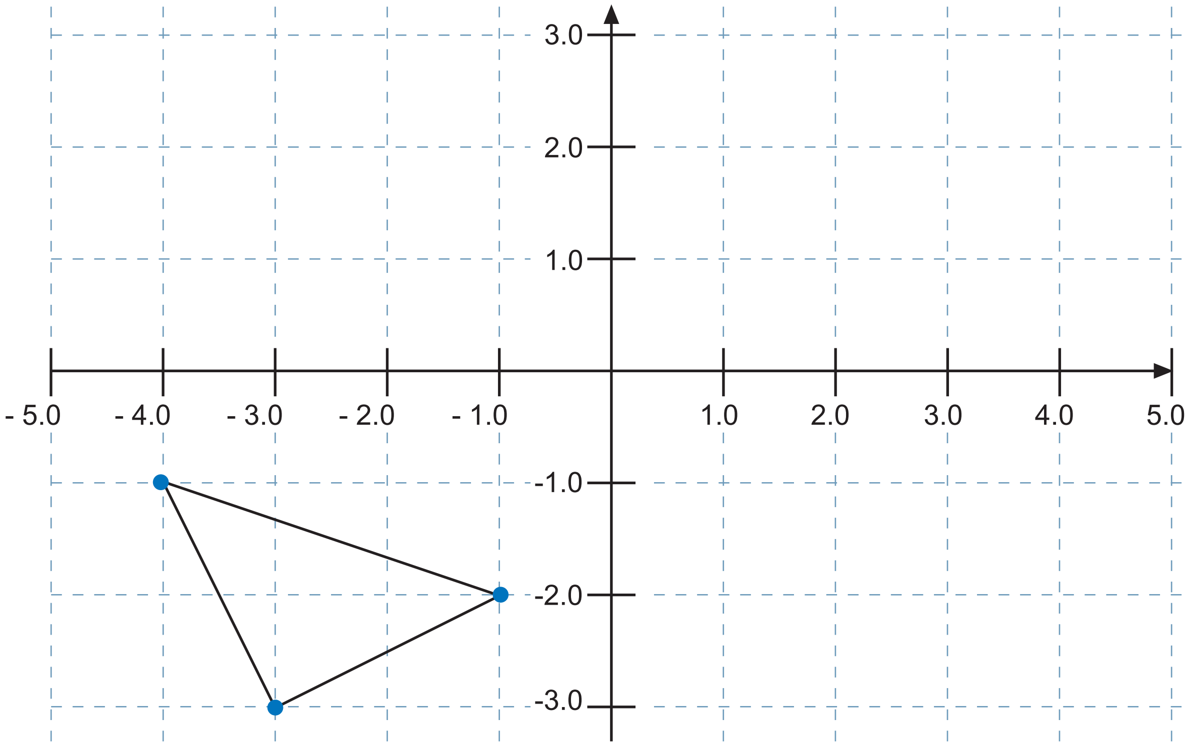
XADBIE
XAGFIE
XAGCAE
XADFHE
XAGCHFDBIE
XADBIFGCHE
XADBIFHE
XAGFHE
XAGFDBIE
XADFIE
XADFIHE
XADFGCHE
XAGCHFIE

13 Possibilidades.

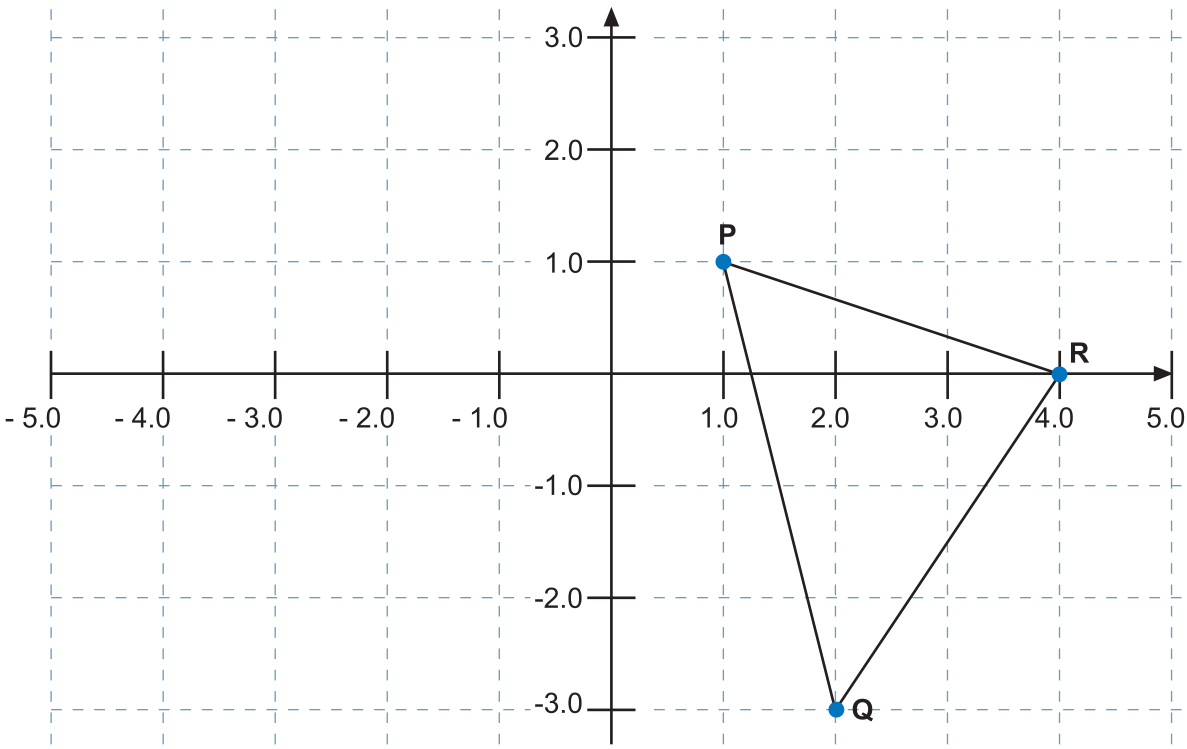
b) Existem vários caminhos que têm como medida 480 Km.
XADBIFE, XADFHE, XAGFIE, XAGCHE, XADFIE E XAGFHE.

c) XAGFDBIEHC

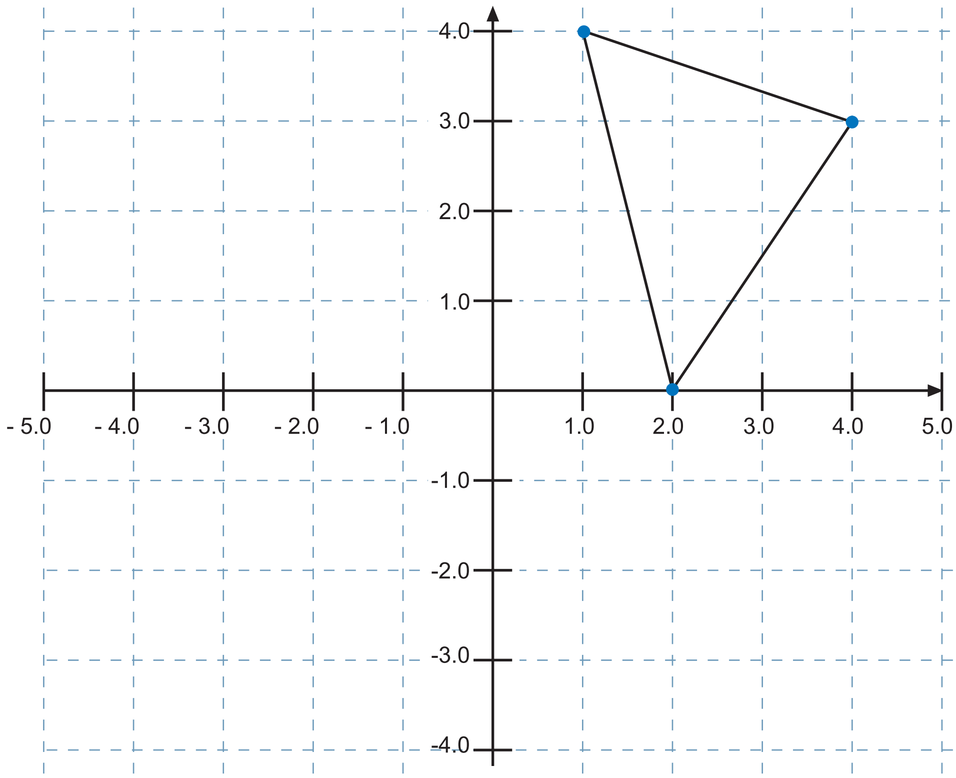
Atividade 9



Atividade 10

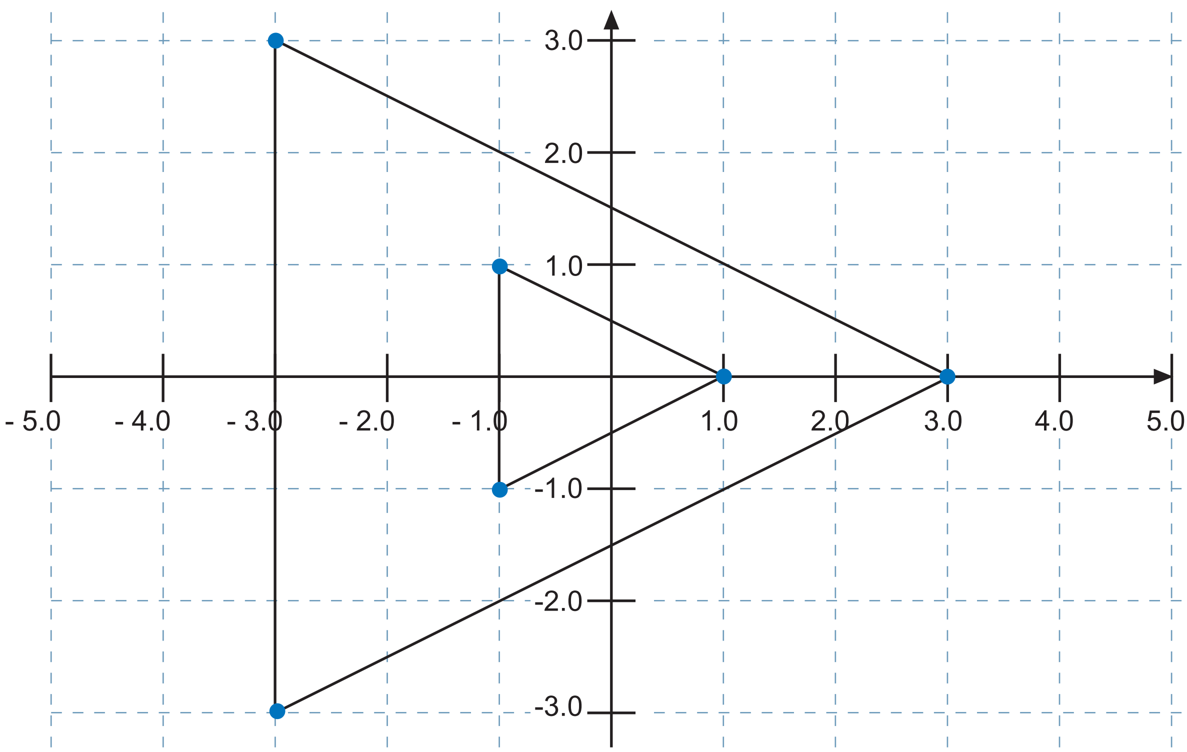


É só acrescentar três unidades no valor da coordenada y.

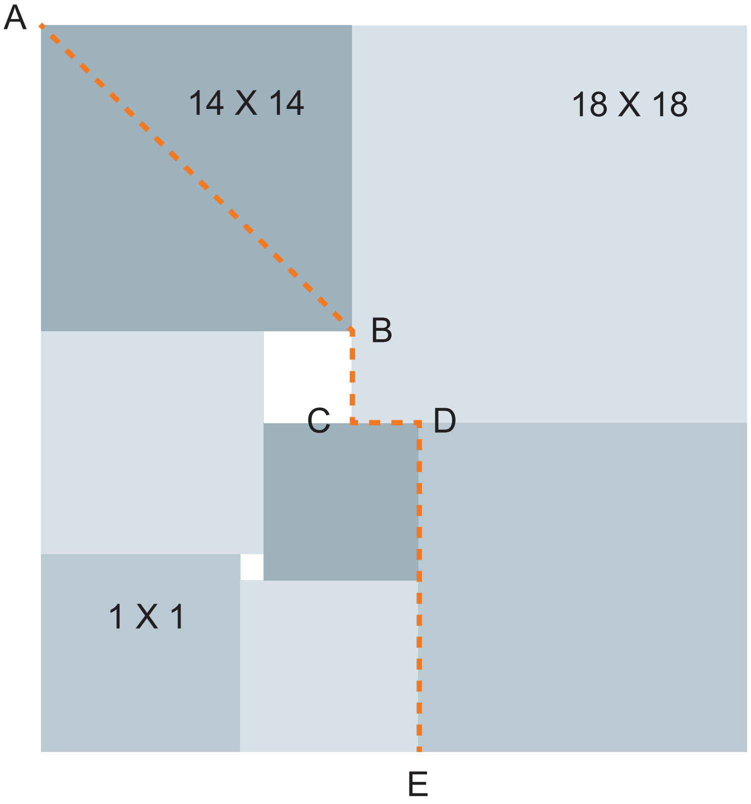


Atividade 11

Os vértices são M (-1,1), N (1,0) e L (-1, -1). Multiplicar duas coordenadas de cada vértice por 3. Desenhar o novo triângulo. Em relação ao original, o novo triângulo é uma ampliação.



Atividade 12



a) d = l $\sqrt{2}$

d = 14 $\sqrt{2}$

d= 19,74 m

b) 14$\sqrt{2}$ + 4 +3 +15

14$\sqrt{2}$ + 22

41,74 m

c) 33 x 32 = 1056 m^2

Atividade 13

Utilizamos a palavra reta quando, na verdade, a reta é imaginada sem espessura, não tem começo e nem fim, mas, quando desenhamos uma reta no caderno ou quadro, estamos representando parte da reta.

E a semi-reta: como vimos, a reta é considerada um conjunto de pontos. Considere um ponto A, que pertence a uma reta r. Podemos dizer que este ponto A separa a reta em dois conjuntos de pontos. Cada um desses conjuntos de pontos é denominado como semi-reta. O ponto A é chamado de origem das semi-retas.

Temos também o segmento de reta: dados dois pontos distintos (diferentes), a reunião do conjunto destes dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta.

Atividade 14

Resposta pessoal.

Atividade 15

Resposta pessoal.

Atividade 16

3, 6,8	2	
3,3,4	2	
3,3,2	2	
3,3,1	3	2 x 2 x 2 x 3 = 24. Após 24 horas.
1,1,1		

Atividade 17

Resposta pessoal.

Atividade 18

Resposta pessoal.

Atividade 19

Resposta pessoal.

Atividade 20

Resposta pessoal.

Atividade 21

Resposta pessoal.

Atividade 22

Resposta pessoal.

Unidade 23

Alimentação e Saúde – Sistemas de Equações Lineares

Nilza Eigenheer Bertoni

Iniciando nossa conversa

Nesta Unidade, vamos continuar o nosso caminho pela Álgebra, já percorrido especialmente nas Unidades 2, 19 (equações do 2º grau) e 21 (frações algébricas).

Na Unidade 21 do TP 6, você aprofundou o entendimento sobre frações algébricas, que são quocientes de dois polinômios. Exploramos analogias dessas frações com as frações numéricas. Com isso, vários modos de proceder algébricos, ou *regras da álgebra*, ficam mais compreensíveis. Aliás, a compreensão das expressões, das equações e dos processos para simplificá-las, operar com elas ou resolvê-las, bem como um reconhecimento geral do que a expressão algébrica traduz, aliada a uma dose de mecanização útil, foram temas bastante discutidos na Unidade 21, em especial no Texto de Referência, que versou em torno do *sentido do símbolo*.

No quadro INTEGRANDO A MATEMÁTICA AO MUNDO REAL da Unidade 21, fizemos um breve panorama da Álgebra como resposta aos problemas humanos ao longo da história. Mencionamos a origem remota dos sistemas de equações lineares com duas incógnitas e o fato dessa teoria ter dado um salto e ter avançado rapidamente a partir do século XVII.

De modo geral, uma equação que envolve duas variáveis tem infinitas soluções: para cada valor de uma delas, existe o valor correspondente da outra. Por exemplo, quando relacionamos os perímetros ou as áreas de uma figura plana ao valor do lado, obtemos equações deste tipo. Se a figura geométrica é um quadrado, temos $P = 4l$ e $A = l^2$. A primeira tem duas variáveis: P e l. Para cada valor de $P \geq 0$, encontramos um valor correspondente de l, e vice-versa. Na segunda equação, cujas variáveis são A e l, temos, para cada valor de l, um valor de A; e, para cada valor de $A>0$, embora existam, do ponto de vista matemático, dois valores de l, devemos, no contexto do problema, considerar apenas $l>0$. Essas equações também podem ser escritas como: $1P - 4l = 0$ e $1A - 1l^2 = 0$. A primeira é uma equação linear (todas as variáveis têm expoente 1) em duas variáveis.

Embora uma equação com duas variáveis tenha infinitas soluções, se tivermos duas equações envolvendo duas variáveis, então haverá a possibilidade de encontrarmos um par único de valores para as variáveis, satisfazendo simultaneamente as duas equações.

Quando as equações aparecem juntas, e devem ser encontradas soluções comuns a todas, dizemos que elas formam um sistema de equações.

Assim, um sistema de equações é um conjunto de equações para as quais se procura soluções comuns. Pode ocorrer de não existir uma solução comum a todas equações, e, neste caso, o sistema não terá solução (dizemos que é um sistema impossível).

Nesta Unidade, você vai aprender a resolver sistemas lineares, isto é, sistemas em que as incógnitas aparecem todas com expoente 1. A nossa ênfase estará nos sistemas com duas equações e duas incógnitas, embora apresentemos também a resolução de um sistema com três equações e três incógnitas.

No Ensino Médio, são estudados problemas que envolvem um número geral de equações lineares com um número geral de incógnitas. A resolução desses sistemas pode ser feita por métodos análogos aos que usaremos nesta Unidade, com a utilização da eliminação de incógnitas ou com a teoria de matrizes e determinantes.

Nesta Unidade, abordaremos um contexto relativo a vários aspetos do funcionamento do corpo humano e suas implicações para a saúde. Vamos estudar problemas que levam a duas equações com duas incógnitas, ambas com expoente 1. Só descobrindo valores das duas incógnitas, que satisfaçam simultaneamente as duas equações, é que resolveremos o problema. Também veremos situações que levam a inequações.

Esta Unidade está dividida em três Seções. A primeira mostra como situações da vida real geram problemas envolvendo um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas; a segunda trata da resolução desses sistemas; a terceira mostra como essas questões podem ser trabalhadas em sala de aula.

Veja que você está sempre progredindo, tendo mais recursos e capacidade para resolver problemas variados e de diferentes níveis de complexidade.

E não se esqueça: para estudar Matemática, pegue lápis e papel e não tenha preguiça de fazer contas. Se você ficar apenas lendo os cálculos do livro, será quase impossível aprender. Coragem e disposição!

Definindo o nosso percurso

Ao longo desta Unidade, esperamos que você possa:

1. Com relação aos seus conhecimentos matemáticos: Trabalhar sobre situações-problema da vivência cotidiana, envolvendo dois valores desconhecidos, desenvolvendo conteúdos matemáticos adequados à resolução dessas situações ou relacionados a elas, como:

    - Identificar sistemas de equações lineares com duas equações e duas incógnitas.
    - Resolver esses sistemas por estratégias variadas.
    - Construir modelos matemáticos para a resolução de situações-problema significativas do cotidiano.

    Esses conhecimentos serão desenvolvidos nas Seções 1 e 2.

2. Com relação aos seus conhecimentos sobre Educação Matemática:

    - Perceber aspectos mais amplos do fazer matemático (Seção 2).
    - Reconhecer como sendo métodos matemáticos de resolução de problemas, dentre outros, a tentativa controlada, o raciocínio aritmético e os métodos algébricos (Seção 2).

- Desenvolver o senso crítico a respeito de uma alimentação adequada às necessidades diárias de cada pessoa (Seções 1 e 2).
- Aprofundar a compreensão de concepções sobre o ensino-aprendizagem da Matemática, no Texto de Referência.

3. Com relação à sua atuação em sala de aula:

- Conhecer e produzir, com relação a problemas que envolvem sistemas lineares, situações didáticas adequadas à série em que atua no Ensino Fundamental.
- Conhecer e produzir situações para a exploração, junto aos alunos, dos conceitos de sistemas lineares e de suas soluções.
- Conhecer e produzir materiais didáticos manipulativos úteis para a solução de sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas.

Esses objetivos serão tratados na Seção 3.

Seção 1

Resolução de situação-problema

Objetivo da seção

Ao longo desta Seção, você aprenderá a:

- Desenvolver senso crítico a respeito de uma alimentação adequada às necessidades diárias de cada pessoa.
- Construir modelos matemáticos para a resolução de situações-problema significativas do cotidiano.

Integrando a matemática ao mundo real

Uma alimentação adequada às necessidades e atividades diárias

Uma alimentação diária equilibrada implica uma relação adequada entre massa corporal e ingestão de alimentos, o que pode ser chamado de dieta alimentar, mesmo que não seja feita com o objetivo de emagrecer. É freqüente as dietas imporem uma contagem das calorias ingeridas diariamente.

O que é caloria? Caloria é a unidade-padrão utilizada para a medida da energia, e seu nome vem do fato de que, na maioria das vezes, a energia aparece na forma de calor. O organismo humano retira a energia dos alimentos e a utiliza para realizar todas as atividades necessárias para sua sobrevivência, como a manutenção de seus processos vitais e de sua capacidade de trabalho. Sendo assim, "caloria" é a forma de expressar a quantidade de energia que um organismo recebe a partir de um alimento ou a quantidade de energia que ele despende em uma atividade vital (batimentos cardíacos, respiração, etc.) ou física (exercícios e trabalho).

Na verdade, seria mais adequado falarmos de quilocaloria ou kcal (mil calorias), pois a unidade caloria refere-se a uma quantidade de energia muito pequena quando comparada à quantidade de energia envolvida no aproveitamento dos alimentos pelo corpo humano, que é muito alta. Por este motivo, a quantificação em 1000 calorias (quilocaloria) seria mais conveniente. Entretanto, o termo "caloria" passou a ser usado comumente no lugar da quilocaloria, tornando-se amplamente adotado, sem que seja preciso qualquer tipo de conversão.

Desta forma, quando se diz, na linguagem comum, que um alimento tem 300 calorias ou que uma dieta fornece 1500 calorias, o que se quer dizer é que o alimento possui 300 quilocalorias (300 kcal) e que a dieta fornece 1500 quilocalorias (1500 kcal).

Cientificamente, caloria pode ser definida como a quantidade de energia térmica ou calorífica necessária para se elevar a temperatura de 1ml de água, de uma temperatura padrão inicial, em 1°C. Por outro lado, quilocaloria (x 1000) seria a quantidade de energia necessária para elevar em 1°C a temperatura de 1 litro de água.

As necessidades de vários animais, em termos de calorias por dia, aparecem na tabela a seguir:

Necessidades diárias de calorias

	Massa em kg	Total de calorias	Calorias por kg
Porco da Guiné	0,7	156	222,85
Coelho	2	116	58
Homem	70	2.310*	33
Cavalo	600	13.200	22
Elefante	4.000	52.000	13
Baleia	150.000	255.000	1,64

Com referência a (*), este é um valor médio para um homem normal com 70 kg. Na Unidade 2 do TP 1, você viu que um homem necessita de 1800 a 3200 quilocalorias por dia, dependendo de uma série de fatores.

Por outro lado, sabe-se que, para manter a temperatura do corpo em 37°C, o homem deve consumir uma quantidade de alimento A maior ou igual a 1/50 de sua massa P, ou seja A 3(1/50)P. Não recebendo essa quantidade de alimento, o corpo procura em si mesmo fontes alternativas de energia, na forma de calorias armazenadas ou queima de gordura (gordura é, essencialmente, caloria armazenada). Por outro lado, se consumir mais do que essa quantidade, a temperatura mantém-se, mas haverá armazenamento de energia na forma de gordura.

Esse mínimo de alimento requerido para uma manutenção da temperatura sem a queima de gordura varia entre os animais; para um camundongo, deve ser A 3 1/2 P. Podemos ver que, proporcionalmente ao tamanho, um camundongo requer bem mais alimento.

Como pequenos mamíferos devem ingerir um grande percentual de sua massa para manter a temperatura corporal, é lógico esperar-se que a quantidade de calorias consumida por quilograma deva ser maior para animais de pequeno tamanho, como indicado na tabela.

A perda de calor está relacionada à razão entre a área da superfície do corpo e a massa. Se a razão for alta, há um esfriamento maior do que com uma razão baixa. Neste caso, haverá a necessidade de uma taxa de metabolismo mais alta e da ingestão de mais alimento para manter a temperatura do corpo. Seres com dimensões pequenas têm razões altas entre a área da superfície e a massa corporal, o que explica o por quê de certos tipos de camundongo precisarem comer diariamente uma quantidade de alimento equivalente a várias vezes a sua massa. Eles precisam fazer isso para manter a temperatura do corpo.

Ter conhecimentos que relacionam Matemática, Fisiologia e Saúde ajuda você a ter controle sobre o seu corpo e sobre a sua saúde. Na Unidade 2, essas relações estiveram centradas na anemia e na ingestão de ferro. Nesta Unidade, a questão será abordada também em outros aspectos.

Você aprendeu a calcular o índice de massa corporal como Massa/(altura)^2 e sabe que o índice normal está entre 18,5 e 25. A partir disso, você pode saber se o seu "peso" está abaixo ou acima do recomendável.

A sua mente e a sua capacidade de tomar decisões e agir conseqüentemente tornam você responsável pelo seu corpo. Isso pode não ser tão difícil quanto você pensa. Entre em sintonia com o seu corpo. Sinta-o. Escute-o. E seja o dono da situação.

Construindo sistemas lineares a partir da realidade – Matemática e Nutrição

Na Unidade 2 do Caderno de Teoria e Prática 1, Módulo I, você leu sobre a necessidade de calorias, ou melhor, de quilocalorias por dia que uma pessoa tem. Quando as pessoas andam, trabalham ou fazem esporte, o corpo gasta energia e necessita de calorias. Como vimos naquela Unidade, um homem necessita de 1800 a 3200 quilocalorias por dia, dependendo de uma série de fatores.

Uma situação-problema

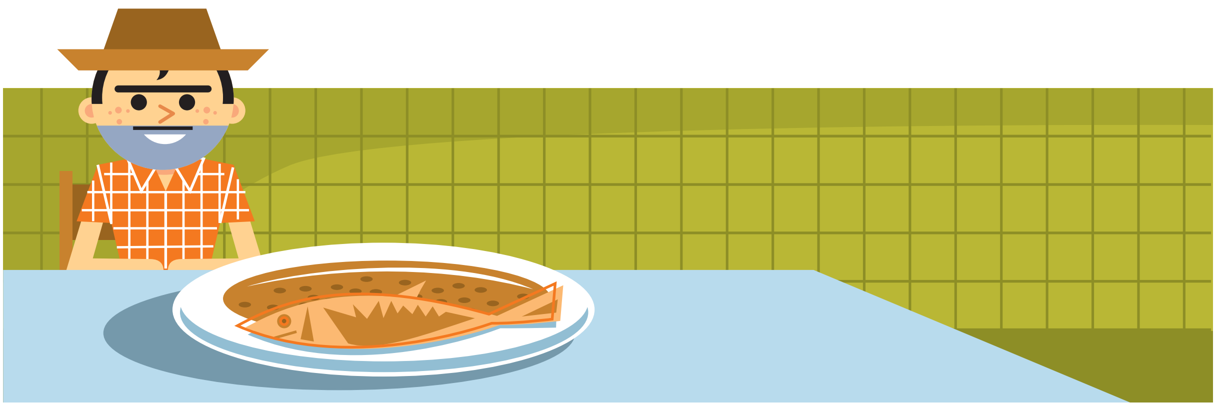


Figura 3

Rui gosta de feijão e de peixe e tem facilidade para obter esses alimentos. Ele procura ingerir 1880 calorias por dia, tomando como base os dois alimentos. Olhando em uma tabela, verificou que:

- 100 g de feijão fornecem 330 calorias.
- 100 g de peixe fornecem 70 calorias.

Ele concluiu que:

- 1 grama de feijão fornece 3,3 calorias.
- 1 grama de peixe fornece 0,7 calorias.

Para ter o total de 1880 calorias, o que Rui pode fazer?

Seção 2

Construção do conhecimento matemático em ação – Sistemas de equações lineares com duas equações e duas incógnitas

Objetivo da seção

Ao longo desta Seção, você aprenderá a:

- Expressar situações da vida real por meio de sistemas com duas equações do 1º grau e duas incógnitas.
- Solucionar problemas envolvendo sistemas com duas equações do 1º grau e duas incógnitas: por tentativas, por raciocínio aritmético, por álgebra.
- Construir modelos matemáticos para a resolução de situações-problema significativas do cotidiano.

Voltando à situação-problema

Rui pensou em comer:

x gramas de feijão, que lhe dariam x . 3,3 calorias (ou 3,3x).

y gramas de peixe, que lhe dariam y . 0,7 calorias (ou 0,7y).

O total deveria ser 1880, portanto $3{,}3x + 0{,}7y = 1880$.

Rui tentou resolver esta equação, mas descobriu que haveria muitas soluções para ela. Conforme comesse um tanto de feijão, ele teria que comer determinada quantidade de peixe para completar as calorias. Rui não gostou daquilo: todo dia anotar quanto tinha comido de feijão e calcular para ver quanto faltava comer de peixe. Queria uma situação mais prática. Procure ter alguma idéia para ajudar Rui e resolva a situação.

Situação-problema 2

Um sitiante tem uma horta com 42 metros quadrados. Dividiu-a em duas partes: em uma quer plantar melancias, e o resto é para plantar verduras. Ele espera vender a produção de cada metro quadrado de melancias por R$ 0,25 e a produção de cada metro quadrado de verduras por R$ 0,45. Deseja obter, pela venda da produção total de melancias o mesmo valor que obterá pela venda da produção total de verduras. Quantos metros quadrados de cada uma ele deve plantar?

Aprendendo sobre Educação Matemática

Provavelmente todos vocês já pensaram em resolver a situação-problema 2 introduzindo duas incógnitas x e y, construindo um sistema de equações e resolvendo-o por algum método algébrico. Existe uma idéia difundida entre professores de Matemática sobre o modo como se aprende e se faz a atividade matemática. Segundo essa idéia, só existe um modo de se resolver problemas, ou pelo menos existe o melhor, e apenas este deve ser ensinado aos alunos. Os processos, rígidos e determinados, devem ser memorizados pelos alunos. Não se dá atenção ao seu entendimento lógico, e nem sempre eles são trabalhados com o objetivo de resolver problemas. Para a maioria dos procedimentos, não é feita a articulação a situações-problema contextualizadas.Entretanto, sabemos que os espaços e caminhos do raciocínio matemático são amplos, e que ser capaz de produzir ou de entender outros modos de resolver é uma competência importante para a resolução de problemas e para a atividade matemática em geral que confere autonomia e maior capacidade na busca de soluções. Tendo em vista essas considerações, vamos examinar outros dois tipos possíveis de solução de sistemas – por tentativas e por raciocínio aritmético – antes de chegarmos aos métodos algébricos.

Será que algum de vocês procurou resolver a situação-problema 2 por tentativas? Esta é uma abordagem matemática válida, principalmente se as tentativas não forem feitas a esmo, por chutes, e forem sim tentativas planejadas, e se o resultado de cada uma for anotado, de modo a se poder controlar as seguintes e assim se poder caminhar para um resultado correto do problema.

1º Modo: Fazendo tentativas

O total de metros quadrados plantados é igual a 42. Para controlar as tentativas feitas, vamos fazer uma tabela em que o total 42 se apresenta dividido em duas partes, uma para melancias e outra para verduras. Preencha a tabela para ver qual seria o rendimento de cada uma e verifique se em algum caso os rendimentos foram iguais.

Dois tipos de tentativas:

1º tipo: Fazer tentativas seguidas, apenas considerando que vão ser necessários mais metros quadrados de melancias.

Parte para melancias	Parte para verduras	Rendimento das melancias	Rendimento das verduras	Rendimentos iguais ou diferentes?	Diferença entre os rendimentos (maior das verduras)
25	17	25 x 0,25 = 6,25	17 x 0,45 = 7,65	Diferentes	R$ 1,40
22	20	22 x 0,25 = 5,50	20 x 0,45 = 9,00	Diferentes	R$ 3,50
20	22	20 x 0,25 = 5,00	22 x 0,45 = 9,90	Diferentes	R$ 4,90
19	23				
18	24				

Atividade 1

Preencha as linhas que faltam. O que ocorre na coluna das diferenças dos rendimentos? Que idéia você tem para continuar fazendo tentativas?

Como as diferenças entre os rendimentos estão aumentando, devemos fazer outras tentativas. Na primeira coluna, tomaremos valores acima de 25.

Parte para melancias	Parte para verduras	Rendimento das melancias	Rendimento das verduras	Rendimentos iguais ou diferentes?	Diferença entre os rendimentos (maior das verduras)
28	14	28 x 0,25 = 7,00	14 x 0,45 = 6,30	Diferentes	R$ 0,70
30	12	30 x 0,25 = 7,50	12 x 0,45 = 5,40	Diferentes	R$ 2,10

Novamente, vemos que as diferenças entre os rendimentos estão aumentando, o que nos leva a tentar, para o plantio de melancias, valores entre 25 e 28.

26	16	26 x 0,25 = 6,50	16 x 0,45 = 7,20	Diferentes	R$ 0,70
27	15	27 x 0,25 = 6,75	15 x 0,45 = 6,75	Iguais!	R$ 0,00

2º tipo: Verificar o valor de múltiplos de 0,25 e de múltiplos de 0,45. Ver quando serão iguais; pensar outros múltiplos que resultarão em igualdade e cuja soma dê 42.

Fator de multiplicidade	Múltiplos de 0,25	Múltiplos de 0,45
1	0,25	0,45
2	0,50	0,9
3	0,75	1,35
4	1	1,8
5	1,25	2,25
6	1,5	
7	1,75	
8	2	
9	2,25	

Vemos que R$ 2,25 é um múltiplo comum de 25 centavos (multiplicidade 9) e de 45 centavos (multiplicidade 5). Portanto, descobrimos com a tabela que, se ele plantasse nove metros quadrados de melancias e cinco metros quadrados de verduras, as duas plantações teriam o mesmo rendimento. Mas 9 + 5 = 13 é diferente de 42. Entretanto, o dobro ou o triplo dessas áreas também teriam rendimentos iguais:

9	5	soma 14
18	10	soma 28
27	15	soma 42

Logo, as áreas de plantio devem ser de 27m^2 para as melancias e de 15m^2 para as verduras.

Verificação:

27 x 0,25 = 6,75   15 x 0,45= 6,75

Articulando conhecimentos

A teoria de múltiplos e divisores é importante em Matemática. Suas aplicações vão muito além da soma e subtração de frações ou da simplificação de uma fração. Conhecemos esses conceitos para os números naturais, mas eles são úteis também em outros conjuntos numéricos. No caso do nosso problema, trabalhamos com múltiplos naturais de números fracionários, como múltiplos de 0,25 e de 0,45, com fator de multiplicidade igual a 1, 2, 3, etc. Descobrimos que, nesse sentido, 2,25 é o menor múltiplo comum de 0,25 e 0,45. Como afirmamos, multiplicando esse valor por 2, 3, etc., obteremos outros múltiplos comuns desses números. Veja porque:

9 x 0,25 = 2,25   5 x 0,45 = 2,25

2 x 9 x 0,25 = 4,5   2 x 5 x 0,45 = 4,5

3 x 9 x 0,25 = 6,75   3 x 5 x 0,45 = 6,75

2º Modo: Raciocinando

Novamente esqueça que você já sabe a solução obtida por método algébrico ou por tentativas. Faça de conta que você está começando a resolver o problema e vai ter que usar bastante o raciocínio. O que aconteceria se ele plantasse metade do terreno (21 metros quadrados) com melancias e metade com verduras? Teria um rendimento de 21 x 0,25 = 5,25 pelas melancias e 21 x 0,45 = 9,45 pelas verduras. Haveria uma diferença de 9,45 – 5,25 = 4,20 entre os dois rendimentos, e o problema não estaria resolvido. Veja o que ocorre: nos 21m^2 plantados com verduras, há alguns metros a mais, que deveriam ter sido plantados com melancias; e, nos 21m^2 plantados com melancias, há esse mesmo número de metros a menos.

Pense sobre isto: se fosse apenas um metro quadrado plantado a mais com verduras (e a menos com melancias), que diferença entre os dois rendimentos este metro quadrado causaria?

Se for um metro quadrado plantado a mais com verduras, ele causa um aumento no rendimento das verduras de R$ 0,45. Mas, ao mesmo tempo, ele deixa de ser plantado com melancias, e, portanto, causa um rendimento para menos de R$ 0,25, *e isso aumenta mais a diferença entre os rendimentos*. Essa diferença seria de R$ 0,70 (um tem R$ 0,25 a menos do que deveria e outro tem R$ 0,45 a mais do que deveria). Continuando esse raciocínio, se fossem dois metros plantados a mais, a diferença nos rendimentos seria de 2 x 0,70 = 1,40. Se fossem três metros plantados a mais, a diferença seria de 3 x 0,70 = 2,10. Repare: quando dividimos a diferença por R$ 0,70, encontramos o número de metros plantados a mais de um lado e a menos do outro. Temos: 4,20 ÷ 0,70 = 6. Pronto! É só tirar esses 6 metros dos 21 de verduras, e aumentar 6 nos 21 de melancias.

Parte a ser plantada com verduras: 21 - 6 = 15 metros quadrados.

Parte a ser plantada com melancias: 21 + 6 = 27 metros quadrados.

Deu o mesmo resultado que havia dado antes!

Recado ao professor

Os modos apresentados até aqui para a resolução da situação mostram que é possível um aluno lidar com duas equações lineares para encontrar uma solução, mesmo sem conhecer a teoria de resolução dos sistemas lineares. Professor, como você acha que pensaria um aluno diante de tal situação, sem conhecer a teoria? Permitir que o aluno pense por si próprio é um modo de desenvolver a sua autonomia e autoconfiança. Além disso, é um modo dele ver que existe significado e bom senso na situação, que não precisa ser resolvida apenas por malabarismos algébricos.

Tanto métodos algébricos quanto tentativas e raciocínio são importantes. Em geral, tentativas e raciocínio demandam mais tempo. O aluno deve ser convidado a conhecer métodos algébricos apropriados ao problema, os quais levarão a uma solução mais rápida. Ocorre também que métodos matemáticos não existem para todas as situações, daí a importância do raciocínio.

3º Modo: Introduzindo incógnitas

Este deve ter sido o modo de resolução adotado pela maioria de vocês quando:

- Consideraram que, no problema dado, existem dois valores desconhecidos, ou duas incógnitas, que precisam ser determinadas.
- Representaram essas incógnitas por x e y, sendo que:
  x = número de metros quadrados a serem plantados com melancias;
  y = número de metros quadrados a serem plantados com verduras;
- Impuseram a condição $x + y = 35$.
- Usaram outros dados sobre a situação:

	Melancias	**Verduras**
Preço da produção por metro quadrado	25 centavos	45 centavos
Número de metros quadrados a serem plantados	x	y
Preço total da produção	$25x$ centavos	45y centavos

Como o sitiante quer obter o mesmo valor pelas produções totais de melancias e de verduras, deve ocorrer que **$25x = 45y$** (em centavos).

Construíram o sistema que os valores x e y procurados deviam satisfazer:

$$\begin{cases} x + y = 42 \\ 25x = 45y \end{cases}$$

Temos duas equações, com duas incógnitas em cada uma. As incógnitas apresentam-se simples (podemos imaginar potência 1 em cada uma delas). Nenhuma aparece elevada ao quadrado ou ao cubo. Por isso, dizemos que as equações são lineares.

Um conjunto de duas equações lineares é chamado de *Sistema Linear de Duas Equações e Duas Incógnitas*. Geralmente, colocamos as incógnitas no primeiro membro e os números no segundo.

Atividade 2

Resolva o sistema como quiser. Você deverá encontrar os valores 27 e 15. Já vimos diversas vezes que esses valores resolvem a situação. Entretanto, se você ainda não tivesse essa certeza, deveria substituir esses valores nas duas equações para ver se eles produziriam igualdades numéricas.

Voltando ao problema de Rui

Você deve ter sugerido alguma condição adicional à ingestão dos dois alimentos e, desse modo, obtido mais uma equação.

Uma das idéias possíveis é sugerir que Rui coma de peixe o dobro da quantidade que come de feijão, isto é $y = 2x$. Mas então esse valor deve ser considerado na equação que já temos.

Essa solução pode ser aplicada sempre que temos duas equações e duas incógnitas: isolamos o valor de uma das incógnitas em uma equação e substituímos na outra. Veremos isto na próxima Seção.

Atenção: embora tenhamos achado um jeito de obter as calorias diárias necessárias a Rui, essa não é uma boa solução alimentar. Esses dois alimentos não fornecem a porcentagem de gordura necessária em cada refeição.

Atividade 3

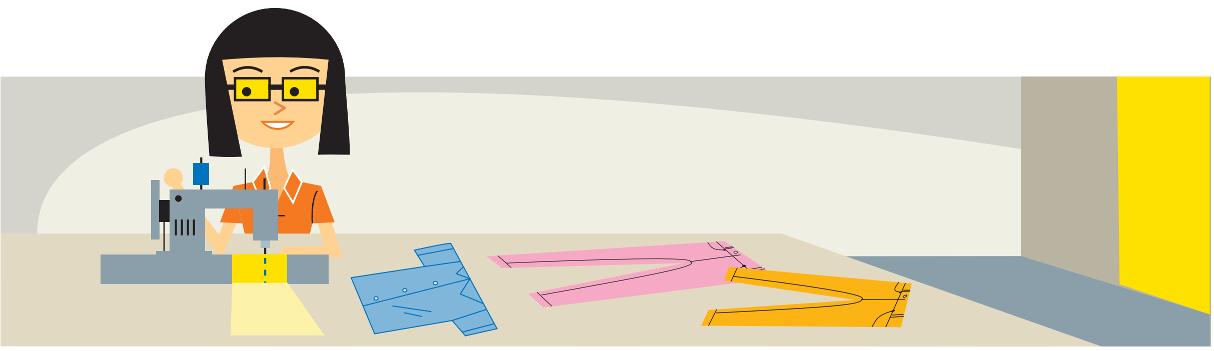


Figura 3

Escreva um sistema de duas equações para a situação abaixo (não precisa resolvê-lo).

Uma costureira faz camisas e calças para vender. Vende as camisas por 5 reais e as calças por 12 reais. Precisava de 170 reais e pensou em separar 20 peças para levar à cidade. Quantas camisas e quantas calças ela deve levar, para conseguir o dinheiro?

(Chame de x o número de camisas e de y o número de calças. Escreva relações que devem valer envolvendo x e y).

Atividade 4

Escreva um sistema para a seguinte situação (não é necessário resolvê-lo):

Em uma criação de cabras e porcos, há ao todo 56 animais. Existem 12 porcos a mais do que o número de cabras. Quantos porcos e quantas cabras há?

Saber resolver um sistema não basta, se estamos querendo um conhecimento matemático com compreensão.

Na linha de desenvolvimento das bases do pensamento algébrico que estamos construindo ao longo das Unidades, procuraremos explicitar a lógica que embasa esses procedimentos algébricos de resolução.

Resolvendo sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas

Vamos procurar sistematizar e entender modos de resolver sistemas com auxílio da álgebra, usando incógnitas e resolvendo as duas equações.

Você deve conhecer os métodos algébricos existentes para isso: da substituição, da adição e da comparação.

Já pensou sobre o que existe em comum entre esses três métodos?

Se você não sabe ou não tem certeza, veja isso à medida que revemos os métodos e fazemos comentários.

Revendo a resolução de um sistema linear com duas incógnitas

1º Modo: Método da Substituição
Determinamos quanto uma das incógnitas vale em uma das equações, isto é, isolamos uma das incógnitas e substituímos o seu valor na outra equação. Foi o método que Rui usou. Exemplo:

Vamos retomar o problema das melancias e das verduras. Tínhamos:

$$\begin{cases} x + y = 42 \\ 25x = 45y \end{cases}$$

Na primeira equação, é muito fácil isolar o valor de x ou de y:

$x = 42 - y$ (subtraímos y de ambos os membros, obtendo uma equação equivalente à anterior).

Substituímos esse valor de x na outra equação: $25(42 - y) = 45y$ (trocamos x por um valor conseguido na primeira equação). A segunda equação ficará: $1050 - 25y = 45y$. Podemos reconhecer que obtivemos uma equação com apenas uma incógnita y, ou seja, uma equação do 1º grau, que sabemos resolver:

$1050 = 70y$

$1050/70 = y$

$15 = y$

Substituindo esse valor em qualquer das equações iniciais, teremos uma equação do 1º grau na incógnita x, que sabemos resolver:

$x + y = 42 \longrightarrow x + 15 = 42 \qquad x = 42 - 15 = 27$

2º Modo: Método da Comparação

Vemos quanto vale uma mesma incógnita em cada equação e igualamos esses valores. Exemplo:

Vamos retomar o problema das melancias e das verduras. Tínhamos:

$$\begin{cases} x + y = 35 \longrightarrow x = 35 - y \\ 40x = 30y \longrightarrow x = \dfrac{30y}{40} = \dfrac{3y}{4} \end{cases}$$

Igualando os dois valores de x, teremos: $35 - y = \dfrac{3y}{4}$

Usamos aqui a transitividade da igualdade: se $35 - y = x$ e $x = \dfrac{3y}{4}$, então $35 - y = \dfrac{3y}{4}$

Esta equação possui apenas uma incógnita, e você já sabe resolvê-la: Multiplicando os dois membros por 4 (para fazer desaparecer o denominador), teremos:

$$4(35 - y) = 4 \times \frac{3y}{4}$$

$$140 - 4y = 3y$$

$$140 = 3y + 4y = 7y$$

$$y = \frac{140}{70} = 20$$

Substituindo esse valor de y na 1ª ou na 2ª equação do sistema, obtemos outra equação do 1º grau, na incógnita x:

$$x + 20 = 35$$
$$x = 35 - 20$$
$$x = 15$$

3º Modo: Método da Adição

Multiplicamos uma equação ou as duas por números bem escolhidos, de modo que, somando (ou subtraindo) as equações após a multiplicação, uma das incógnitas desapareça. Vamos resolver o mesmo sistema anterior deste modo:

$x + y = 35$ Multiplico por 30, para que a incógnita y tenha coeficiente oposto ao que tem na outra equação (não é necessário multiplicar). $30x + 30y = 1050$

Adicionamos as duas equações $\longrightarrow$

$$\begin{cases} 30x + 30y = 1050 \\ 40x - 30y = 0 \end{cases}$$
$$70x = 1050$$

Portanto, $x = \dfrac{1050}{70} = 15$

Escolhemos o número 30 para multiplicar a 1ª equação porque percebemos que na outra havia -30y e a soma das equações resultaria em 30y - 30y = 0. Ao desaparecer uma incógnita, obtemos uma equação com apenas uma incógnita, e seu valor poderá ser determinado. Substituímos esse valor em qualquer uma das equações iniciais para obter o valor da outra incógnita:

$$15 + y = 35$$
$$y = 35 - 15$$
$$y = 20$$

Outro exemplo:

Às vezes é necessário multiplicar as duas equações por certos números para que desapareça uma das incógnitas.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 3x + 4y = 11{,}5 \end{cases}$$

Vamos multiplicar a 1ª equação por 3 (vai aparecer $6x$).

Vamos multiplicar a 2ª equação por 2 (vai aparecer $6x$).

Depois, subtraímos uma da outra, e a incógnita x vai desaparecer. Veja:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 3x + 4y = 11{,}5 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{multiplico por 3:} \\ \text{multiplico por 2:} \end{matrix} \quad \begin{cases} 6x + 15y = 30 \\ 6x + 8y = 23 \end{cases}$$

Subtraímos uma da outra:

$$0x + 7y = 7$$

$$y = \frac{7}{7} = 1$$

Substituímos esse valor em qualquer uma das equações iniciais para obter o valor da outra incógnita:

$$2x + 5y = 10 \longrightarrow \begin{aligned} 2x + 5.1 &= 10 \\ 2x + 5 &= 10 \\ 2x &= 10 - 5 \\ 2x &= 5 \\ x &= \frac{5}{2} = 2{,}5 \end{aligned}$$

O cálculo das quatro últimas linhas poderia ter sido feito mentalmente:

$2x$ somado a 5 dá 10, logo $2x$ vale 5 e, portanto, x vale 2,5 ou $2\frac{1}{2}$.

Verificação dos resultados:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 10 \text{ substituindo } x \text{ por 2,5 e y por 1} \\ 3x + 4y = 11{,}5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2 \times 2{,}5 + 5 \times 1 = 10 \quad \text{ou} \quad 5 + 5 = 10 \\ 3 \times 2{,}5 + 4 \times 1 = 11{,}5 \text{ ou } 7{,}5 + 4 = 11{,}5 \end{cases}$$

Revendo os procedimentos no método da adição:

No método da adição, usamos os conceitos de oposto ou simétrico de um número, já trabalhado nos números inteiros, e de múltiplo comum. De fato:

Se os coeficientes de uma mesma incógnita são iguais ou simétricos nas duas equações iniciais, basta, respectivamente, subtrair uma da outra ou somá-las para que essa incógnita desapareça e que fiquemos com uma equação contendo apenas a outra incógnita.

Se, em uma das equações, o coeficiente de uma incógnita é múltiplo do coeficiente da mesma incógnita na outra equação, devemos multiplicar a outra equação de modo que o novo coeficiente fique igual ou simétrico àquele que era múltiplo, bastando, então, somar ou subtrair as duas equações, para que essa incógnita desapareça e que fiquemos com uma equação contendo apenas a outra incógnita.

Se as duas equações não possuem incógnitas cujos coeficientes sejam iguais, opostos ou um seja múltiplo do outro, devemos nos fixar em uma das incógnitas, pensar em um múltiplo comum de seus coeficientes nas duas equações e multiplicar as duas equações por números que tornem os coeficientes da incógnita fixada iguais a esse múltiplo comum, podendo-se então subtrair as duas equações, para que essa incógnita desapareça.

Observação: Agora estamos em condições de refletir e saber o que houve de comum nos três métodos. Você já descobriu? É que os três procedimentos algébricos visavam eliminar uma das incógnitas, recaindo em uma equação com apenas uma incógnita. Ou seja, em todas, o objetivo de reduzir o número de incógnitas foi essencial. Perceber isso é importante porque é a chave para sabermos resolver um sistema linear com mais equações e mais incógnitas – procuramos, sucessivamente, eliminar ou achar o valor de uma das incógnitas, de modo a ir sobrando cada vez menos incógnitas.

Atividade 5

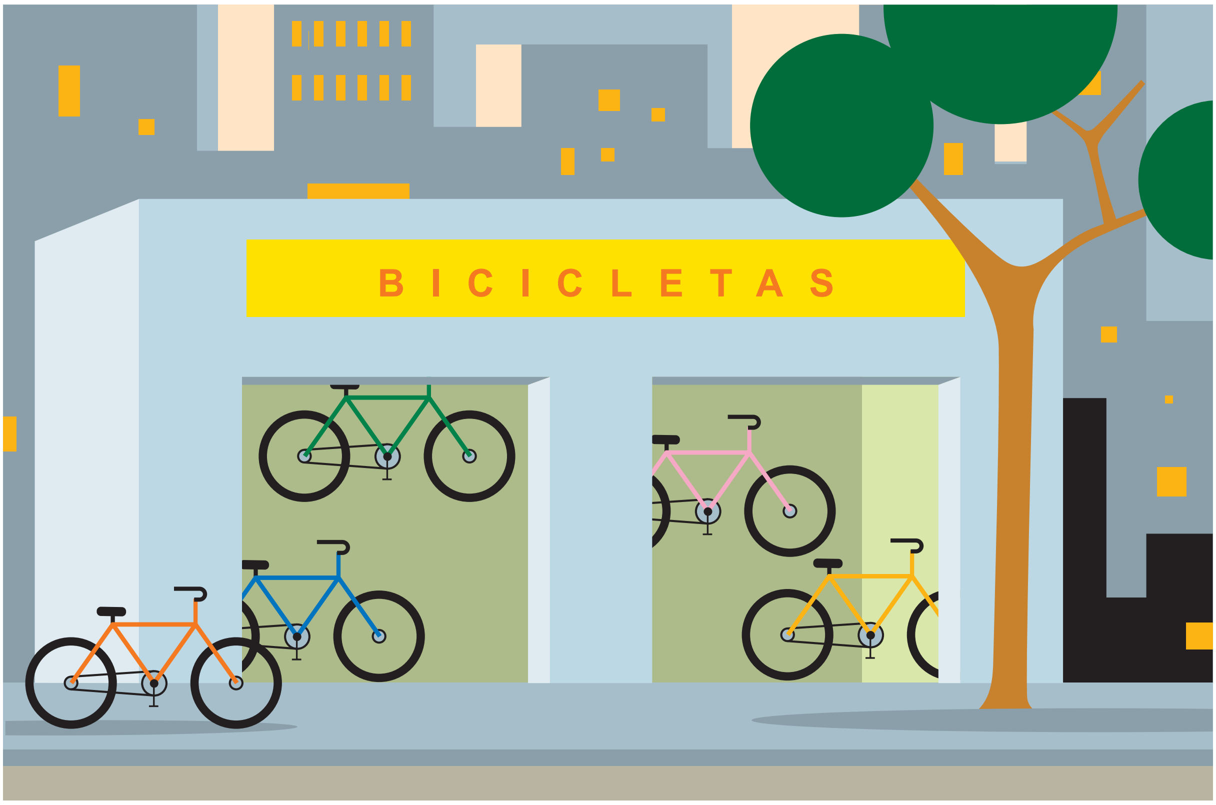


Figura 5

Uma loja de bicicletas vendeu 72 bicicletas. O número de bicicletas para homens foi três vezes maior do que o número de bicicletas para mulheres. Quantas bicicletas para homens e quantas para mulheres foram vendidas?

Vamos denominar:

x = número de bicicletas para homens que foram vendidas.

y = número de bicicletas para mulheres que foram vendidas.

Devemos ter:

$$\begin{cases} x + y = 72 \\ x = 3y \end{cases}$$

Resolva o sistema acima por qualquer método e depois pelo método da comparação.

Atividade 6

Os babilônios estudavam problemas que conduziam a equações lineares simultâneas, e alguns deles foram preservados em tabletes de argila. Por exemplo, em um tablete de aproximadamente 300 a.C., aparece o seguinte problema:

Dois terrenos têm uma área total de 1800 jardas quadradas. Um deles produz grãos na razão de 2/3 de alqueire por jarda quadrada, enquanto o outro produz grãos na razão de 1/2 alqueire por jarda quadrada. Se a produção total foi de 1100 alqueires, qual o tamanho de cada terreno?

Embora não seja necessário saber o valor da jarda quadrada nem do alqueire para entender o problema, é bom saber que alqueire no texto não se referia à extensão de terra ou área, mas a uma medida de capacidade usada para grãos ou frutas. Resolva o problema dos babilônios (vinte e três séculos depois).

Atividade 7

Resolva o sistema (por qualquer método) e verifique se o resultado obtido está correto:

$$\begin{cases} 3x - 8y = -2 \\ x + 400y = 100 \end{cases}$$

Representação gráfica de um sistema linear e de sua solução

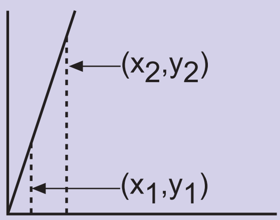
Considere o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ y - 3x = 0 \end{cases}$$

Sabemos que cada equação dessas tem infinitas soluções. Isto é, há infinitos pares de valores (x, y) que satisfazem cada equação. Marcando esses pontos em um plano cartesiano, obteremos uma reta para cada uma dessas equações (veja o quadro).

Equações lineares e retas

Uma equação como $y - 3x = 0$ está associada à função $y = 3x$, que é uma função linear – para cada valor de x, o valor de y será o triplo. O quociente entre qualquer valor de y e o correspondente valor de x é constante e igual a 3. Isto garante que a representação gráfica será uma reta pela origem.



$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_2}$$

Uma equação como $3x - y = -2$ está associada à função $y = 3x + 2$. Não temos y/x constante. Porém, para dois pares de valores (x_1, y_1) e (x_2, y_2), satisfazendo a equação, temos

$$y_1 = 3x_1 + 2$$

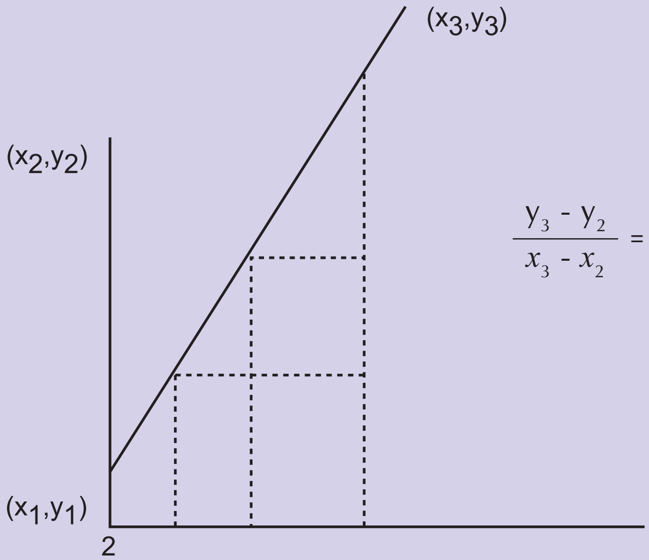
$$y_2 = 3x_2 + 2$$

e, portanto,

$$y_1 - y_2 = 3x_1 - 3x_2 \text{ ou}$$

$$y_1 - y_2 = 3(x_1 - x_2) \text{ ou}$$

$$\frac{y_1 - y_2}{(x_1 - x_2)} = 3 \text{ (constante)}$$



$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Essa proporcionalidade dos segmentos garante que o gráfico seja uma reta, embora não passe pela origem.

Voltando ao sistema:

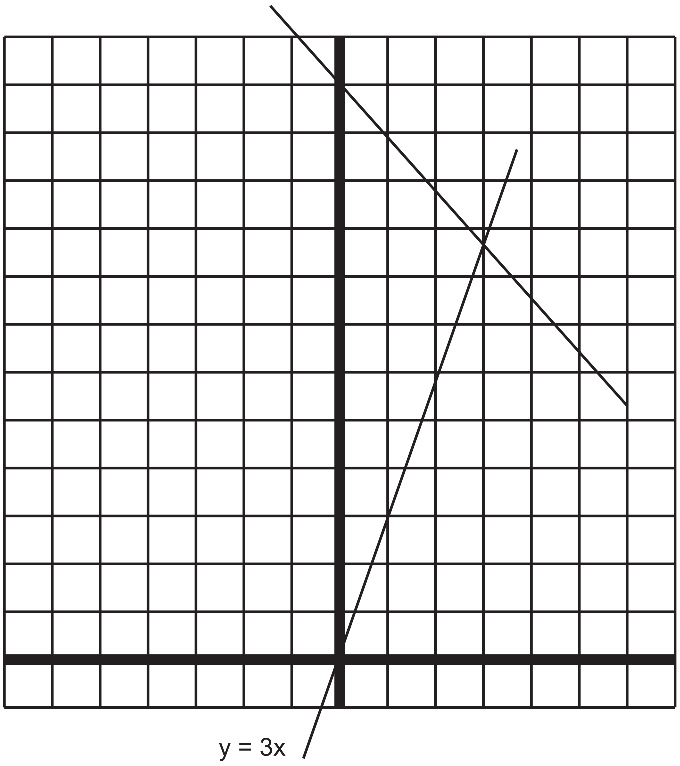
$$\begin{cases} x + y = 12 \\ y - 3x = 0 \end{cases}$$

Um modo de traçarmos o gráfico de cada reta é conhecendo dois pontos de cada uma. Para isso, podemos atribuir quaisquer valores a uma das variáveis e encontrar o valor da outra.

$x + y = 12$ ou $y = 12 - x$	
$x = 0$	$y = 12$
$x = 5$	$y = 7$

$y - 3x = 0$ ou $y = 3x$	
$x = 0$	$y = 0$
$x = 1$	$y = 3$

No plano cartesiano, traçamos a primeira reta pelos pontos (0,12) e (1,11) e a segunda pelos pontos (0,0) e (1,3).



As duas retas interceptam-se no ponto (3,9), que é a solução do sistema, ou seja, os valores x = 3 e y = 9 são soluções das duas equações do sistema.

Sistemas Impossíveis

Existem sistemas que não possuem solução. São chamados de *sistemas impossíveis*.

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ -x - 2y = 0 \end{cases}$$

Tentando resolver:

Por substituição:

$x = 6 - 2y$

$- (6 - 2y) - 2y = 0 \rightarrow -6 + 2y - 2y = 0 - 6 = 0$ (Impossível)

Por comparação:

$$\left.\begin{array}{l} x = 6 - 2y \\ -x = 2y \rightarrow x = -2y \end{array}\right\} 6 - 2y = -2y \rightarrow 6 = -2y + 2y = 0 \text{ (Impossível)}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ -x - 2y = 0 \end{cases}$$

$0 = 6$ (Impossível)

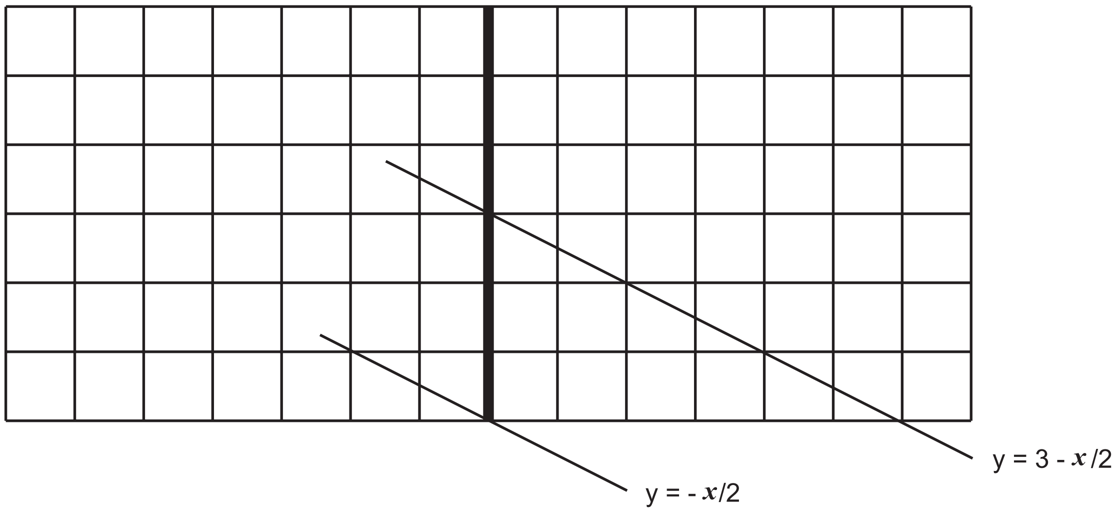
Se a resolução do sistema por um dos métodos for impossível, ela será impossível por qualquer outro método.

Nesse caso, tudo o que temos a dizer é que não existem valores de *x* nem de y que satisfaçam às duas equações.

Representação gráfica:

$x + 2y = 6$ ou $y = 3 - x/2$	
$x = 2$	$y = 2$
$x = 6$	$y = 0$

$-x - 2y = 0$ ou $y = -x/2$	
$x = -2$	$y = 1$
$x = 0$	$y = 0$



As duas retas são paralelas e não têm ponto comum. O sistema não tem solução. Não existem valores de *x* nem de y que sejam soluções das duas equações.

Caracterização algébrica de um sistema linear de duas equações e duas incógnitas: impossível!

Nenhuma das equações é múltipla da outra. Pode ocorrer de o primeiro membro da equação 1 ser múltiplo do primeiro membro da equação 2; mas o segundo membro da equação 1 ou não é múltiplo do segundo membro da equação 2, ou é múltiplo, porém com outra constante de multiplicidade. Exemplo:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 7 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + 6y = 12 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

Sistemas Indeterminados

Existem sistemas que possuem infinitas soluções. São chamados de sistemas indeterminados.

Exemplo:

$$\begin{cases} 0,5\,x - y = 1,5 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

Resolvendo por adição:

2 x (1ª equação) ⟶ $x - 2y = 3$

2ª equação ⟶ $x - 2y = 3$

Subtraindo ⟶ $0 - 0 = 0$

Repare que, ao multiplicarmos por 2, a 1ª equação se tornou igual à segunda. Uma das equações é múltipla da outra. É como se tivéssemos uma única equação com duas incógnitas. Conforme o valor que damos a uma das incógnitas, teremos um valor correspondente para a outra. Existem infinitas soluções.

$x - 2y = 3 \longrightarrow x = 2y + 3$

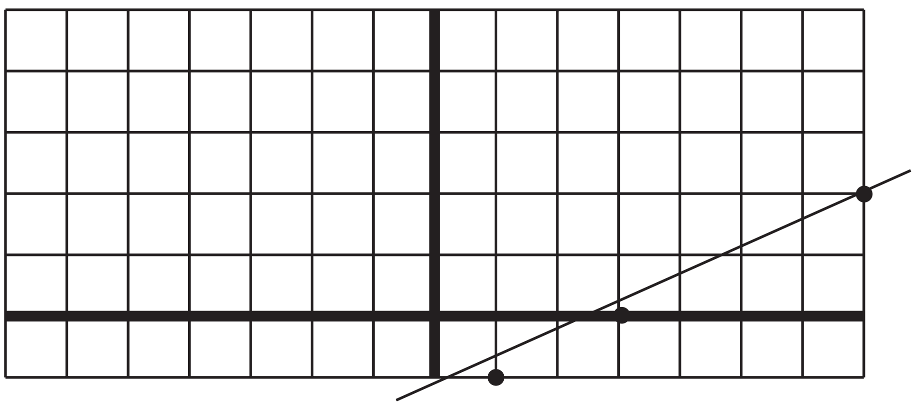
Veja alguns valores possíveis para x e para y:

y	$x = 2y + 3$	
0	$x = 2 \times 0 + 3 = 3$	$x = 3$ e $y = 0$ são soluções do sistema
1	$x = 2 \times 1 + 3 = 5$	$x = 5$ e $y = 1$ são soluções do sistema
2	$x = 2 \times 2 + 3 = 7$	$x = 7$ e $y = 2$ são soluções do sistema

Representando graficamente, vemos que as duas retas coincidem.

$0,5x - y = 1,5$ ou $y = 0,5x - 1,5$	
$x = 3$	$y = 0$
$x = 7$	$y = 2$

$x - 2y = 3$	
$y = 0$	$x = 3$
$y = -1$	$x = 1$



Reta $y = 0,5x - 1,5$ pelos pontos (3, 0) e (7, 2).
Reta $x - 2y = 3$ pelos pontos (3, 0) e (1, -1)
(coincidem).

Há infinitos pontos (x, y) que pertencem a ambas. O sistema linear tem infinitas soluções.

Caracterização algébrica de um sistema linear de duas equações e duas incógnitas: indeterminado!

Uma das equações é múltipla da outra. Isto é, o primeiro membro da equação 1 é múltiplo do primeiro membro da equação 2; o segundo membro da equação 1 é múltiplo do segundo membro da equação 2, com mesma constante de multiplicidade. Exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = 8 \end{cases}$$

Na verdade, ambas representam equações equivalentes, isto é, com mesmas soluções. Como cada uma tem infinitas soluções, o sistema também terá.

Para saber mais:

Resolvendo um sistema linear de três equações e três incógnitas

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = 2 \\ x + 6y + 3z = 3 \end{cases}$$

Para resolver este sistema, você pode usar o que já sabe sobre resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas.

Pense no método da comparação: você pode isolar uma incógnita (z, por exemplo) na 1ª e na 2ª equações e igualar os resultados, ficando com uma equação em x e y.

Depois pode isolar z na 3ª equação, igualando o valor obtido com um dos valores de z obtidos da 1ª ou da 2ª equação, obtendo uma nova equação em x e y. Veja:

$$x + y + z = 1 \rightarrow z = 1 - x - y$$

$$x - 2y + 2z = 2 \rightarrow z = \frac{2 - x + 2y}{2} = 1 - \frac{x}{2} + y$$

Igualando os resultados:

$$\frac{-x}{2} - 2y = 0$$

Multiplicando por -2:

$x + 4y = 0$ (1ª equação obtida só com as incógnitas x e y).

Isolando z na 3ª equação:

$$x + 6y + 3z = 3 \rightarrow z = \frac{3 - x - 6y}{3} = 1 - \frac{x}{3}$$

Igualando com um dos valores de z anteriormente obtidos:

$$1 - x - y = 1 - \frac{x}{3} - 2y$$

$\frac{-2}{3}x + y = 0$ ou $-2x + 3y = 0$ (2ª equação obtida só com as incógnitas x e y).

Temos um sistema de duas equações nas incógnitas x e y:

$x + 4y = 0 - 2x + 3y = 0$

Resolvendo:

$2x + 4y = 0$ (multiplicamos a 1ª equação por 2).

$- 2x + 3y = 0$

$7y = 0$ (adicionando as duas equações).

$y = 0$

Substituindo esse valor em qualquer uma das equações em x e y, obtemos $x = 0$.

Substituindo $x = 0$ e $y = 0$ em qualquer um dos valores que obtivemos para z, temos:

$z = 1 - x - y = 1$. Verificação: Vamos substituir esses valores no sistema inicialmente dado para tentarmos obter igualdades numéricas:

$x + y + z = 1 \rightarrow 0 + 0 + 1 = 1$

$x - 2y + 2z = 2 \rightarrow 0 - 0 + 2 \times 1 = 2$

$x + 6y + 3z = 3 \rightarrow 0 + 0 + 3 \times 1 = 3$

Atividade 8

Resolva o sistema anterior pelo método da adição.

(Sugestão para o início: como o coeficiente de x é igual a 1 nas três equações, subtraindo-se a 1ª da 2ª e a 1ª da 3ª, o x desaparece e obtêm-se duas equações em y e z).

Um outro método para resolver um sistema de 3 equações a 3 incógnitas consiste em:

- eliminar x da terceira equação, usando adições com a primeira e a segunda;
- eliminar x da segunda equação, usando adições dela com a primeira;
- eliminar y da terceira equação, usando a adição dela com a primeira e a segunda.

Após isso, o sistema ficará na forma:

$ax + by + cz = k$

$dy + ez = l$ (porque eliminamos x desta equação).

$fz = m$ (porque eliminamos x e y desta equação).

Neste ponto, basta:

- alterar o valor de z na terceira equação;
- substituí-lo na segunda equação e tirar o valor de y;
- substituir os valores obtidos para z e y na primeira equação e tirar o valor de x.

Nesta Unidade, retomamos parcialmente o tema da alimentação humana que foi explorado na Unidade 2 do TP1. Vamos adaptar atividades e comentários feitos no livro de Fremont, páginas 71 a 75 (veja nas Referências Bibliográficas).

Sabemos que um organismo plenamente desenvolvido utiliza o alimento que ingere como matéria-prima para regenerar boa parte das células e para gerar a energia que o conserva vivo.

Mas o alimento ingerido vai ser importante ainda em relação a outro ponto: a manutenção da temperatura do corpo.

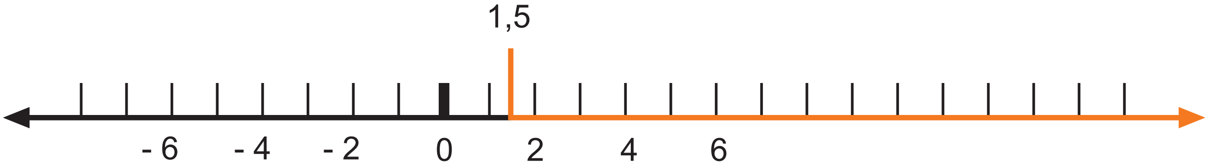
Estudos científicos mostram que, para manter a temperatura do corpo em 37°C, a massa de alimento diária (A) consumida deve manter uma relação com a massa total do indivíduo (P), dada por uma inequação:

$$A \geq \frac{P}{60}$$

Atividade 9

Se uma pessoa pesa 90kg, qual é a massa mínima de alimentação diária que ela deve consumir?

A pessoa da Atividade 9 deve consumir diariamente pelo menos 1 1/2 kg de alimento, portanto $A \geq 1\ 1/2$. Não importa se ela consumir mais – a temperatura ficará mantida nos 37°C. Portanto, a solução da inequação é um conjunto de números, denominado conjunto solução. No nosso caso, são números reais, pois qualquer valor igual ou acima de 1 1/2 é admissível. O conjunto solução pode ser assim representado na reta numérica:



Qualquer valor na semi-reta em vermelho, incluindo 1,5 ou qualquer número maior, satisfaz a inequação. Do ponto de vista do contexto, contudo, o conjunto solução plausível é muito menor, pois seria um absurdo uma pessoa ingerir mais do que 6 ou 8 kg diários de alimento. Além disso, nem precisaríamos ter introduzido a parte negativa da reta, pois esses valores não fazem sentido na situação.

O conjunto de valores nesta semi-reta pode ser representado por:

$\{x$ reais; $x \geq 1{,}5\}$. De modo abreviado, representa-se por $x \geq 1{,}5$ ou por $[1{,}5 + \infty)$.

Este conjunto de pontos forma um intervalo da reta (veja quadro).

Intervalos da reta

Sejam a, b números reais, com $a \leq b$. Os nove subconjuntos de R abaixo definidos são chamados de *intervalos*:

$[a,b] = \{x \in R;\ a \leq x \leq b\}$

$(a,b) = \{x \in R;\ a < x < b\}$

$[a,b) = \{x \in R;\ a \leq x < b\}$

$(a,b] = \{x \in R;\ a < x \leq b\}$

$(-\infty,b] = \{x \in R;\ x \leq b\}$

$(-\infty,b) = \{x \in R;\ x < b\}$

$[a,) = \{x \in R;\ a \leq x\}$

$(a,+\infty) = \{x \in R;\ a < x\}$

$(-\infty,+\infty) = R$

Os quatro intervalos da esquerda são limitados, com extremos a, b: [a,b] é um intervalo fechado, (a,b) é aberto, [a,b) é fechado à esquerda, (a,b] é fechado à direita. Os cinco intervalos da direita são ilimitados: $(-\infty,b]$ é a semi-reta esquerda, fechada, de origem b. Os demais têm denominações análogas.

Transcrito de A Matemática do Ensino Médio, Vol. 1, de Elon L. Lima *et alii*.
Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro.

Exemplo

A carga máxima que certo elevador pode sustentar é de 750 kg. Em um prédio de escritórios, foi verificado que o peso médio dos funcionários é de 75 kg. Quantas pessoas formam uma carga segura?

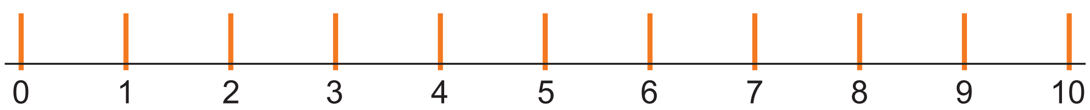
O ascensorista não pode pesar as pessoas, mas deve contá-las. Veja a inequação que descreve esta situação e a sua solução:

$$750 \geq 75n$$

$$\frac{750}{75} \geq n$$

$10 \geq n \longrightarrow$ 10 é maior ou igual ao número de pessoas que o elevador pode carregar com segurança.

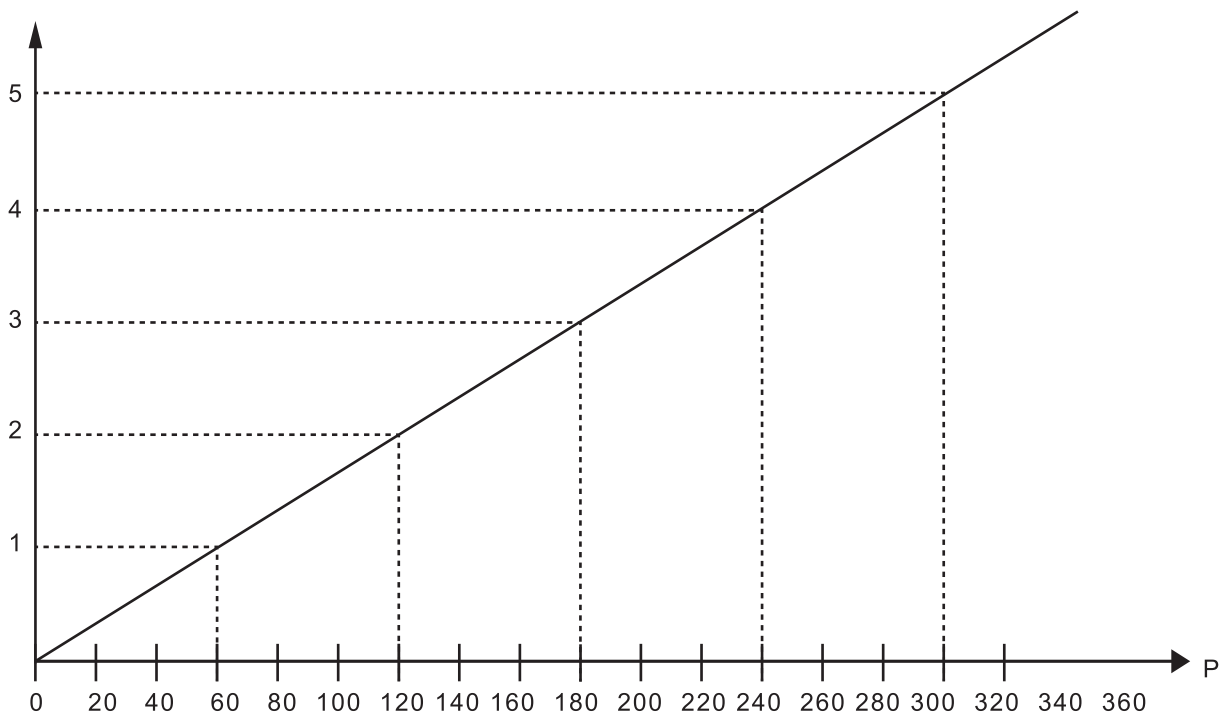
Vamos representar na reta numérica os pontos que simbolizam o conjunto solução deste problema.



O elevador está seguro para 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 pessoas.

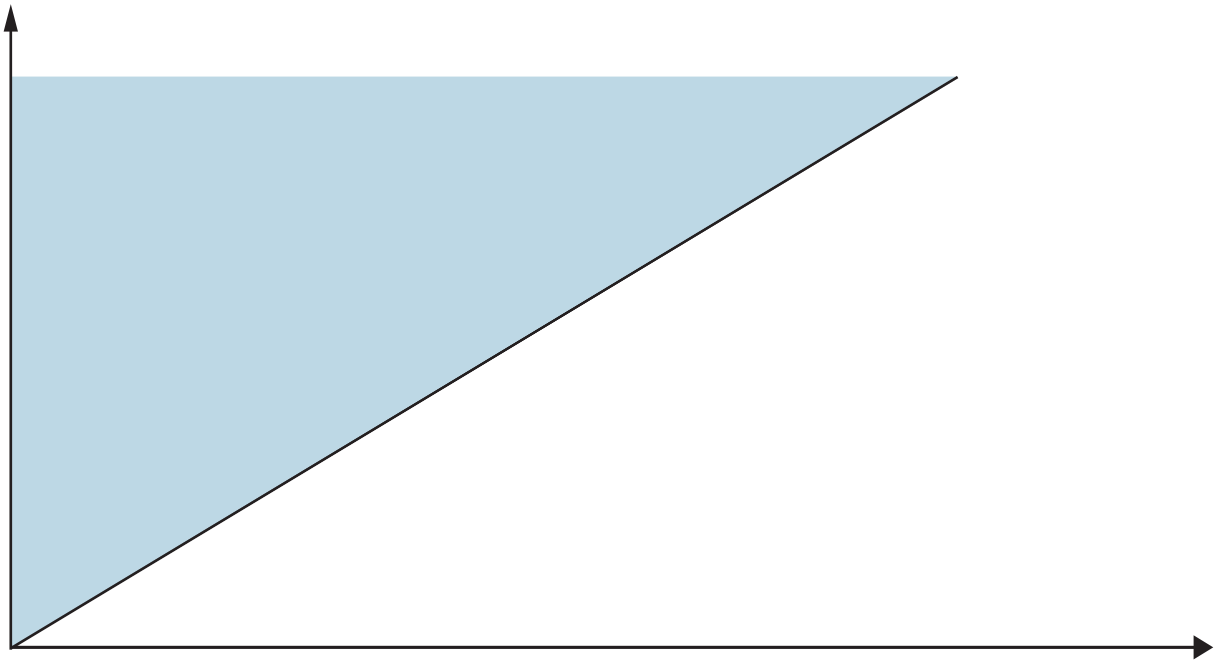
A representação na reta é um conjunto discreto de pontos, todos representando números naturais. Esse conjunto pode ser descrito por {n natural positivo, $n \leq 10$} ou, resumidamente, por $n \leq 10$.

Até aqui fizemos a representação gráfica do conjunto solução de cada inequação apresentada. Mas, seria possível fazer a representação gráfica da própria inequação? Está claro que ela não representa uma função. Em $A \geq P/60$, vemos que, para cada massa P de um indivíduo, existem infinitos valores para a massa de alimento que ele pode ingerir e que manterão a sua temperatura. E se pensássemos na equação $A = P/60$? Neste caso, para cada massa P, teríamos um único valor de A, o que caracteriza uma função $A = f(P)$. Como a massa P de um indivíduo é sempre positiva, temos que A está definida para P. Ou seja, o domínio da função A é a semi-reta positiva $x > 0$. Devemos marcar os valores de P real positivo no eixo x e, para cada um deles, marcar $A = P/60$ no eixo y. Repare que é uma função do tipo $A = kP$, ou $y = kx$, com $k = 1/60$. Portanto, a representação gráfica será uma reta passando pela origem. Como os valores de y (ou A) são bem menores do que os de x (ou P), usaremos escalas diferentes nos dois eixos.



Ressaltamos apenas os pontos do gráfico para P= 60, 120, 180, 240 e 300, mas sabemos que a função está definida para qualquer $P > 0$, portanto o gráfico é uma linha contínua.

E quanto à inequação $A \geq P/60$? Marcamos no gráfico os pontos para os quais $A = P/60$, que nos servirão de auxílio para marcar os pontos para os quais $A > P/60$. Intuitivamente e por tentativa, percebemos que, na reta vertical que passa por cada valor de P, os pontos cujas ordenadas são maiores do que P/60 satisfazem essa condição. Desse modo, podemos ver que os pontos do gráfico da inequação são os da região indicada:



Se pensarmos só matematicamente, independentemente de um contexto, poderemos, na inequação $A \geq P/60$, considerar P como qualquer número real. A semi-reta $A = P/60$ seria prolongada considerando-se os valores de $P \leq 0$. O gráfico seria um semiplano acima da reta $A = P/60$, incluindo esta reta.

Esse seria o gráfico de $A \geq P/60$, com P sendo um número real qualquer (não mais restrito a representar a massa de uma pessoa).

Domínio de uma função

É o conjunto de valores da variável independente que tornam matematicamente possível a expressão da função.

Se $A = f(P) = P/60$, qualquer valor real da variável independente P torna P/60 um valor matematicamente possível. Logo o domínio dessa função é R. No contexto de uma situação-problema, contudo, é possível que esse domínio deva ser restringido. No caso de P representar a massa de uma pessoa, devemos restringir o domínio da função ao conjunto dos números reais positivos.

Resolução de inequações

Vamos começar recordando os procedimentos básicos que podem ser usados em equações, sem que se alterem as soluções da equação. São:

- somar ou subtrair um mesmo número (positivo ou negativo) a ambos os membros da equação;
- multiplicar ou dividir por um mesmo número, positivo ou negativo, ambos os membros da equação.

Esses procedimentos são úteis para se isolar a incógnita, tornando explícito o seu valor. Por exemplo:

$$2x - \frac{3}{4} = 3x + 2$$

Uma boa estratégia é tentar deixar todos os termos com a incógnita x em um dos membros da equação e os termos numéricos em outro membro. Para isso, devemos fazer os procedimentos que não alteram as soluções:

$$2x - 3x - \frac{3}{4} = 3x - 3x + 2$$ (subtraindo $3x$ de ambos os membros).

$$-x - \frac{3}{4} = 2$$ (efetuando os cálculos).

$$-x - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4}$$ (somando 3/4 a ambos os membros).

$$-x = \frac{11}{4}$$

$$-x\,(-1) = \frac{11}{4}\,(-1)$$ (multiplicando ambos os membros por -1).

$$x = -\frac{11}{4}$$

Pode-se testar esse valor na equação inicial para confirmar se ele é realmente uma solução da equação.

Procedimentos básicos para a resolução de inequações

Nesta Seção, devemos entender os procedimentos básicos que podem ser usados sem que se alterem as soluções de uma inequação.

Somar ou subtrair um mesmo número a ambos os membros da inequação não altera o sinal da inequação nem as suas soluções.

$$A > B \longrightarrow A + C > B + C$$

A compreensão é fortemente intuitiva se a desigualdade é numérica: se um número é maior do que outro, somando-se ou subtraindo-se um mesmo número a ambos os membros, ela continua válida. O mesmo vale para expressões envolvidas em inequações.

Em relação à multiplicação e à divisão, devemos investigar separadamente se o número pelo qual se multiplica ou se divide é positivo ou negativo. Verificamos que:

Multiplicar ou dividir, por um mesmo número positivo, ambos os membros de uma inequação não altera o sinal da inequação nem as suas soluções.

Verifique o que ocorre na prática, numericamente, isto é, em desigualdade:

$6 > 4 \rightarrow 6 \times 2 > 4 \times 2$

$6 > 4 \rightarrow \dfrac{6}{2} > \dfrac{4}{2}$

Isso ocorre em geral:

$A > B \rightarrow AC > BC$, se C é um NÚMERO POSITIVO.

$A > B \rightarrow \dfrac{A}{C} > \dfrac{B}{C}$, se C é um NÚMERO POSITIVO.

Para comprovar a validade geral, fazemos:

$A > B \rightarrow A - B.$

Se $C > 0$, então

1) $(A - B)C > 0$ e portanto $AC > BC$

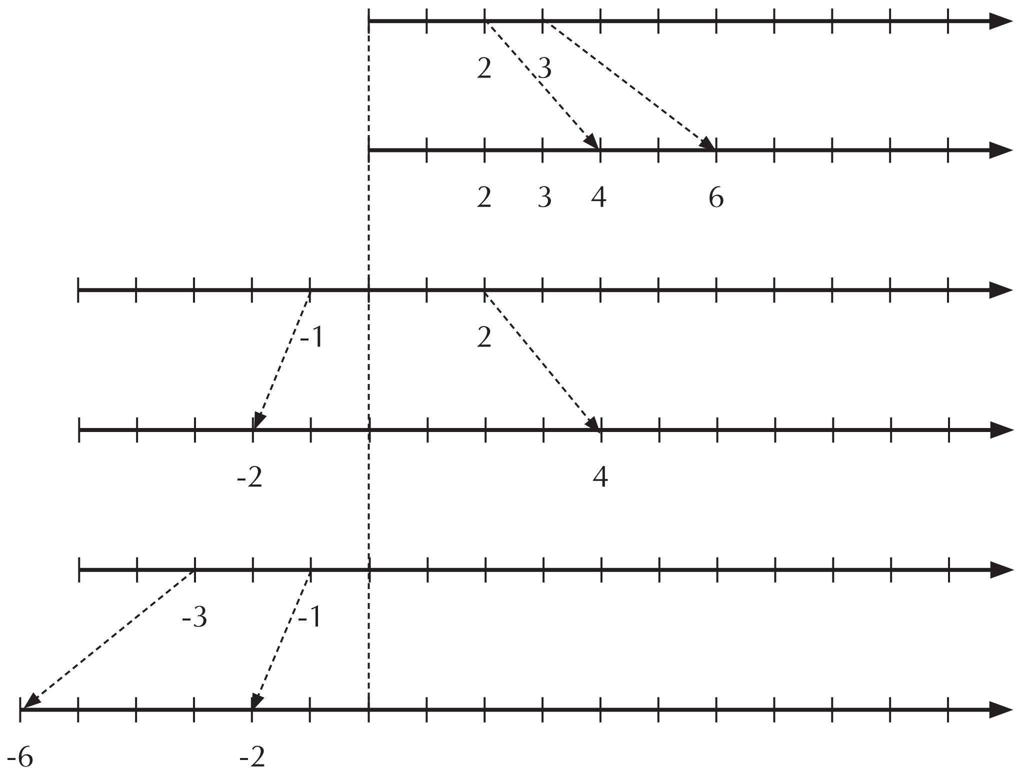
2) $\dfrac{A - B}{C} > 0$ e portanto $\dfrac{A}{C} > \dfrac{B}{C}$

Podemos ver na reta numérica o efeito de uma multiplicação por 2, em várias desigualdades:

$2 < 3$
$\downarrow (\times 2)$
$4 < 6$

$-1 < 2$
$\downarrow (\times 2)$
$-2 < 4$

$-3 < -1$
$\downarrow (\times 2)$
$-6 < -2$



Multiplicar ou dividir, por um mesmo número negativo, ambos os membros de uma inequação muda o sinal da inequação.

Verificação para casos práticos:

2 < 3

Multiplicando por -2:

2(-2) ? 3(-2)

-4 ? -6

Vemos que o sinal a ser colocado deve ser >, portanto o sinal da desigualdade foi invertido.

-4 > -6

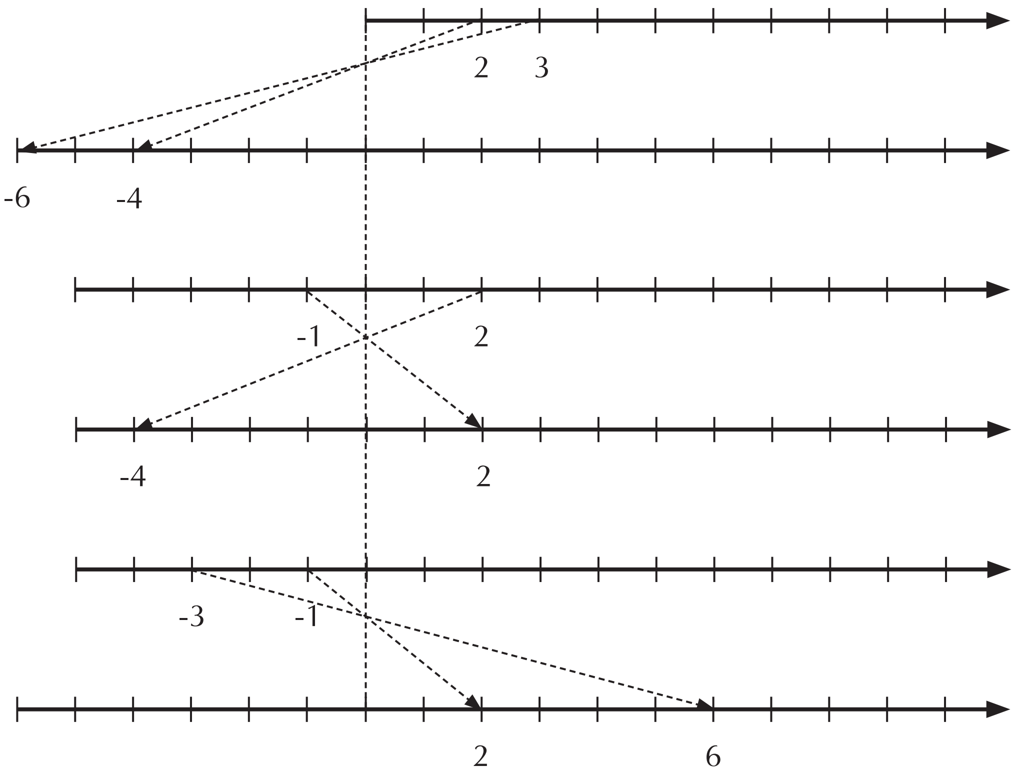
Também é possível se fazer uma comprovação formal, análoga à que já fizemos.

Agora veremos na reta numérica o efeito de uma multiplicação por -2, nas mesmas desigualdades vistas anteriormente:

2 < 3
↓ (x - 2)
-4 > -6

-1 < 2
↓ (x - 2)
2 > -4

-3 < -1
↓ (x - 2)
6 < 2



Vemos que, em todos os casos, houve uma inversão da posição relativa dos membros iniciais e dos membros resultantes, a qual leva à inversão do sinal das desigualdades.

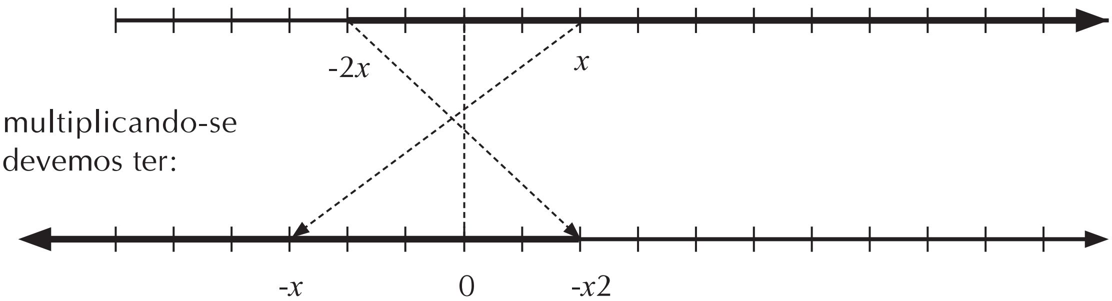
O mesmo ocorre em uma inequação.

Se temos

$x \geq 2$

então, multiplicando-se por -2, devemos ter:

$-x \leq 2$



Para qualquer x que seja maior ou igual a 2, $-x$ será menor ou igual a 2.

Vemos que as duas inequações têm as mesmas soluções – todo o x que satisfaz a primeira inequação, satisfaz também a segunda e vice-versa. Veja a tabela:

Valor de x	**Valor de $-x$**	**1ª. Inequação: $x \geq -2$**	**2ª. Inequação: $-x \leq 2$**
-1,4	1,4	$-1{,}4 \geq -2$	$1{,}4 \leq -2$
0	0	$0 \geq -2$	$0 \leq -2$
2,3	-2,3	$2{,}3 \geq -2$	$-2{,}3 \leq -2$

Exemplo:

Resolver a inequação:

$$3 - \frac{4x}{5} < 12$$

$$-\frac{4x}{5} < 9$$ (subtraímos 3 de ambos os membros, o que não altera o sinal).

$-4x < 45$ (multiplicamos ambos os membros por 5, o que não muda o sinal da inequação).

$$x > \frac{45}{-4} = -11{,}25$$ (dividimos ambos os membros por - 4, o que muda o sinal da inequação).

Verificação para alguns pontos:

Tomando $x = -11{,}2$ (que é maior do que $-11{,}25$) e substituindo na inequação inicial:

$$3 - \frac{4}{5}(-11{,}2) < 12$$

$$3 + \frac{44{,}8}{5} < 12$$

$$3 + 8{,}96 < 12$$

$11{,}96 < 12$ correto

Atividade 10

Em uma cultura de bactérias, a porcentagem p de bactérias presentes em certo momento depende do número de segundos t de exposição a raios ultravioleta. Esta relação pode ser descrita como:

$$p = 100 - \frac{19t}{2}.$$

Sabe-se que esta cultura só pode ser usada se a porcentagem de bactérias presentes for inferior a 24. Para quais valores de t a cultura está adequada para ser usada?

Resumindo

Nesta Seção, você conheceu ou recordou os seguintes conteúdos matemáticos:

- Sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas.
- Resolução de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas.
- Sistemas lineares com solução única, nenhuma solução ou infinitas soluções.
- Representação gráfica de sistemas.
- Introdução a sistemas lineares com três equações e três incógnitas.
- Métodos possíveis de resolução para sistemas lineares com três equações e três incógnitas.
- Inequações do 1º grau.
- Intervalos e representação gráfica de inequações.

Seção 3

Transposição didática

Objetivo da seção

Nesta Seção, você poderá:

- Conhecer situações significativas conduzindo a sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas.
- Articular esses sistemas a duas balanças em equilíbrio.
- Associar a solução desses sistemas a manipulações em duas balanças em equilíbrio.
- Discutir métodos algébricos de resolução dos sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas.
- Conhecer situações significativas conduzindo a inequações do 1º grau.
- Discutir métodos para a solução dessas inequações.

Assim como as crianças que aprendem a ler precisam saber interpretar o que lêem, na Matemática devemos saber interpretar a linguagem simbólica.

Veja exemplos de leitura e de interpretações:

Escrita simbólica	**Leitura**	**Interpretação**
15,2kg	Quinze vírgula dois cagê.	15 quilogramas e 2 décimos de quilograma, ou seja, 15 quilogramas e 200 gramas.
$x + 2 = 10$	*x*is mais dois igual a 10.	*x*, aumentado em 2, deu 10.

Se alguém apenas olha a equação, sem interpretá-la, pensa logo em resolvê-la por alguma regra, muitas vezes sem entendimento nenhum, algo do tipo: *passa-se o 2 para o segundo membro e troca-se o sinal, ficando x = 10 - 2; então escreve-se x = 8*.

Há alunos que nem percebem a relação desse 8 com a equação inicial. Não sabem que estavam procurando um valor para *x* que, substituído na equação, produzisse uma igualdade numérica.

Quem interpreta a equação (vê a *Gestalt* ou a forma geral da equação), percebe logo o seu significado: um certo valor ou quantidade *x* foi aumentado em 2 e obteve-se 10. Portanto, este valor só pode ser 8, pois $8 + 2 = 10$.

Na Unidade 2 do TP1, aparece: *Um recado para a sala de aula*, pouco antes da Atividade 12. Nele, lemos:

Vale a pena levar uma balança de dois pratos para a sala de aula, quando for introduzir o assunto "resolução de equações". Porém, a utilização da balança fica difícil quando tratamos de números negativos e algumas soluções com decimais.

Como uma balança poderá ser usada para resolver uma equação do 1º grau?

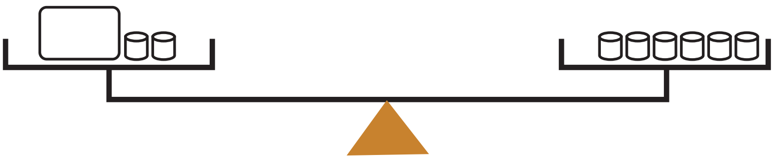
Equações estão associadas a igualdades de quantidades: a quantidade do primeiro membro deve ser igual à que está no segundo membro. Por analogia, podemos pensar em uma balança não vazia, mas em equilíbrio: a massa do prato da esquerda deve ser igual à massa do prato da direita.

Na balança, podemos fazer algumas mudanças sem alterar o equilíbrio: acrescentar ou tirar massas iguais aos dos dois membros; duplicar, triplicar; etc. a massa nos dois pratos; reduzir as massas dos dois pratos à metade, à terça parte, etc.

Do mesmo modo, em uma equação, podemos fazer algumas mudanças sem alterar a igualdade dos membros: acrescentar ou tirar números iguais aos dos dois membros; duplicar, triplicar; etc. as quantidades nos dois membros; dividir as quantidades dos dois membros por 2, 3, etc. Supondo que representa um peso de balança, com massa de 1g, e que representa uma massa desconhecida a ser determinada, compare as ações na balança e na equação:

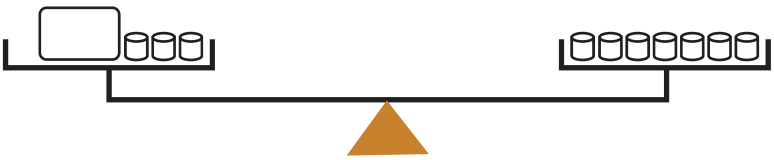
(as ações são feitas na balança inicial)

Equação



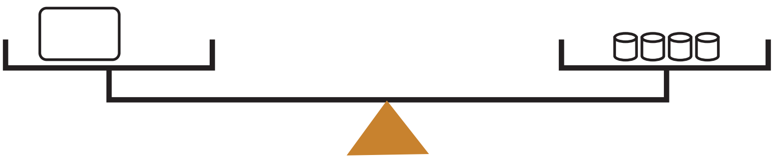
$x + 2 = 6$

Balança – estado inicial



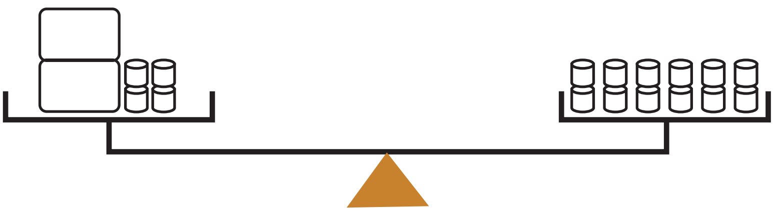
$x + 2 + 1 = 6 + 1$ ou $x + 3 = 7$

Acrescentando 1g a ambos os pratos:



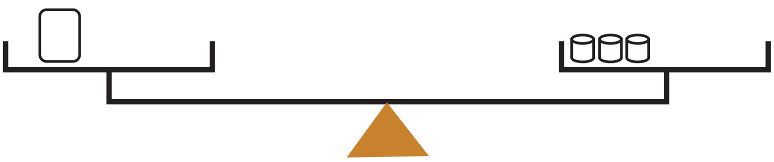
$x + 2 - 2 = 6 - 2$ ou $x = 4$

Tirando 2g dos dois pratos da balança inicial:



$2(x + 2) = 2(6)$ ou $2x + 4 = 12$

Duplicando a massa nos dois pratos iniciais:



$\frac{1}{2}(x + 2) = \frac{1}{2}(6)$ ou $x/2 + 1 = 3$

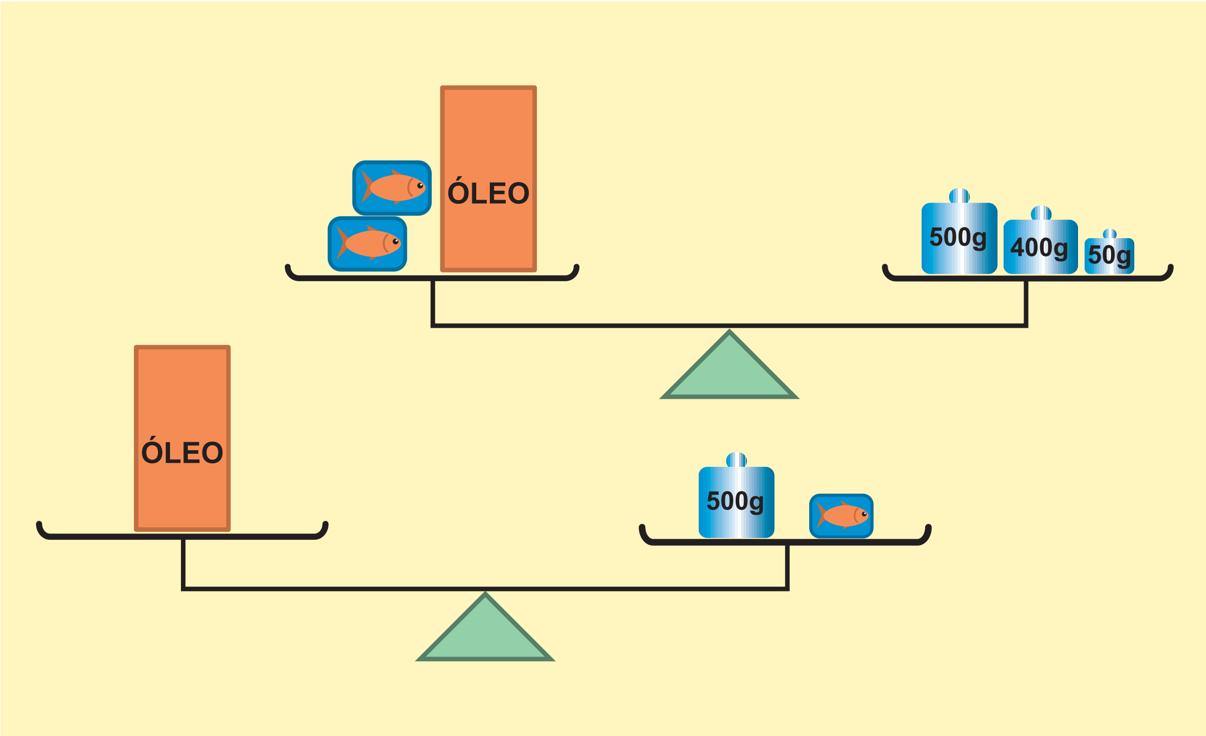
Reduzindo à metade a massa nos dois pratos iniciais:

Todas as equações obtidas são equivalentes, isto é, possuem soluções idênticas.

De todas essas mudanças, a que produziu melhor resultado foi a segunda (tirar 2g dos dois pratos ou tirar duas unidades dos dois membros), pois ela nos deu o valor da massa desconhecida que estava na balança e que havíamos representado por x.

Situação-problema para os alunos

Veja o resultado de duas pesagens feitas com uma lata de óleo, latas de sardinha e alguns "pesos" usados em balanças, de massas conhecidas. Descubra quantos gramas tem uma lata de sardinha.



IMENES, L.M. e LELLIS. Matemática. 8ª série. São Paulo: Editora Scipione, 1997.

Há vários fatos a serem observados nesta situação-problema:

- houve duas pesagens, ambas válidas;
- elas envolveram dois valores desconhecidos (a massa da lata de óleo e a massa da lata de sardinha) e valores conhecidos (os pesos de balança);
- a manipulação correta dos valores desconhecidos e conhecidos, conduzindo a novas equações válidas, permite-nos descobrir quanto valem os valores desconhecidos.

Idéias práticas para o uso de balanças em sistemas

O uso das duas balanças pode ser feito de modo simbólico ou por diagramas no quadro-negro.

Pode-se representar, por exemplo, a balança por dois pratos de papelão, ou dois círculos de cartolina, sobre os quais, em vez de pesos, colocamos peças análogas à do material dourado simbolizando gramas. Essas peças podem ser feitas com cartolina ou isopor fino (de bandejas de acondicionamento de alimentos) em que se cortam centímetros quadrados, barras com 10 cm^2, placas com 100 cm^2. Os dois valores desconhecidos podem ser representados por uma caixa de fósforos e por uma caixa de filme fotográfico.

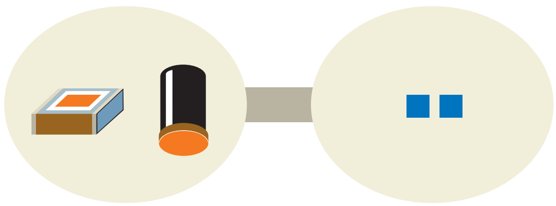
O problema é que surge a indicação tanto de gramas a serem subtraídas como de valores desconhecidos a serem subtraídos, ou seja, podem aparecer os opostos de valores conhecidos ou desconhecidos. Uma idéia é usar o material de cartolina em duas cores: uma cor para valores positivos e outra para valores negativos ou a serem subtraídos.

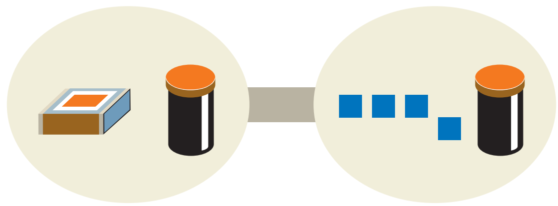
Para os valores desconhecidos, pode-se convencionar que, se as caixas estão em posição normal (caixas de fósforos voltadas para cima e caixas de filme com a tampa para cima), os valores desconhecidos representados por elas devem ser antecedidos por +; se estão invertidas, representam valores antecedidos por -.

Veja como representar as equações:

$y - x = 2$ $\qquad\qquad$ $y + x = y + 4$

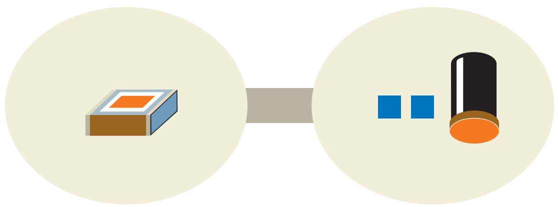
Representando y com a caixa de fósforos e x com a caixa de filme:

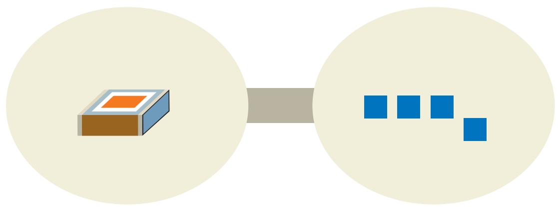




Manipulação possível para a solução do sistema:

Objetivo: isolar y nos primeiros membros, nas duas balanças:

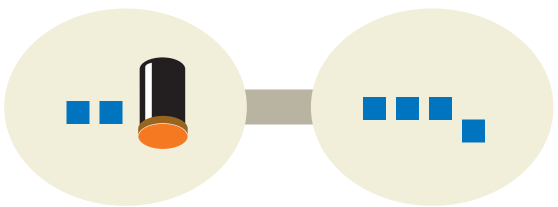




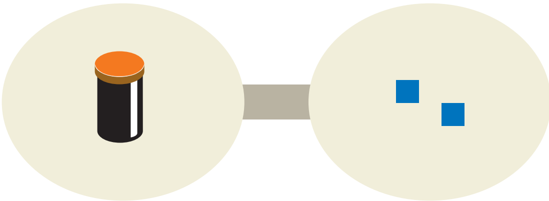
Acrescentar x (caixa de filme) em ambos os membros. No 1º membro (prato), o acréscimo da caixa não aparece, pois existia a indicação de que uma caixa igual a essa devia ser retirada.

Retirar x (caixa de filme) de ambos os membros.

Como temos dois valores distintos representando y, eles podem ser igualados:

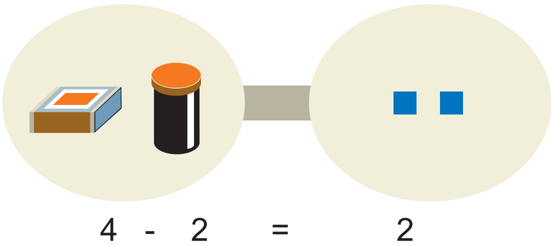


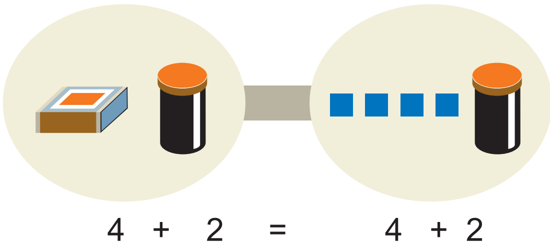
Retirando-se duas unidades (2 gramas ou quadradinhos) de ambos os membros:



Ou seja, $x = 2$. Uma das balanças anteriores já nos informava que $y = 4$.

Para verificar, podemos substituir x e y por 2 e 4 nas balanças iniciais:





É importante desenvolver a idéia de que problemas podem ser resolvidos de vários modos. O professor deve deixar que os alunos exponham o seu próprio modo de pensar. Não deve querer sempre levá-los a entender só o raciocínio do professor. Neste sentido, os alunos devem ficar livres para resolver a situação proposta, podendo discuti-la entre eles mesmos.

Atividade 11

Resolva o sistema por meio de representação e ações em duas balanças.

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Leituras sugeridas

IMENES, L.M.; LELLIS. *Matemática*. Livro didático, 8ª série. São Paulo: Scipione, 1997.

Vale a pena você conhecer este livro didático cheio de idéias criativas. A parte de sistemas começa com três situações do tipo "quebra-cabeça", que exercitam bastante o pensamento. Os métodos para a resolução dos sistemas estão bem claros e compreensíveis, associados a situações cotidianas bem variadas. Não deixe de ler!

GUELLI, O. *Contando a História da Matemática. Dando Corda na Trigonometria*. São Paulo: Ática, 1993. 64p.

www.tees.ne.jp/~bronze/saude/nutricao.html Consultado em dezembro de 2004.

Bibliografia

FREMONT, H. *Teaching Secondary Mathematics through applications*. 2ª ed. 342 p. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1979.

GUELLI, O. *Contando a História da Matemática. Dando Corda na Trigonometria*. 64p. São Paulo: Ática, 1993.

LIMA, E.L. et alii. *A Matemática do Ensino Médio*. Vol. 1. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

MEC. FUNDESCOLA, 2000. *Proformação – Guia de estudo*. Menezes, M.B. de; Ramos, W. (coord.). Módulo III, vol. 1, Matemática e Lógica.

Sites consultados

www.tees.ne.jp/~bronze/saude/nutricao.html Consultado em dezembro de 2004.

www.history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/histtopicis/

matrices_and_determinants.html Consultado em dezembro de 2004.

Texto de referência

Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem da matemática

Marcelo Câmara dos Santos
Professor do Colégio de Aplicação da UFPE
Educação Matemática em Revista[1],
Ano 9 – nº 12 – junho de 2002

O presente texto tem por objetivo colocar em evidência algumas concepções mais freqüentes sobre o que significa ensinar e/ou aprender em matemática, a concepção baldista, a concepção da escadinha e a concepção sócio-construtivista. Pelo seu caráter didático, o texto apresenta, sem dúvida, um aspecto caricatural dos três modelos. Conseqüentemente, não pretendemos aqui tratar de "teorias da aprendizagem", que encontrariam lugar em estudos mais aprofundados e mais amplos; por esse motivo preferimos utilizar o termo "concepção", ao invés de "teoria".

Apesar disso, acreditamos que os três modelos apresentados no texto serão facilmente reconhecidos pela grande maioria dos professores de matemática. É preciso ressaltar também que as concepções de que trata esse texto se referem diretamente às situações de aprendizagem de novos conceitos, e não à aplicação de conceitos já adquiridos, que também devem ser objeto de atenção dos professores de matemática.

Além de caracterizar essas três concepções, nós tentaremos explicar algumas vantagens e alguns limites de cada uma delas.

A concepção baldista

O termo "concepção baldista", em referência à "concepção da cabeça vazia", vem de Nilson José Machado[2]. Essa concepção parte da idéia que, no momento de entrar em contato com um novo objeto de conhecimento matemático, a cabeça do aluno se apresenta como um balde vazio, ou, seja, ele não sabe nada sobre esse novo objeto de conhecimento, e que esse conhecimento será despejado em sua cabeça, da mesma forma como enchemos um balde.

Nesse modelo, poderemos dizer que o aluno "aprendeu tudo" quando esse balde se encontra completamente cheio. Ou então, é como se esse balde tivesse uma espécie de graduação, onde poderíamos verificar se ele está preenchido a 80%, ou 60%, ou 40%, correspondentes às notas 8, 6 ou 4. Poderíamos ilustrar esse modelo pela figura seguinte:

1. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

* SANTOS, Marcelo Câmara dos. "Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem de matemática". In: *Educação Matemática em Revista*. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Ano 9, n. 12, junho de 2002.

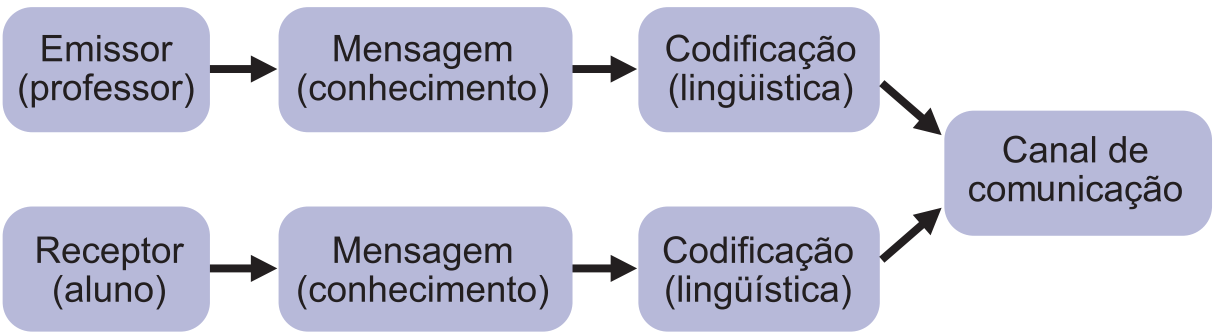
2. Remetemos o leitor à leitura do seu livro "Epistemologia e Didática", publicado em 1995 pela Editora Cortez.

Dessa maneira, o papel do professor será de "encher esse balde" com os novos conhecimentos. Para tanto, cabe ao professor "transmitir" da melhor forma possível esse conhecimento (em geral partindo de definições), e, ao aluno, cabe estar atento, escutar e anotar em seu caderno, para que ele possa "receber bem" o conhecimento transmitido pelo professor. Nessa abordagem, primeiramente o professor "comunica" esse novo conhecimento, mostrando, em seguida, algumas de suas aplicações através de exemplos ou de exercícios resolvidos. Segue-se, ainda, uma bateria (em geral extremamente longa), de exercícios em que o aluno deverá aplicar esse novo conhecimento; é o que chamamos, geralmente, de exercícios de fixação.

Podemos comparar esse processo, definição Þ exercícios resolvidos Þ exercícios de aplicação, à metáfora da "leitura do romance". De fato, nesse modelo, o novo objeto de conhecimento é apresentado ao aluno na forma de sua definição, para, em seguida, tentar-se mostrar alguma aplicação desse novo conhecimento. É como se, ao tomarmos a iniciativa de ler um romance policial, começarmos pelo último capítulo, onde o assassino é revelado ao leitor. A pergunta que podemos colocar é: "se nós já conhecemos o culpado do crime, de que vale acompanhar toda a trama?", onde poderíamos colocar nossas hipóteses na tentativa de descobrirmos o assassino. Da mesma forma, na aprendizagem de matemática, que interesse pode ter um aluno em descobrir o processo de construção de um certo conhecimento matemático se o professor parte da definição do conceito?

É preciso, porém, ficar claro, que essa busca constante do "pronto", no ensino de matemática está fortemente arraigada no contrato didático habitual de grande parte das nossas salas de aula; qual professor de matemática não escutou, após uma "demonstração" exaustiva da construção de um novo conceito, a célebre frase: "mas professor, por que você não colocou logo a fórmula?".

O sucesso desse modelo repousa, essencialmente, no processo de comunicação entre o professor e o aluno. Poderíamos esquematizar esse processo da forma abaixo, onde o sucesso da aprendizagem está estreitamente relacionado com a comunicação professor x aluno[3].



3. SANTOS, Marcelo Câmara dos. Lê rapport au savoir de l'enseignant de mathématiques em situation didactique: une approche par l'analyse de son discours. Tese de Doutoramento. Université Paris – X, 1995.

Nesse modelo, a aprendizagem se dá pela palavra do professor, e os erros devem ser evitados a todo custo pelo professor. Se eles aparecem, eles serão, em geral, por falta do aluno, que não prestou a devida atenção ao que o professor falou. Em alguns casos, a culpa pelos erros será atribuída ao professor, na medida em que ele "não explicou direito" ou "deu muito rápido o assunto". Nessa concepção, o bom professor será aquele que "explica bem o assunto".

Os limites dessa concepção estão estreitamente ligados aos limites da própria comunicação. Estudos têm mostrado que, por mais atenção que o aluno preste à palavra do professor, na maioria das vezes o conhecimento "ensinado" pelo professor é diferente do conhecimento "aprendido" pelo aluno. Se nos referirmos ao esquema mostrado anteriormente, a mensagem enviada pelo professor deverá ser "decodificada" pelo aluno. É exatamente no momento de fazer essa decodificação que o aluno colocará em ação suas próprias representações sobre o objeto em questão, o que mudará, muitas vezes de forma radical, o sentido do que foi apresentado pelo professor, mostrando, na realidade, que o aluno não tem sua cabeça vazia.

Entretanto, o ensino fundamentado nessa concepção apresenta a vantagem (pelo menos a curto termo) de levar o professor a ganhar tempo no processo, ensinando a um grande número de alunos ao mesmo tempo. Além disso, torna-se prático para o professor, pois não exige uma preparação importante das situações de aprendizagem, uma vez que o instrumento mediador privilegiado é a palavra do professor.

O sucesso desse tipo de ensino demanda algumas condições particulares. Uma delas é a necessidade de se ter alunos atentos e motivados, o que não é necessariamente o caso de nossos alunos, que estão imersos em uma sociedade que lhes oferece uma multitude de outras motivações que não a escola. Uma segunda necessidade é que as representações dos alunos estejam, de uma certa maneira, próximas daquelas dos professores, para evitar os desvios de decodificação que colocamos anteriormente.

É claro que existem formas variantes de ensino, que são ainda baseadas nessa concepção, como, por exemplo, a aula dialogada em que o professor, através de questões colocadas de maneira conveniente, consegue levar os alunos a "manifestar" a presença de um novo conhecimento na relação didática. Essa variante nos leva em direção à segunda concepção que trataremos nesse texto, a concepção da escadinha.

A concepção da escadinha

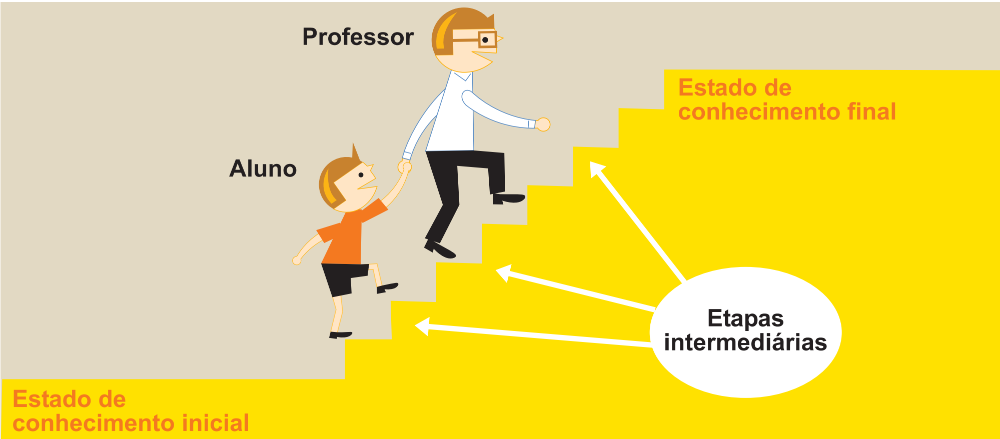
A concepção da escadinha tem seu suporte na linha behaviorista de pesquisas em psicologia, e se apóia na idéia que seria possível modificar o comportamento de um indivíduo a partir de situações de estímulo e reforço de respostas positivas. Devemos a Skinner a aplicação dessas idéias no campo educacional.

Em geral, o professor que se apóia nessa hipótese baseia sua ação educativa em três momentos principais. Em primeiro lugar, ele define precisamente os objetivos de aprendizagem que ele deseja que o aluno alcance. Para isso, ele define esses objetivos na forma: "ao final da aprendizagem o aluno será capaz de ..." (segue-se um comportamento observável). Se o objeto de aprendizagem é muito complexo, esse objetivo será decomposto em vários outros sub-objetivos.

Em segundo lugar, o professor elabora (ou retira de livros didáticos) situações em que o aluno será levado a apresentar o novo comportamento, o que demonstra que os sub-objetivos foram alcançados. Esse novo comportamento será objeto de uma recompensa, manifestada, geralmente, pela aprovação do professor.

Finalmente, uma vez que o objetivo foi alcançado, o professor oferece situações sistemáticas de treinamento, para que esse novo comportamento seja consolidado, o que permite a entrada no jogo didático de um novo objeto de aprendizagem.

Esse modelo pode ser esquematizado da seguinte forma:



Esse modelo é o mais representativo da pedagogia por objetivos e da instrução programada, bastante difundida nos anos oitenta, no Brasil; encontramos ainda essa concepção em grande parte dos softwares educativos encontrados atualmente, e na maioria das atividades conhecidas por "introdutórias" de nossos livros didáticos.

Nessa perspectiva, o erro também deve ser evitado a todo custo, pois ele pode deixar marcas irreparáveis no processo de ensino-aprendizagem. Mas se, apesar de todas as precauções, ele ainda "teima em aparecer", na maioria das vezes eles serão atribuídos a uma progressão muito rápida do jogo didático (um degrau muito alto). Além disso, a obrigação que o aluno aprenda por si mesmo, mas sem que os erros apareçam no cenário didático, acaba por induzir uma forte diretividade do professor, por trás das atividades propostas aos alunos.

Os limites de uma aprendizagem baseada nessa concepção nos parecem evidentes. Em primeiro lugar, a fragmentação da aprendizagem em pequenas etapas intermediárias muitas vezes impede que o aluno se aproprie do significado do que ele está fazendo. Além disso, a diretividade própria a esse tipo de ensino, pode capacitar o aluno a subir um certo degrau, mas o impede de ter uma visão mais global do conhecimento em jogo.

Em segundo lugar, essa mesma diretividade pode impedir o aluno de transferir para outras situações a aprendizagem em questão. Não somente, nesse tipo de ensino-aprendizagem os erros e obstáculos são "escondidos" da relação didática, como também, quando o professor "larga" a mão do aluno, ele se sente perdido, sem saber para onde ir.

Finalmente, encontramos o problema da fragmentação da aprendizagem em uma multitude de sub-objetivos; o fato de o aluno ter atingido uma parte (ou mesmo todos) dos objetivos intermediários, não garante absolutamente que ele tenha atingido o objetivo principal; o fato de sabermos girar o volante, utilizar a embreagem e passar as marchas, não garante que saibamos dirigir um automóvel.

Como vantagem, em primeiro lugar, devemos considerar que, em contraposição ao modelo baldista, onde o processo estaria centrado na figura do professor, aqui o aluno é o centro da aprendizagem, e o papel do professor é de favorecer a ação do aluno.

Em segundo lugar, esse modelo racionaliza a construção de seqüências didáticas, facilitando, conseqüentemente, a elaboração e execução do processo de avaliação. Não podemos esquecer, também, que o modelo da escadinha permite uma individualização do processo de ensino, a partir do momento em que o aluno "sobe a escada" de acordo com suas possibilidades.

Enfim, aqui o erro também será evitado, de forma que o aluno estará sempre em situação de sucesso, pois as atividades propostas ao aluno são elaboradas para que ele "acerte" as respostas. Estudos têm mostrado que esse modelo parece ser eficaz para a aprendizagem, a curto e médio prazo, de processos e para a aquisição de automatismos.

A concepção sócio-construtivista

As idéias construtivistas têm seu suporte nos trabalhos em psicologia genética, particularmente nos trabalhos de J. Piaget. Sua inserção na escola se deu a partir de uma conjugação de trabalhos vindos de várias áreas de conhecimento, como, por exemplo, da psicologia social (Perret-Clermont), da epistemologia (Bachelard) e das didáticas específicas: matemática (Brousseau, Vergnoud), ciências (Thiberguein, Astolfi, Develay), etc.

De uma certa maneira, a idéia construtivista se apóia no próprio processo histórico de construção do conhecimento científico, cujos objetos foram sendo construídos como respostas a problemas específicos. Em outras palavras, esse modelo coloca o aluno na situação de alguém que precisa resolver um certo problema mas que não possui a ferramenta necessária (ou mais econômica) para fazê-lo; nessa situação, não existe outra solução, para o sujeito, que construir essa ferramenta que permite a resolução de seu problema, numa situação análoga àquela vivida no processo de construção dos conceitos científicos.

Essa concepção de aprendizagem se baseia em um certo número de idéias, que colocaremos a seguir.

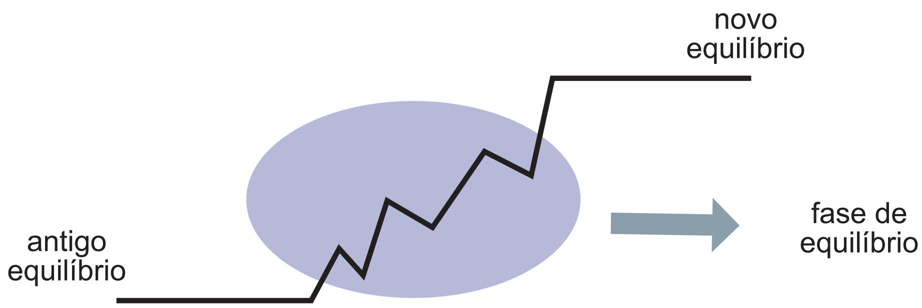
Idéia da ação

Ela se baseia nos trabalhos de J. Piaget, que afirma que "é através da ação que se aprende", ou seja, a aquisição de novos conhecimentos está estreitamente ligada ao processo de interação entre o sujeito e o objeto de estudo; em matemática costumamos dizer que o aluno aprende pela resolução de problemas, e não escutando o professor relatar esse objeto em sua aula. Assim, para que o sujeito resolva seu problema, ele não pode ficar em uma situação passiva; é preciso que ele tente sua resolução.

Idéia do desequilíbrio

Também é de Piaget essa idéia, que afirma que "a transição entre duas etapas de conhecimento se dá pela passagem por uma fase de desequilíbrio, onde o antigo conhecimento é colocado em questão, gerando um novo equilíbrio". Se contrapondo à idéia que a aprendizagem se realiza pelo acúmulo de conhecimentos, de forma linear, os teóricos desse modelo colocam que se o aluno não encontra certos obstáculos que permitem tomar consciência da insuficiência de suas concepções, ele tende a conservar essas concepções, impedindo, muitas vezes, o avanço no processo de aprendizagem. Por exemplo, a idéia que a multiplicação "faz crescer" costuma persistir mesmo depois que os alunos encontram as frações e os decimais, gerando dificuldades que não conseguem ser superadas pela simples explicação do professor.

Nós poderíamos esquematizar essa idéia pela figura abaixo:



A fase de desequilíbrio corresponde ao momento em que o aluno consegue perceber a insuficiência de suas ferramentas para resolver um certo problema. Essa fase comporta, na maioria das vezes, momentos de regressão, em que o aluno coloca em xeque seus conhecimentos e procedimentos já automatizados.

Idéia da representação espontânea

Ao contrário da concepção baldista, onde o aluno é suposto iniciar uma nova aprendizagem com a cabeça vazia, a idéia da representação espontânea, fundamentada em Gaston Bachelard, parte do princípio que o aluno sempre inicia uma certa aprendizagem com uma certa bagagem de representações, que ele mobiliza no momento de resolver um certo problema. Como diz Bachelard, "em qualquer idade, o espírito não é jamais virgem, tábua lisa ou cera sem impressão".

O fato de pensar que ampliar uma figura geométrica consiste em acrescentar um mesmo número às dimensões dessa figura, ou traçar sistematicamente uma vertical quando se solicita ao aluno a construção de perpendiculares, são reveladores de algumas concepções, dos alunos, sobre alguns objetos de conhecimento. Dessa forma, nos parece importante que o professor tenha clareza da existência dessas concepções, não somente para que ele facilite a entrada no jogo didático de novos objetos de conhecimento, como, também, porque em grande parte dos casos, essas concepções estão diretamente ligadas a obstáculos que podem impedir a aprendizagem.

Idéia do conflito sócio-cognitivo

Essa idéia tem sua origem nos trabalhos desenvolvidos em psicologia social, particularmente pela Escola de Genebra. De acordo com esse ponto de vista, as interações sociais entre os alunos podem facilitar de maneira importante a aprendizagem; em particular, podemos destacar o trabalho em grupos e a prática do "debate científico" em sala de aula.

Podemos dizer, nessa perspectiva, que aprender é passar de uma antiga concepção a uma concepção nova, mais consistente, após colocar em questão a antiga concepção, que funciona tanto como ponto de apoio, como uma espécie de obstáculo à nova concepção. Assim, a responsabilidade pela construção do novo conhecimento é colocada nas mãos do aluno, sendo facilitada pelo aparecimento do conflito sócio-cognitivo, o que dá o nome ao modelo em questão, o "sócio-construtivismo".

Nesse modelo, a estratégia consiste em colocar o aluno em face de um obstáculo, gerando o aparecimento de um conflito interno ao sujeito. Esse conflito será gerado por uma contradição entre uma antecipação do aluno, baseada em suas antigas concepções, e a situação que lhe é apresentada, que coloca em evidência a insuficiência dessa antiga concepção. Esse conflito pode ser gerado pela própria situação de aprendizagem (meio) ou pelo debate entre os participantes da situação; as situações de aprendizagem baseadas nesse modelo são aquelas que chamamos de situações-problema.

Podemos esquematizar esse modelo da forma abaixo:

Primeiro momento
Permite que o aluno invista seus conhecimentos anteriores

→

Segundo momento
Permite que o aluno tome consciência da insuficiência desse conhecimento

→

Terceiro momento
Permite que o aluno **CONSTRUA** novos conhecimentos

Conclusão

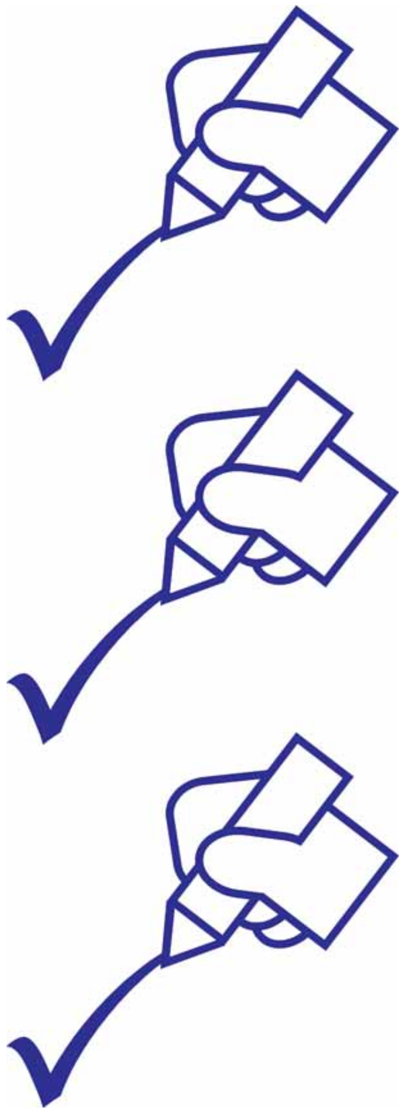
Nesse momento, é preciso retomar o que abordamos no início do texto, sobre o caráter bastante esquemático adotado na explicitação dos três modelos de ensino-aprendizagem. É preciso também relembrar que, se essas três concepções nos parecem as mais freqüentemente encontradas na maioria das classes de matemática, evidentemente podemos encontrar outros modelos que não contemplamos neste texto.

É preciso também deixar claro que essas concepções não são mutuamente excludentes. De fato, quando observamos algumas classes de matemática, ou quando preparamos nossas aulas, podemos perceber que, em geral, nós “navegamos” entre esses três tipos de concepções.

Por outro lado, devemos deixar claro que não temos, neste texto, a idéia de que um certo modelo é superior a outros. Na realidade nós escolhemos um modelo em função de um certo número de condicionantes, como o conceito a ser trabalhado, o tipo de alunos, o tempo disponível, o contrato didático que predomina na escola, etc. Por exemplo, para a introdução de um novo conceito em que sabemos antecipadamente a pregnância de certos obstáculos, a abordagem construtivista pode ser a mais adequada. Por outro lado, para o reforço de mecanismos operários, por exemplo, o modelo da escadinha pode ser o mais adequado, enquanto que para um determinado tema que não apresenta grandes dificuldades para os alunos, nem grande importância no programa, o modelo “tradicional” pode ser o mais econômico.

Finalmente, podemos dizer que o mais importante é que estejamos conscientes da existência de certas concepções de aprendizagem no processo de ensino-aprendizagem, e da clareza sobre qual dessas concepções estamos nos apoiando.

Solução das atividades



Solução das atividades

Situação-problema

A solução é pessoal. Apresentamos aqui uma possibilidade. Rui pensou em determinar melhor a situação. Como gostava mais de peixe, pensou em comer todos os dias o dobro em peixe do que comesse de feijão. Isso fez com que ele tivesse outra equação para resolver: $y = 2x$.

- Procurou soluções x e y que resolvessem ao mesmo tempo as duas equações:

$$\begin{cases} 3{,}3x + 0{,}7y = 1880 \\ y = 2x \end{cases}$$

- Pensou em usar o valor $y = 2x$ também na primeira equação. Isto é, onde estava escrito y na primeira equação, ele substituiu por $2x$:

  $3{,}3x + 0{,}7.(2x) = 1880$

  $3{,}3x + 1{,}4x = 1880$

  $4{,}7x = 1880$

  $$x = \frac{1880}{4{,}7} = 400$$

- Descobriu que teria que comer 400 gramas de feijão. O resto era fácil: deveria comer o dobro de peixe: 800 gramas.

Atividade 1

Parte para melancias	Parte para verduras	Rendimento das melancias	Rendimento das verduras	Rendimentos iguais ou diferentes?	Diferença entre os rendimentos (maior das verduras)
25	17	25 x 0,25 = 6,25	17 x 0,45 = 7,65	Diferentes	R$ 1,40
22	20	22 x 0,25 = 5,50	20 x 0,45 = 9,00	Diferentes	R$ 3,50
20	22	20 x 0,25 = 5,00	22 x 0,45 = 9,90	Diferentes	R$ 4,90
19	23	19 x 0,25 = 4,75	23 x 0,45 = 10,35	Diferentes	R$ 5,60
18	24	18 x 0,25 = 4,50	24 x 0,45 = 10,80	Diferentes	R$ 6,30

Na última coluna, os valores aumentam. Devemos procurar preencher a tabela para valores menores do que 25, na primeira coluna.

Atividade 2

Resposta pessoal.

Atividade 3

x = número de camisas.

y = número de calças.

$x + y = 20$

$5x + 12y = 170$

Atividade 4

$x + y = 56$

$x = y + 12$

Atividade 5

1º Modo (Comparação, isolando x):

$$\begin{cases} x = 72 - y \\ x = 3y \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{aligned} &72 - y = 3y \\ &72 = 3y + y = 4y \\ &\frac{72}{4} = y \rightarrow 18 = y \end{aligned}$$

$x = 3y = 3 \times 18 = 54$

Outro modo (Comparação, isolando y):

$$\begin{cases} y = 72 - x \\ y = \dfrac{x}{3} \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{aligned} &72 - x = \frac{x}{3} \\ &72 = x + \frac{3x + x}{3} = \frac{4x}{3} \\ &3 \times 72 = 4x \rightarrow 216 = 4x \rightarrow \frac{216}{4} = x \rightarrow 54 = x \end{aligned}$$

$x = 3y$

$54 = 3y$

$\frac{54}{3} = x \rightarrow 18 = y$

Resolvendo por adição:

$$\begin{cases} x + y = 72 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

Subtraindo (1ª equação) - (2ª equação), temos:

$$\begin{cases} x + y = 72 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$0 + 4y = 72 \rightarrow \frac{72}{4} = y \rightarrow 18 = y$$

$$x = 3y \rightarrow x = 3 \times 18 \rightarrow x = 54$$

Observação: Ainda pelo método da adição, há outros modos de resolução. Poderíamos ter feito, por exemplo: (2ª equação) - (1ª equação) ou 3 x (1ª equação) + (2ª equação).

Um modo fácil de resolver esse sistema seria por raciocínio: como as bicicletas para os homens são o triplo da quantidade das bicicletas para as mulheres, basta dividir o total 72 por 4 para obtermos o número de bicicletas das mulheres.

Atividade 6

$$\begin{cases} x + y = 1800 \\ (2/3)x + 1/2\ y = 1100 \end{cases}$$

$x = 1800 - y$

$2/3(1800 - y) + 1/2\ y = 1100$

$1200 - 2/3y + 1/2y = 1100$

$1200 - 4/6y + 3/6y = 1100$

$1200 - (1/6)y = 1100$

$100 = y/6$

$600 = y$ e, portanto, $x = 1200$.

Atividade 7

$$\begin{cases} 3x - 8\ y = -2 \\ x + 400y = 100 \end{cases}$$

Vamos resolver por três métodos, embora você possa ter feito apenas um.

Por substituição, isolando x na 2ª equação e substituindo-o na 1ª (também daria certo isolar o y):

$x = 100 - 400y$

$3 \times (100 - 400y) - 8y = -2$

$300 - 1200y - 8y = -2$

$- 1208\ y = -2 - 300 = - 302$

$$1208\,y = 302 \rightarrow y = \frac{302}{1208} = 0{,}25 \text{ (ou } 1/4)$$

$$x + 400y = 100$$

$$x = 100 - 400y = 100 - 400 \times \frac{1}{4}$$

$$x = 100 - 100 = 0$$

Por comparação, isolando x em ambas as equações e igualando-o (também daria certo isolar o y em ambas e igualar):

$$\begin{cases} x = 100 - 400y \\ 3x = -2 + 8y \rightarrow x = \dfrac{-2+8y}{3} \end{cases}$$

$$100 - 400y = \frac{-2+8y}{3}$$

$$300 - 1200y = -2 + 8y$$
$$-1200y - 8y = -2 - 300$$
$$-1208y = -302$$
$$1208\,y = 302 \rightarrow y = \frac{302}{1208} = 0{,}25 \left(\text{ou } \frac{1}{4}\right)$$

$$x + 400y = 100$$

$$x = 100 - 400y = 100 - 400 \times \frac{1}{4}$$

$$x = 100 - 100 = 0$$

Por adição. Um jeito possível é fazer 3 x (2ª equação) - (1ª equação):

3 x 2ª equação $\rightarrow$ $3x + 1200\,y = 300$

Subtraindo $3x - 8\,y = -2$

$$0 + 1208y = 302 \rightarrow y = \frac{302}{1208} = 0{,}25 \left(\text{ou } \frac{1}{4}\right)$$

$$x + 400y = 100$$

$$x = 100 - 400y = 100 - 400 \times \frac{1}{4}$$

$$x = 100 - 100 = 0$$

Atividade 8

Fazendo (2ª equação) - (1ª equação), obteremos: $-3y + z = 1$.

Fazendo (3ª equação) - (1ª equação), obteremos: $5y + 2z = 2$.

Resolvemos o sistema de duas incógnitas, por qualquer método:

$$\begin{cases} -3y + z = 1 \\ 5y + 2z = 2 \end{cases}$$

Multiplicando a 1ª equação por 2 $\rightarrow$ $-6y + 2z = 2$

Subtraindo a 2ª $\rightarrow$ $5y + 2z = 2$

$$-11y + 0 = 0$$

Portanto $y = 0$

Substituindo esse valor em qualquer uma das duas equações, teremos o valor de z. Vamos substituir em $-3y + z = 1$:

$-3 \times 0 + z = 1$

$0 + z = 1 \rightarrow z = 1$

Substituindo esses valores de y e de z em qualquer uma das três equações, teremos o valor de x. Vamos substituir na primeira:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 0 + 1 = 1 \\ x = 1 - 1 = 0 \rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Atividade 9

$A \geq 90/60$ ou $A \geq 1\ \ 1/2$

Atividade 10

$$p = 100 - \frac{19t}{2} < 24$$

$100 - 9{,}5t < 24$

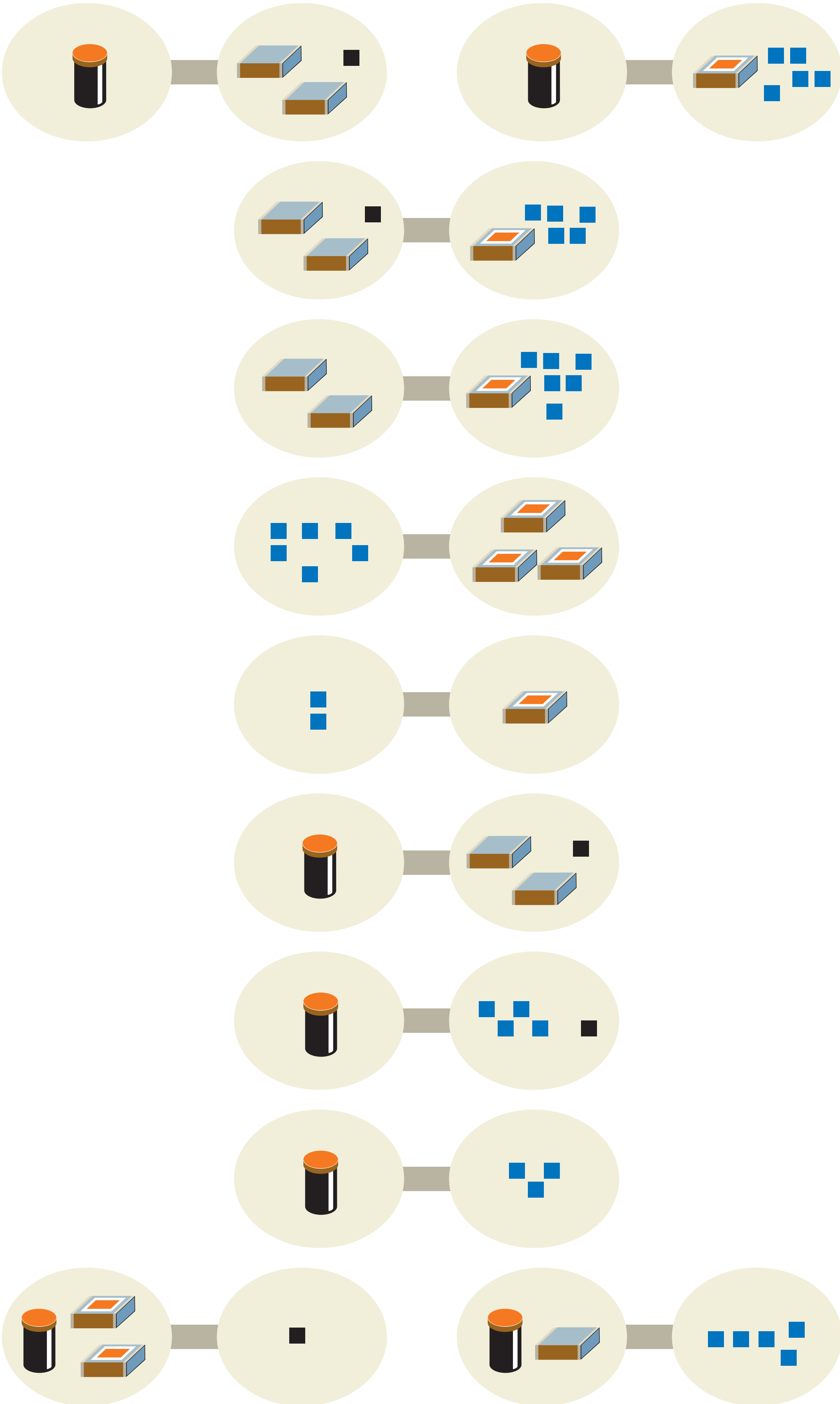
$100 - 24 < 9{,}5\,t$

$76 < 9{,}5\,t$

$8 < t$

Atividade 11

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x - y = 5 \end{cases}$$



Unidade 24

Estudo de fenômenos sociais cotidianos – função linear como modelo matemático presente em vários contextos

Sinval Braga de Freitas

Iniciando nossa conversa

Em nosso dia-a-dia estamos sempre comparando e relacionando números e grandezas. Percebe-se que a idéia de relação entre as grandezas é presente nas ações cotidianas, quando se pensa na proporcionalidade entre a sua idade e o tamanho do calçado que você usa e quando se conclui que o aumento na sua altura implica alterações na numeração de sua roupa.

Como a evolução do conhecimento na criança assemelha-se de modo geral à evolução do conhecimento da humanidade pela história[1], as noções iniciais de relação entre diferentes grandezas irão evoluir até que seja possível haver uma sistematização do conceito de função relacionado à proporcionalidade.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais prevêem, como um dos objetivos para o terceiro ciclo do Ensino Fundamental, o desenvolvimento do raciocínio proporcional por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

- observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas, e a construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade;
- representar, em um sistema de coordenadas cartesianas, a variação de grandezas, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação como diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não proporcional;
- resolver situações-problema que envolvam a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não-convencionais e convencionais, como as regras de três, por exemplo: quanto maior a medida do lado de um quadrado, maior é o seu perímetro; quanto maior a velocidade de um automóvel, menor será o tempo para percorrer a mesma distância; quanto mais salas para pintar, maior é a quantidade de tinta que você irá gastar.

Assim, é importante que sejam pensadas atividades que integrem a Matemática ao mundo real, de modo que o aluno perceba que existem relações entre diferentes grandezas envolvidas em diferentes fenômenos e sinta-se capaz de representar matematicamente essas relações.

1.Von Baer (1832) publicou sua "Teoria da Recapitulação", onde o desenvolvimento do embrião recapitulava os estágios anteriores das histórias das espécies. Ernest Haeckel (após a publicação de Darwin) renovou a "Teoria da Recapitulação", dizendo estar a teoria totalmente de acordo com os princípios de Darwin, publicando a chamada Lei Biogenética - Ontogenia recapitula a Filogenia.

Esta Unidade está organizada em três Seções:

Inicialmente, na Seção 1, apresentamos uma situação-problema envolvendo o tema: Função linear, um modelo matemático presente em vários contextos, introduzindo a Matemática integrada ao mundo real.

A Seção 2 explora os conteúdos matemáticos presentes na situação-problema, sendo o centro de nossa atenção o conceito de função linear, que é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade (Dante, 2002), e, dessa maneira, seguindo o caminho da proporção para a função linear, não só serão acrescentados novos conhecimentos, mas também reforçados os conceitos de razão, de proporção, seqüências, construção de gráficos, dentre outros. A idéia de proporcionalidade é um instrumento para o trabalho com as noções de variável e de função.

Sugestões para a realização da transposição didática serão analisadas na Seção 3, por meio da proposição de situações-problema possíveis de serem realizadas em sala de aula.

Professor, é interessante que você retome o que estudou, na Unidade 5 do Caderno de Teoria e Prática 2, sobre construção de gráficos. E, na Unidade 11 do Caderno de Teoria e Prática 3, você encontrará muitas atividades sobre relação entre variáveis, função e plano cartesiano.

Definindo o nosso percurso

Ao longo desta Unidade, esperamos que você possa:

1. Com relação ao seu conhecimento de conteúdos matemáticos:

- Resolver situações-problema relacionadas a fenômenos, identificando as variáveis envolvidas e as relações de interdependência entre essas grandezas.
- Construir modelos matemáticos para prever e observar o comportamento de fenômenos do mundo real, evoluindo da idéia de uma relação diretamente proporcional entre as grandezas, para a sistematização do conceito de função linear.

2. Com relação aos seus conhecimentos sobre Educação Matemática:

- Continuar a análise da importância das situações-problema no ensino-aprendizagem da Matemática.
- Compreender o significado do domínio da linguagem matemática nos dias atuais, especificamente em relação ao conceito de função (Texto de Referência).
- Retomar a discussão de algumas idéias sobre o currículo em rede.

3. Com relação à sua atuação em sala de aula:

- Conhecer e produzir situações didáticas, envolvendo o conceito de proporcionalidade e função linear e os aspectos relevantes para o domínio e a operacionalização deste conceito pelos alunos em situações cotidianas.

Seção 1

Resolução de situação-problema: função linear, um modelo matemático presente em vários contextos

Objetivo da seção

- Observar o comportamento de fenômenos do mundo real, especificamente os que expressam uma relação proporcional entre as grandezas envolvidas.
- Resolver situações-problema, analisando as relações diretamente proporcionais no comportamento de variáveis envolvidas em um determinado fenômeno.
- Entender a representação gráfica da função linear como um dos modelos matemáticos para o estudo da variação de grandezas que se encontram associadas.

Integrando a matemática ao mundo real

Aplicações das relações e funções no cotidiano[2]

Ao lermos diariamente um jornal ou uma revista, nos deparamos com gráficos, tabelas e ilustrações. Estes são instrumentos muito utilizados nos meios de comunicação. Um texto com ilustrações é muito mais interessante, chamativo, agradável e de fácil compreensão. Não é só nos jornais ou revistas que encontramos gráficos. Os gráficos estão presentes nos exames laboratoriais, nos rótulos de produtos alimentícios, nas informações de composição química de cosméticos, nas bulas de remédios, nas faturas de energia elétrica, enfim, em todos os lugares. Ao interpretarmos estes gráficos, verificamos a necessidade dos conceitos de *plano cartesiano*.

O Sistema ABO dos grupos sangüíneos é explicado pela recombinação genética dos alelos (a,b,o), e este é um bom exemplo de uma aplicação do conceito de *produto cartesiano*.

Articulando conhecimentos

Professor, você sabe qual é o seu tipo sangüíneo? Pense no que esta informação tão importante na área de saúde e biologia genética tem a ver com nossos conhecimentos

2. Adaptado do texto extraído da página http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio.

matemáticos e com a sua aplicação no ensino. Como combinamos geneticamente nossos grupos sangüíneos? Lembre-se de que você já trabalhou com combinação na Unidade 18.

O Sistema ABO[3]

A tabela abaixo nos ajuda a entender como combinamos geneticamente nossos grupos sangüíneos. Por meio dela você determina como podem ser os grupos sangüíneos dos filhos a partir dos grupos dos pais.

Lembre-se: quando nos referimos ao grupo sangüíneo de uma pessoa, estamos nos referindo ao seu fenótipo. Para cada fenótipo pode existir mais de um genótipo. Veja no quadro abaixo os genótipos correspondentes para cada fenótipo. Utilize a nossa calculadora para determinar o grupo dos filhos a partir do fenótipo.

Fenótipo (grupo)	Genótipo
A	AO e AA
O	OO
B	BO e BB
AB	AB

Se você é do grupo A, deve possuir um dos dois genótipos: AA e AO.

Se você é do grupo O, o seu genótipo é OO.

Para utilizar a tabela anterior, primeiramente determine os genótipos possíveis dos pais.

Exemplo 1: O pai é do grupo A, e a mãe é do grupo AB. Determinando os genótipos:

Pai = fenótipo A, genótipos possíveis = AA e AO.

Mãe = fenótipo AB, genótipos possíveis = AB.

Para pesquisar na tabela, localize, na linha superior da tabela, os genótipos de um dos pais, no nosso exemplo localize os genótipos AA e AO do pai. Na primeira coluna à esquerda, localize o genótipo da mãe: AB. O cruzamento das linhas a partir dos genótipos nos dá:

Para o pai com genótipo AA, filhos AA e AB. Para o pai com genótipo AO, filhos AB, AA, BO e AO.

Exemplo 2: O pai é do grupo O, e a mãe é do grupo O. Determinando os genótipos:

Pai = fenótipo O, genótipos possíveis = OO.

Mãe = fenótipo O, genótipos possíveis = OO.

3.http://www.hemonline.com.br/herancabo.htm.

Para pesquisar na tabela abaixo, localize, na linha superior da tabela, os genótipos de um dos pais, no nosso exemplo localize os genótipos OO do pai. Na primeira coluna à esquerda, localize o genótipo da mãe: OO. O cruzamento das linhas a partir dos genótipos nos dá:

Para pai e mãe com genótipos OO, filhos OO.

	OO	AA	BB	AO	BO	AB
OO	OO					
AA	AO	AA				
BB	BO	AB	BB			
AO	AO, OO	AA, AO	AB, BO	AO, AA, OO		
BO	BO, OO	AB, AO	BB, BO	AB, BO, AO, OO	BO, BB, OO	
AB	AO, BO	AA, AB	AB, BB	AB, AA, BO, AO	AB, AO, BB, BO	AB, AA, BB

Ao relacionarmos espaço em função do tempo, número do sapato em função do tamanho dos pés, intensidade da fotossíntese realizada por uma planta em função da intensidade de luz a que ela é exposta ou pessoa em função da impressão digital, percebemos o quão importantes são os conceitos de funções para compreendermos as relações entre os fenômenos físicos, biológicos, sociais...

Olhemos para algumas situações de nosso dia-a-dia

- Determinar a distância percorrida por um carro movendo-se com velocidade constante.
- Determinar o preço de certa quantidade de cadernos sabendo-se o valor unitário.
- Determinar o preço de um imóvel em função do CUB (custo do metro quadrado de construção).

Observe que em todas essas situações existe uma relação proporcional entre as grandezas, pois envolvem relações entre duas variáveis x e y:

- x = tempo e y = distância percorrida em função do tempo;
- x = número de cadernos e y = custo total;
- x = número de metros quadrados e y = custo total.

Relações entre variáveis

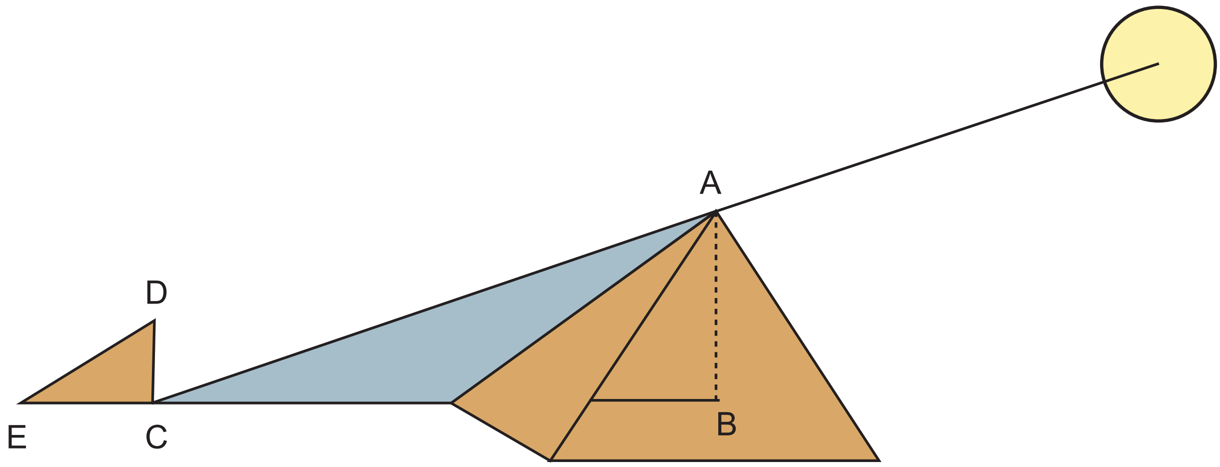
Em diversas situações cotidianas é possível observar a existência de algumas variáveis que se encontram em relação de interdependência. Aqui, serão apresentadas algumas destas situações. Caberá a você, professor, identificar as variáveis envolvidas e, em cada caso, observar quando elas são dependentes ou independentes. Lembre-se de que isso já foi objeto de estudo da Unidade 11 – Caderno de Teoria e Prática 3.

Visitando a História da Matemática

Alguns episódios da História da Matemática ilustram soluções de problemas que encantaram matemáticos famosos no passado, em que se observa a utilização da relação proporcional entre as grandezas. Como, por exemplo, o desafio de Tales.

O Desafio de Tales
Certa vez, em suas andanças pelo Egito, Tales teria sido desafiado por um faraó a medir a altura de uma de suas pirâmides. Mas havia uma condição: ele não poderia se aproximar dela com nenhum tipo de instrumento de medida.

Para resolver o seu desafio, Tales utilizou a seguinte estratégia: apoiou uma estaca de tamanho conhecido, 1 metro, sob a luz do Sol. Observe na figura abaixo:



O objetivo era comparar a sombra da pirâmide com aquela projetada pela estaca. Como as faces da pirâmide são inclinadas, Tales precisou fazer um ajuste. Acrescentou metade do lado da base da pirâmide à medida de sua sombra, para obter a distância até o centro da base. O passo seguinte foi estabelecer uma relação entre essas duas medidas (altura da estaca e da pirâmide).

A proporção pôde então ser escrita:

$$\frac{\text{altura da estaca}}{\text{medida da sombra 1}} = \frac{\text{altura da pirâmide}}{\text{medida da sombra 2}}$$

Sombra 1 - medida da sombra da estaca.

Sombra 2 - medida da sombra da pirâmide.

Como Tales conhecia a altura da estaca (1 metro) e possuía um instrumento para medir a sombra da estaca e a sombra da pirâmide, o valor desconhecido neste caso era a altura da pirâmide. Escrevendo a razão entre essas grandezas, ele construiu uma proporção e resolveu o problema.

- Professor, você ficou curioso quanto aos detalhes matemáticos dessa resolução?
- E nos dias de hoje, como é possível calcular a altura de uma pirâmide?
- Você já pensou no quanto a idéia de proporcionalidade está presente nos problemas matemáticos e nas situações do dia-a-dia de um modo geral?

Na Seção 3, trabalharemos juntos essas questões.

Este é um exemplo da aplicação do conceito de proporcionalidade que vem sendo trabalhado ao longo da História do Homem e, especificamente, na História da Matemática.

Em nossa situação-problema inicial, vamos analisar quatro situações que apresentam contextos diferentes em que se aplicam a idéia de proporcionalidade.

Vamos analisar e resolver as atividades a seguir identificando as grandezas envolvidas em cada situação. É interessante construir uma tabela para cada situação, com o objetivo de melhor visualizar a relação entre as grandezas envolvidas.

Atividade 1

A venda de livros[4]
Em uma livraria, o preço de venda de um livro é de R$ 15,00 por unidade. A receita total obtida pelo livreiro pode ser calculada pela fórmula: receita total = preço de venda por unidade vezes a quantidade de livros vendidos.

4. Questão adaptada: DANTE, 2002. Ensino Médio. Volume Único.

a) Quais as grandezas envolvidas?

b) Indicando por x a quantidade de livros vendidos, escreva uma expressão matemática que represente essa relação.

c) O que você poderia afirmar observando a relação entre a receita total e o número de livros vendidos?

Atividade 2

A comissão do vendedor[5]

Na situação de empregabilidade atual, muitos trabalham como vendedores autônomos. Uma situação muito comum no dia-a-dia é o cálculo da comissão recebida. Supondo que um vendedor autônomo receba uma comissão de 10% sobre o total de suas vendas no mês, podemos dizer que a comissão que ele recebe é dada em <u>função</u> de suas vendas.

a) Quais as grandezas envolvidas nesta situação?

b) Se indicarmos por x este total de vendas, qual é a expressão matemática que representa a comissão do vendedor?

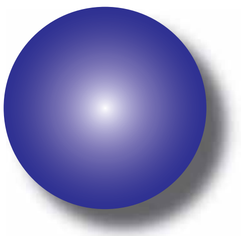
c) Em um mês em que a venda foi de R$ 100.000,00, qual foi a comissão do vendedor?

Você se lembra como se representa uma expressão matemática? Caso não se lembre, pesquise em alguns livros e tente novamente. Observe que, mesmo que você não tenha conseguido representar uma expressão matemática neste momento, é possível saber qual a comissão do vendedor em um mês em que a venda foi de R$100.000,00, utilizando os seus conhecimentos sobre porcentagem.

Lembrete

É importante pensar que na função o valor de uma variável depende de uma outra variável, mas apenas para determinados tipos de relações. Para relembrar esta idéia, retorne à Unidade 11 do Caderno de Teoria e Prática 3.

Atividade 3



O comprimento de uma circunferência[6]

Professor, recordando os seus conhecimentos geométricos, você verá que o comprimento **C** de uma circunferência é dado em <u>função</u> da medida **D** do diâmetro, pois

5. Questão adaptada: DANTE, 2002. Ensino Médio. Volume Único.

6. *Idem*.

C = **D**. Considerando esta relação, percebe-se que o comprimento **C** é proporcional à medida **D** do diâmetro.

a) Procure identificar as grandezas envolvidas nesta situação.

b) É possível, com base nestes conhecimentos, determinar o coeficiente de proporcionalidade?

Atividade 4

Retorne às atividades e, em cada caso, identifique "qual é a grandeza que varia em função da outra".

Na Atividade 1: ______________________________

Na Atividade 2: ______________________________

Na Atividade 3: ______________________________

Resumindo

Em cada situação estudada, observa-se que:

- existem grandezas que estão inter-relacionadas;
- a relação entre estas grandezas é proporcional;
- existe uma variação entre as grandezas e uma relação de interdependência nesta variação. Ou seja, uma grandeza varia em função da outra.

Podemos dizer que, nas situações exploradas nas Atividades de 1 a 3, temos modelos de função linear? Você saberia definir o que é uma função linear?

Caso você não consiga, pesquise em livros de 8ª série e continue estudando esta Unidade. Na Seção 2, exploraremos com mais profundidade a idéia de proporcionalidade e o conceito de função.

É interessante ainda pensar nas seguintes situações, bem freqüentes no nosso cotidiano:

- O valor de uma corrida de táxi pode ser expresso por uma função linear? Por quê?
- E o valor da postagem de uma correspondência enviada pelo correio?

Seção 2

Construção do conhecimento matemático em ação: função linear

Objetivo da seção

- Ressignificar o conceito de função linear, identificando-a como um modelo matemático para os problemas de proporcionalidade.
- Identificar aspectos relevantes na construção deste conceito, tais como: relação de interdependência entre duas grandezas, representação gráfica desta relação.
- Representar graficamente situações que expressem relações proporcionais entre grandezas.
- Caracterizar função afim e função linear.
- Observar particularidades de diferentes gráficos.
- Estudar o Teorema de Tales como aplicação da idéia de proporcionalidade.

Revendo seus conceitos: funções

Nas situações estudadas na Seção anterior, observamos a presença da idéia de função. O estudo das *funções* nos permite estabelecer conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diversas formas de pensamento matemático, porque estas funções podem ser utilizadas na compreensão de vários fenômenos do cotidiano ou das Ciências e porque têm grande relevância cultural tanto no que diz respeito a suas aplicações, como no que diz respeito à contribuição histórica para o desenvolvimento da Matemática e das Ciências em geral.

Conteúdos como as razões, as proporções, as relações diretamente ou inversamente proporcionais entre suas grandezas, as equações e os sistemas de equações formam a base do estudo das *funções*. Dentre os exemplos dados na Seção anterior, destacaram-se as relações proporcionais entre as grandezas para encaminhar a idéia de função.

Encontramos, nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o 4º ciclo (p.82), a importância do trabalho com raciocínio proporcional.

> "Do raciocínio proporcional, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
>
> representar, em um sistema de coordenadas cartesianas, a variação de grandezas, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não proporcional;(...)."

Ao vivenciar situações em que tenha que representar em um sistema cartesiano a variação entre grandezas diretamente proporcionais, o aluno estará construindo, por meio da ação, o significado de função linear.

Além disso, podemos ainda conectar *funções* ao estudo de gráficos com os quais constantemente estamos em contato, seja por meio de jornais, revistas e outros meios. O estudo das funções inclui também a localização de pontos em um plano cartesiano, formando uma rede de desenvolvimento para se chegar à compreensão do conceito de função.

$$b \in R$$

Articulando conhecimentos

Vamos refletir um pouco sobre uma função genérica $y = ax + b$, tal que $a \neq 0$ e a e $b \in R$. Esta é uma função afim. O expoente de x é 1. A letra "a" chama-se coeficiente angular ou inclinação da reta em relação ao eixo horizontal x; quanto maior o valor de a, mais a reta se afasta da posição horizontal. Como você já estudou, na Unidade 8 do Caderno de Teoria e Prática 2, o gráfico que representa essa função é uma reta.

Se falarmos de função cujos coeficientes de x são diferentes, poderemos verificar o quanto uma reta está mais inclinada do que a outra em relação aos eixos. Ou ainda, se algum coeficiente passar de positivo para negativo, veremos como será modificada a inclinação dessa reta.

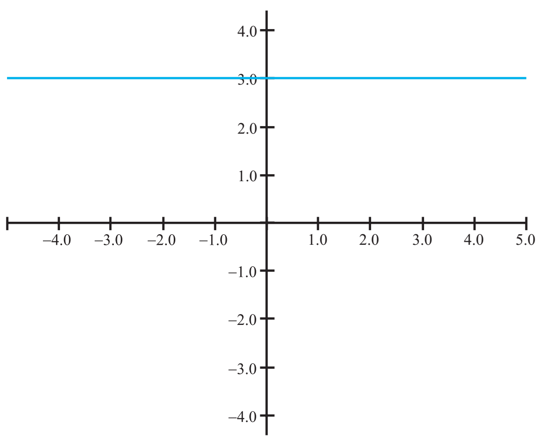
Quando construímos um gráfico, é oportuno avaliarmos quais seriam os pontos mais interessantes para marcamos nele de modo a obtermos uma melhor visualização.

Por exemplo, o ponto em que a reta corta o eixo das abscissas $(x, 0)$ e o ponto em que ela corta o eixo das ordenadas $(0,y)$ são pontos que devem ser marcados, pois eles fornecem dados importantes na análise de um gráfico.

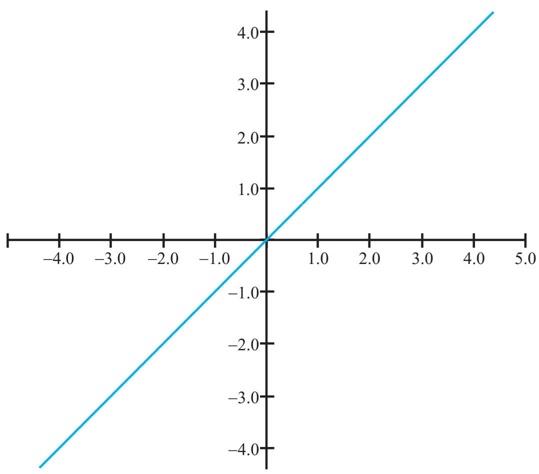
Atividade 5

Abaixo estão destacados alguns gráficos com várias particularidades. Relacione os gráficos às suas devidas particularidades descritas a seguir:

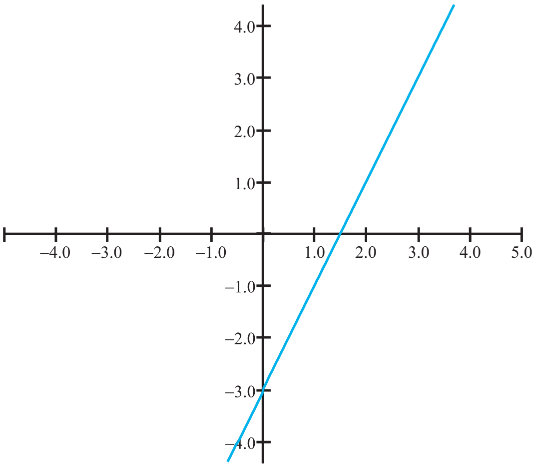
a)



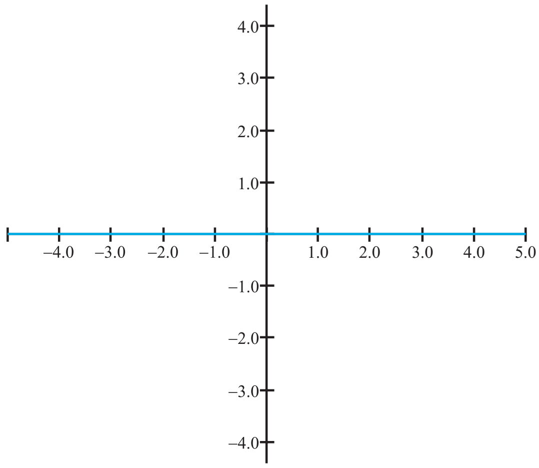
b)



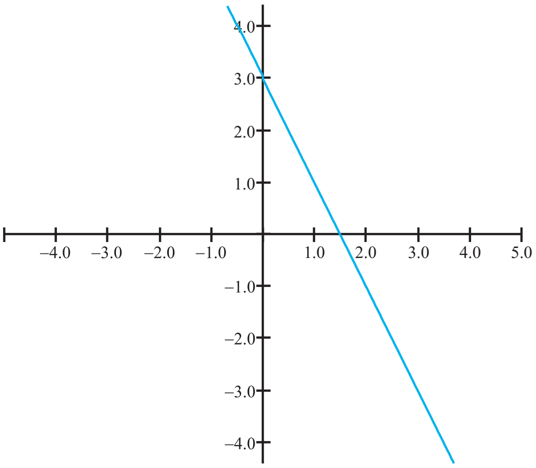
c)



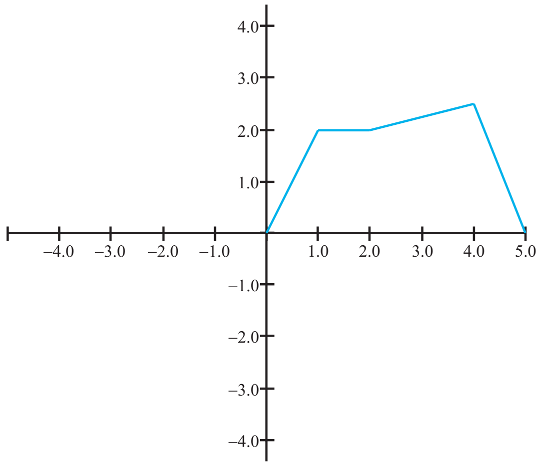
d)



e)



f)



( ) Gráfico de uma função crescente (quando os valores de x aumentam, os correspondentes f(x) também sofrem acréscimos).

( ) Gráfico de uma função identidade f(x) = x (os valores da variável dependente são iguais aos valores da variável independente).

( ) Esta é uma função composta.

( ) Gráfico de uma função decrescente (quando os valores de x aumentam, os correspondentes f(x) sofrem um decréscimo).

( ) Gráfico de uma função nula (para qualquer valor de x, o valor associado é zero, isto é, f(x) = 0 para $\forall\ x \in$ R).

( ) Gráfico de uma função constante f(x) = c (o valor da variável é fixo).

Um pouco da vida de Descartes

René Descartes, nascido em 1596 em La Haye, em um povoado da Touraine, numa família nobre. De 1604 a 1614, estuda no colégio jesuíta de La Flèche.

Decepciona-se com o ensino que lhe foi ministrado: a filosofia escolástica não conduz a nenhuma verdade indiscutível. Mas, as matemáticas o agradavam por causa da certeza e da evidência de seus raciocínios. Ainda jovem, Descartes busca outras fontes de conhecimento: a experiência da vida e a reflexão pessoal.

Defendeu que a Matemática era a grande modeladora da ciência, pois, segundo ele, dentre todas as áreas do conhecimento, só a Matemática era a certa, e o estudo deveria ser nela baseado. Descartes procurava a verdade de todas as coisas da ciência por meio da Matemática.

A despeito de algum exagero de cunho filosófico, Descartes inventou um novo método para enfrentar problemas geométricos, cuja essência consiste em estabelecer uma correspondência entre pontos e pares ordenados de números reais, viabilizando assim uma correspondência entre curvas do plano e equações. Este método permite que os modelos matemáticos, se escritos na forma algébrica, possam ser representados na forma geométrica e vice-versa. Assim, depois de Descartes, os modelos matemáticos na forma algébrica puderam, e ainda podem, ser representados na forma gráfica e, se o gráfico é a mesma situação, só que escrito de forma diferente, podemos entendê-lo como mais um modelo matemático, cuja característica fundamental é espelhar uma situação, tornando-a mais visível a especialistas ou não. Desde então, passou-se a colocar praticamente tudo em gráficos.

Fonte: CHAVES, M. I. A, 2005.

Nesta Unidade, trabalharemos especificamente com o conceito de função linear, explorando a idéia de proporcionalidade entre duas grandezas, e retomaremos a construção de gráficos, observando as particularidades do gráfico que representa uma função linear.

Lembrete

Professor, lembre-se de que, na Unidade 11 do Caderno de Teoria e Prática 3, você estudou tanto o conceito de função por meio de diagramas, quanto a representação de pontos no plano cartesiano tendo explícitos os significados de ordenada e de abs-

Definindo função linear

Uma função é chamada de polinomial de 1º grau quando é definida pela fórmula matemática $y = ax + b$, com aÎR* e $b \in R$. No caso particular da função linear, o termo b é igual a zero. Nas Atividades 1,2 e 3 apresentadas na Seção 1, vimos:

- A relação entre o preço do livro e o valor a ser pago em função do número de livros vendidos. Essa relação foi expressa pela fórmula $y = 15x$. O coeficiente a neste caso é $a = 15$.
- Que a comissão que o vendedor recebe é dada em função de suas vendas, ou seja, $y = 0{,}10x$. Neste caso, $a = 0{,}10$.

- Que, no caso da circunferência, o comprimento desta varia em função do diâmetro. A expressão matemática é dada por C = π D, portanto, o coeficiente a é o valor de π.

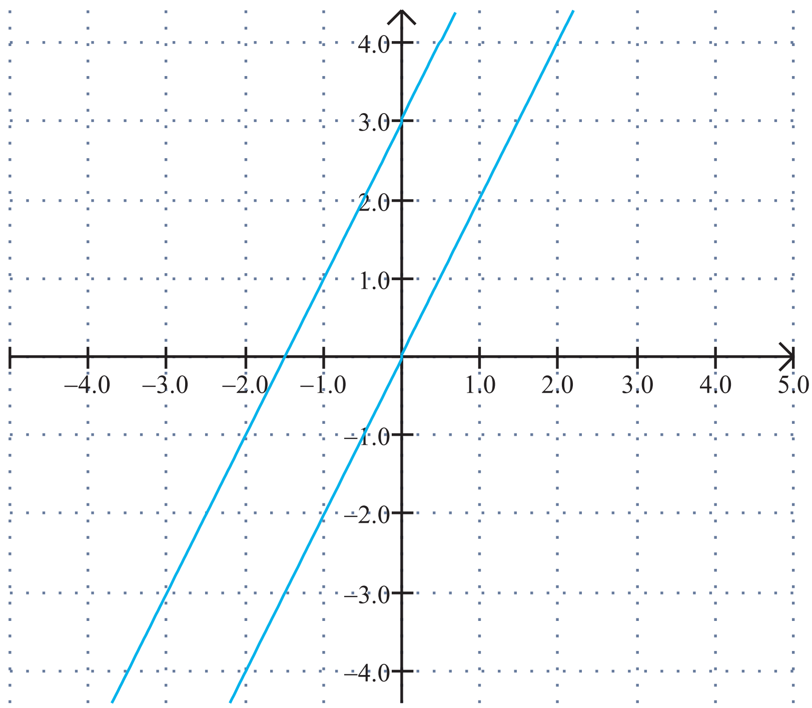
Observe que, nas situações estudadas, temos o valor do coeficiente a e que, em nenhum dos casos, a função apresenta um coeficiente b. Matematicamente diz-se que b = 0.

É ainda importante observar que em cada caso temos uma relação proporcional entre as grandezas e que, como dissemos antes, a função linear é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade.

Uma característica da função linear é a sua representação gráfica. Observe os gráficos estudados na Atividade 5, estude novamente o gráfico da letra b. Ao estudar as particularidades deste gráfico, você deve ter notado que ele é uma reta que passa pela origem. Você já pensou por que isto ocorre? Sabemos que o comportamento do gráfico é determinado também pelo valor de seus coeficientes. Pense, no caso da função linear em que o valor do coeficiente b é igual a zero, o que isto significa no gráfico que representará esta função.

Vamos agora construir o gráfico da função linear

Você se lembra que na Unidade 22 vimos como traçar retas perpendiculares e como construir um plano cartesiano. Vamos agora, sobre um plano cartesiano, construir o gráfico de duas funções, observar as suas características e compará-las.



O que você observou em relação a este gráfico?

- Em quais pontos a reta cortou o eixo das ordenadas na função y = $2x + 3$?
- E na função y = $2x$?
- Em quais pontos a reta cortou o eixo das abscissas em cada uma das funções?

Sintetizando

A partir destas observações, podemos concluir que:

O gráfico da função afim $y = 2x + 3$ deslocou-se 3 unidades para cima em relação ao eixo das abscissas, e o gráfico da função linear $y = 2x$ passou pela origem. Matematicamente, podemos dizer que a função linear definida como um caso particular da função afim tem como representação gráfica uma reta, que passa pela origem, pois o seu coeficiente linear é igual a zero. Lembrando que é o coeficiente linear que determina o deslocamento da reta em relação à origem.

Agora é com você!

Atividade 6

Retorne à Seção 1, analise cada situação proposta nas Atividades 1, 2, 3 e represente graficamente a variação das grandezas. Observe se os gráficos construídos têm a característica de um gráfico de função linear. Para facilitar a construção dos gráficos, é importante construir a tabela definindo valores para as variáveis x e y.

Após a construção dos gráficos, você deve ter observado que:

- os gráficos são retas que passam pela origem;

- existe uma relação proporcional entre as grandezas.

Um caminho válido para a compreensão do conceito de função linear, proposto aqui, é a observação da proporcionalidade entre grandezas. Isto irá exigir um “olhar matemático” para a realidade, o que pode contribuir no seu processo de construção de conhecimentos de um modo geral, e uma melhor e mais sistemática percepção dos fenômenos que ocorrem na realidade.

Atividade 7

O lixo metálico

Jogamos fora muitos metais. Quase $\frac{1}{10}$ do que se acumula no lixo é metal. Esse lixo é constituído em sua maior parte por latas de conserva. As latas de bebida, confeccionadas em alumínio, representam um centésimo do volume deste lixo. Pesquisas revelam que, em países industrializados, cada pessoa usa, em média, 26 kg de alumínio por ano.

quase $\frac{1}{10}$ de todo o alumínio usado hoje nos países desenvolvidos é reciclado. Em alguns desses países, metade das latas de refrigerante e de cerveja é feita de alumínio reciclado.

Você já parou para pensar que existem milhares de pessoas que tiram do lixo o seu sustento?

Agora vamos imaginar a seguinte situação:

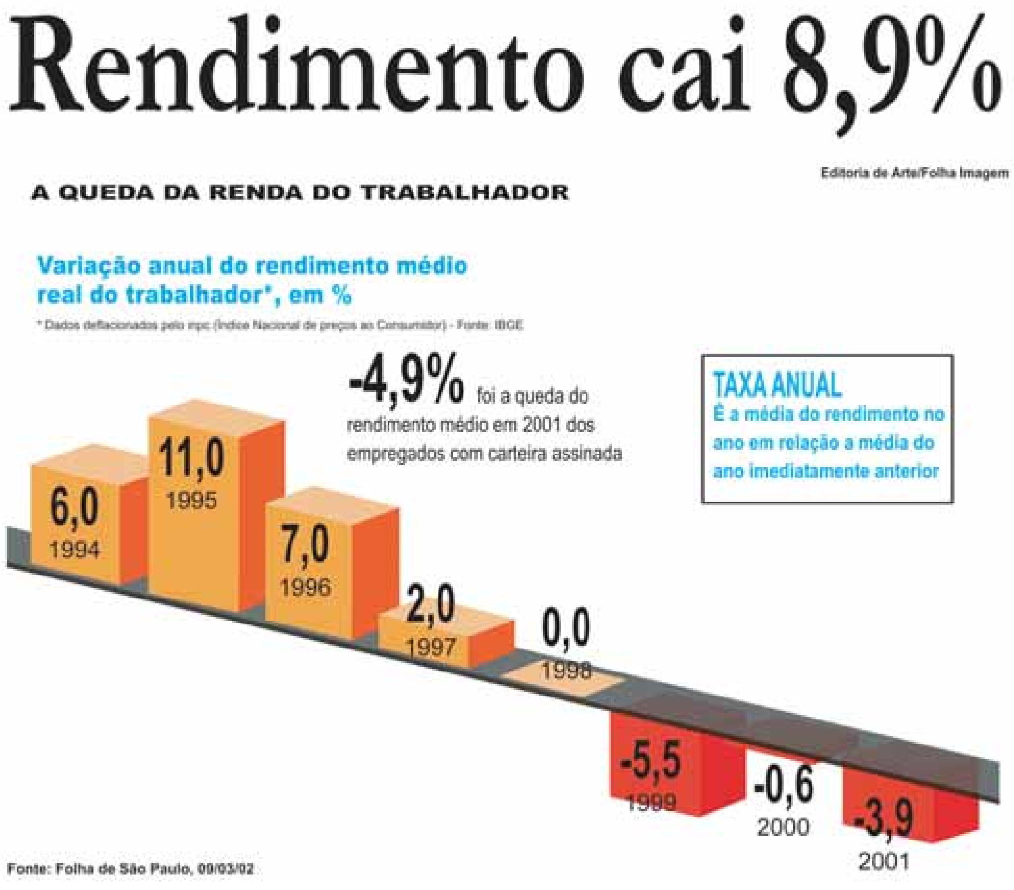
Um grupo de alunos resolve implantar um projeto de educação ambiental em sua escola. O projeto consiste em coletar e selecionar o lixo produzido pelos alunos durante o recreio, ao mesmo tempo em que pretende conscientizar os colegas "para jogar o lixo no lixo", selecionando sempre.

Decidiram que coletariam e venderiam as latinhas de refrigerante, e o lucro seria revertido em alimentos para uma creche localizada próxima à escola.

Sabendo que o preço de compra do quilo do alumínio é de R$ 0,70 e que os alunos querem reservar R$ 50,00 para despesas diversas (como transporte, sacos para embalar, etc.), determine:

1. A expressão matemática que representa esta situação.
2. Quantos quilos de alumínio deverão ser vendidos no mínimo para se obter R$ 50,00?
3. Trace o gráfico da função encontrada.
4. Observando o comportamento do gráfico, diga se esta função é linear.

Observe o gráfico abaixo:



Você estudou este gráfico na Unidade 3 do Caderno de Teoria e Prática 1. É possível representar esta situação em um gráfico cartesiano? Em cada situação, devemos fazer uma análise do fenômeno que está sendo discutido e decidir sobre a adequação de cada tipo de representação gráfica. Pesquise algumas situações em que é possível transitar entre diferentes tipos de representações gráficas, por exemplo: com os mesmos dados de um gráfico de barras, construir um gráfico de setores. Ou, com os dados expostos em um gráfico de segmentos, traçar um gráfico de barras.

Na Atividade a seguir, observam-se o fenômeno do crescimento populacional no Brasil e a relação entre as migrações externas, temas abordados na Unidade 22, e o crescimento natural ou vegetativo da população (diferença entre as taxas de natalidade e as de mortalidade).

Poucos países conheceram um crescimento populacional tão grande e rápido como o que ocorreu no Brasil nos últimos 120 anos.

De 1872 (primeiro censo) a 1991 (décimo censo), a população brasileira passou de quase 10 milhões para pouco menos de 150 milhões de pessoas, um aumento de quinze vezes em menos de 120 anos.

Em apenas três décadas (período entre 1950 e 1980), a população brasileira teve um acréscimo de 67 milhões de pessoas: passou de 52 para 119 milhões. Este acréscimo é muito superior à população atual de alguns países, como, por exemplo, a França, a Itália e o Reino Unido (cerca de 57 milhões cada). Equivale, também, ao dobro da população atual da Argentina (33 milhões de pessoas). Observe a tabela:

Crescimento da população brasileira no período 1872-1995

Ano	População absoluta
1872	9.930.478
1890	14.333.915
1900	17.318.556
1920	30.653.605
1940	41.165.289
1950	51.941.767
1960	70.070.457
1970	93.139.037
1980	119.002.706
1991	147.053.940
1995	161.400.000

Fontes: IBGE, Anuários Estatísticos do Brasil;
L'État du Monde, 1995.

Observando a tabela, você poderia prever qual seria a população em 2005?

Atividade 8

Identifique as grandezas envolvidas na situação descrita anteriormente, analise a relação entre elas e se esta relação é diretamente proporcional ou não. Após esta análise, diga se a função representada nesta situação é linear ou não.

Atividade 9

A Atividade a seguir traz uma situação matemática ilustrada por uma lenda. Acompanhe a estória e observe as questões propostas:

Conta a lenda que, na Grécia, o filho de um rei adoeceu.

Na busca da cura de seu filho, o rei, ao dirigir-se ao oráculo de Apolo, foi aconselhado, para agradar a esse deus, a duplicar o volume do altar de Apolo, cuja forma era a de um cubo. Na tentativa infrutífera de duplicar o volume do altar, os gregos simplesmente dobraram a medida do comprimento das suas arestas, o mesmo não ocorrendo com o seu volume. Segundo a lenda, em função desse erro, agravou-se o estado de saúde do filho do rei e esse veio a falecer.

a) Tente explicar por que ocorreu este erro. Os seus conhecimentos sobre relação proporcional entre as grandezas irão ajudá-lo a resolver esta questão.

   Pense nas seguintes questões e registre os seus cálculos.

b) Multiplicando-se a aresta a de um cubo por 2, por quanto ficará multiplicado o seu volume?

c) Para que o volume deste cubo seja duplicado, qual deve ser a medida de sua aresta?

d) Podemos dizer que à medida que aumentamos a aresta aumentamos PROPORCIONALMENTE o volume?

e) Analisando a estória, podemos dizer que as medidas da aresta e do volume são diretamente proporcionais?

Resumindo

Nesta Seção, os conteúdos de Matemática trabalhados foram:

- Relação entre grandezas.
- Exploração das noções de variáveis, dependência, regularidade e generalização.
- Representação gráfica de situações contextualizadas.
- Conceitos de função afim e de função linear.
- Observação das particularidades de diferentes gráficos.
- Exploração do conceito de proporcionalidade.

Seção 3

Transposição didática: proporcionalidade, relação entre variáveis, função linear, construção de gráficos

Objetivo da seção

- Conhecer e produzir situações didáticas envolvendo os conceitos de proporcionalidade, relação entre variáveis, função linear, construção de gráficos.
- Retomar as noções de currículo em rede, campos conceituais e conhecimento em ação presentes em diferentes situações de aprendizagem.
- Rever, no caso específico de função, a possibilidade de explorar os conceitos que fazem parte de um mesmo campo conceitual.
- Compreender a linguagem matemática como instrumento essencial para a análise e compreensão de situações cotidianas.

Nesta Seção, serão consideradas atividades que devem ser desenvolvidas em sala de aula, envolvendo os conceitos de: proporcionalidade, relação entre variáveis, função linear e construção de gráficos.

Refletindo sobre o uso da Linguagem Matemática

Professor, na Unidade 11 do Caderno de Teoria e Prática 3, você estudou a generalização de padrões, em que algumas idéias foram traduzidas em linguagem matemática, ou seja, quando dizemos que o dobro de um número adicionado de 5 é igual a 13, podemos escrever esta expressão utilizando números, letras e sinais matemáticos e assim teremos: $2x + 5 = 13$. Esta forma de escrever informações é muito comum em várias áreas do conhecimento que utilizam a linguagem matemática para expressar algumas relações, por exemplo: custo de produção e faturamento, despesas com materiais de construção em função da área a ser construída. Em Matemática Financeira, conhecemos fórmulas para o cálculo de juros compostos e montante entre outras. Em Biologia Genética, como vimos no exemplo do sistema ABO, a linguagem matemática é utilizada para melhor representar as combinações genéticas entre grupos sanguíneos. Na Atividade realizada na Unidade 11 do TP 3, você entrevistou pessoas e relacionou o grau de consciência ecológica e o grau de comportamento ecológico dos alemães, traduzindo esta relação em uma linguagem matemática.

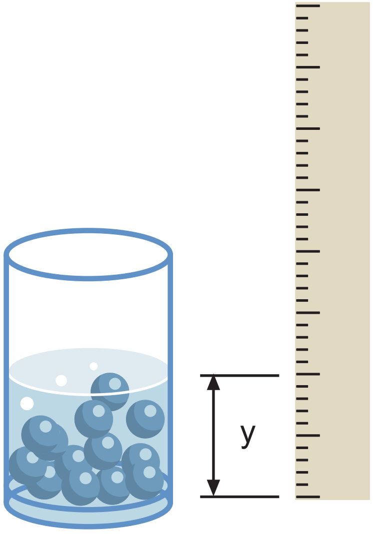
Sabemos que a linguagem matemática dispõe de um conjunto de símbolos próprios, codificados e que se relacionam segundo determinadas regras. Infelizmente, em nossas escolas tem sido priorizada uma linguagem matemática excessivamente formal que deixa de ter significação para o aluno, pois não traduz fenômenos reais, não se referindo a contextos e/ou situações significativas.

Nas situações estudadas nesta Unidade, analisamos casos em que estavam envolvidas algumas grandezas, existindo uma relação de proporcionalidade entre elas. Como você teve a oportunidade de observar, nas Atividades realizadas nas Seções 1 e 2, o comportamento das grandezas pode ser representado por uma expressão matemática. As expressões matemáticas são um exemplo simples do que vem a ser a linguagem matemática.

Na Atividade proposta a seguir, você, professor, terá a oportunidade de observar a relação proporcional entre o nível da água e o número de bolinhas colocadas no copo e de retornar ao conceito de variável dependente e independente. Será convidado a escrever uma equação que expresse a relação observada entre as variáveis, para tanto, fará uso da linguagem matemática. Após escrever a equação que expressa a relação entre as variáveis, verifique se a função definida é ou não uma função linear.

Esta Atividade deve ser levada para a sala de aula, pois envolve materiais simples de uso cotidiano e trata-se de um experimento que, com certeza, despertará a curiosidade e o interesse de seus alunos.

Atividade 10



Experimento: observando o nível de água em um copo[7] – Parte I

Neste experimento, o nível da água no copo é função do número de bolinhas de gude que colocamos dentro do copo. Vamos considerar o número de bolinhas como a variável independente e o nível de água como a variável dependente.

Para realizar este experimento, você precisará de: um copo cilíndrico, várias bolinhas de gude, uma régua, folhas de papel milimetrado.

Como fazer:

- coloque água no copo até atingir uma altura de 6cm;
- coloque as bolinhas de gude no copo com água (5 bolinhas de cada vez) e anote em uma tabela o nível da água a cada vez que colocar uma quantidade de bolinhas;
- construa, na folha de papel milimetrado, o gráfico (número de bolinhas x nível da água) a partir dos valores que você obteve.

7. Experimento adaptado do livro Algebra Experiments I, de Mary Jean Winter e Ronald J. Carlson.

Organização e Análise dos Resultados
Encontre uma possível equação para a situação trabalhada. A partir desta equação, responda:

a) À medida que acrescentamos bolinhas, o que acontece com a altura da água no copo?
b) Quantas bolinhas de gude devem ser colocadas para que a água fique no limite da borda do copo?
c) Que altura teremos se colocarmos somente 1 bolinha no copo? E se colocarmos 9 bolinhas?
d) Como você explica o fato de o gráfico que representa a função ser uma reta?
e) Essa função é uma função linear? Justifique.
f)) Mudando o tamanho das bolinhas e/ou o raio do copo, o que muda na expressão da função?

Lembrete

Professor, lembre-se de que, na Unidade 11 do Caderno de Teoria e Prática 3, ao fazer a atividade de generalizar padrões, você aprendeu a expressar-se por meio da linguagem matemática, então utilize-se desta linguagem para escrever a equação que expressa o comportamento do fenômeno que ocorre neste experimento.

Representando graficamente uma função linear

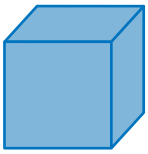
Em Unidades anteriores, você teve muitas oportunidades de construir e analisar gráficos. Este modo de representação de fenômenos observados na nossa realidade é um facilitador da comunicação, principalmente para as pessoas que têm a competência de traduzi-los . Nesta Unidade, vimos, particularmente, as características do gráfico de uma função linear. É muito importante que você, professor, resgatando o conceito de proporcionalidade, organize seqüências didáticas em que o aluno possa compreender a função linear como uma relação proporcional (toda função é uma relação) e possa caracterizar a representação gráfica desta função. Uma atividade que vocês podem realizar juntos é a construção de um gráfico que contemple uma relação bem simples e freqüente na sala de aula: o cálculo da nota da prova em função do número de questões acertadas. Por exemplo, pode-se fazer uma tabela para representar o rendimento de seus alunos em uma prova de 20 questões em que cada questão tenha o valor de 0,5 (zero vírgula cinco). Uma tabela representa a relação proporcional entre os valores, por exemplo:

Nº de acertos	Nota
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5

A Atividade proposta a seguir traz alguns conceitos geométricos, e você e seus alunos terão que relembrar o cálculo da diagonal do cubo. E, ainda, observar a relação entre a medida da aresta e a medida da diagonal, calculando a constante de proporcionalidade entre estas variáveis.

Atividade 11

Considere um cubo de lado medindo x de aresta e diagonal correspondente y:



Agora é com você: Complete a tabela observando a relação entre y e x:

x(medida da aresta)	y(diagonal)

Ao concluir a tabela, calcule o quociente de proporcionalidade entre o valor das variáveis:

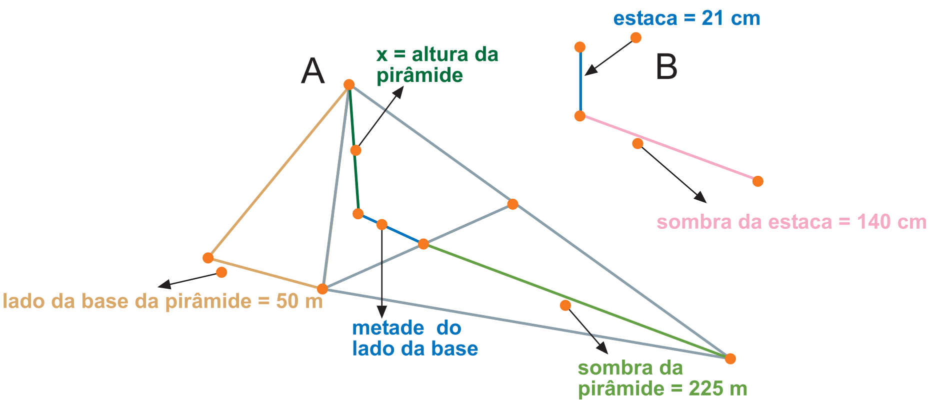
$$\frac{y}{x} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} =$$

$$\frac{y}{x} = \text{(constante de proporcionalidade).}$$

Atividade 12

Revivendo a história – Experimente você fazer os mesmos cálculos que Tales fez para encontrar a altura da pirâmide

A certa hora do dia, o sol, incidindo sobre o topo de uma pirâmide, projeta uma sombra de 225 m. No mesmo instante, a sombra de uma estaca com 21 cm de altura, localizada ao lado da pirâmide, mede 140 cm. Neste caso, qual a altura desta pirâmide?



Atividade 13

Proponha a seus alunos que pesquisem em jornais e revistas situações em que seja possível observar uma relação proporcional entre grandezas. Peça a eles que descrevam as relações observadas, identifiquem as variáveis, diferenciem variável dependente e independente, expressem as relações em forma de equação matemática e construam gráficos representando as situações pesquisadas.

Resumindo

Nesta Seção, vimos:

- Como a função linear pode ser estudada: explorando a noção de proporcionalidade entre duas grandezas, analisando diferentes situações, observando as variáveis envolvidas em cada situação, calculando a constante de proporcionalidade entre duas grandezas.
- A tradução das relações existentes entre as grandezas em linguagem matemática, por meio da escrita de equações.
- A representação gráfica da função linear que pode ser realizada pelos seus alunos em sala de aula, envolvendo desde situações cotidianas a episódios da História da Matemática.
- A possibilidade de seu aluno realizar pesquisas que, com certeza, contribuirão no desenvolvimento de competências e habilidades necessárias a uma melhor observação, interpretação, representação e comunicação de fenômenos que ocorrem na vida real.

Leituras sugeridas

História da matemática

BOYER, C. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Becher, Edusp, 1975.

EVES, H. *Introdução a História da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

STRUIK, D. *História concisa das matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1989.

AABOE, A. *Episódios da história antiga da matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (esgotado), 1984.

DANTZIG, T. *Número*: *A linguagem da ciência*. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

Função linear e proporcionalidade

LIMA, E.L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. 3ª ed: Publicação SBM, 1997.

O livro é uma coletânea de crônicas e comentários sobre conteúdos de Matemática. Em um dos textos do livro, o autor discute função linear e proporcionalidade. Este livro é utilizado nos Cursos de Aperfeiçoamento de Professores do Segundo Grau, organizados pelo IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), com o patrocínio de VITAE, Apoio à Cultura, Educação e Promoção Social.

Elon Lages Lima é pesquisador do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Professor da Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getúlio Vargas, professor *honoris-causa* da Universidade Federal do Ceará, membro titular da Academia Brasileira de Ciências e da Third World Academy of Sciences. É autor de vários livros de Topologia, Análise, Álgebra e Matemática Elementar, dois dos quais ganharam o Prêmio Jabuti.

Sobre a vida de Descartes
Site: http://www.mundodosfilosofos.com.br/descartes.htm

Sobre linguagem matemática
MENEZES, L. *Matemática, linguagem e comunicação*. Texto da Conferência, com o mesmo nome, proferida no ProfMat 1999 – Encontro Nacional de Professores de Matemática, que decorreu na cidade de Portimão. O texto está inserido nas Atas do Encontro. Disponível no site: http://www.ipv.pt/millenium/20_ect3.htm.

MACHADO, N.J. *Matemática e Língua Materna*. 5ª ed. v.1. São Paulo: Cortez Editora, 1990.

Bibliografia

BIANCHINI, E. *Matemática*. São Paulo: Moderna, 2002.

BIGODE, A.J.L. *Matemática hoje é feita assim*. São Paulo: FTD, 2000.

DANTE, L.R. *Tudo é Matemática*. São Paulo: Ática, 2002.

DANTE, L.R. *Matemática contexto e aplicações*. São Paulo: Ática, 2002.

GIOVANNI, J.R. *Matemática Fundamental – Uma nova abordagem*. São Paulo: FTD, 2002.

IMENES, L.M.P.; LELLIS, M. *Matemática*. 2ª ed. São Paulo: Scipione, 1997.

LIMA, E.L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. 3ª ed. Rio de Janeiro: Publicação SBM, 1997.

LONGEN, A. *Matemática: Uma atividade humana*. 1ª ed. Curitiba: Base Editora, 2003.

PAIVA, M. *Matemática Conceitos, Linguagem e Aplicações*. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2002.

VASCONCELOS, M.J.; SCORDAMAGLIO, M.T.; CÂNDIDO, S. *Matemática*. Coleção Matemática Ensino Médio. Projeto escola e cidadania para todos. São Paulo: Editora do Brasil, 2004.

PAIS, L. P. *Transposição didática*. In: MACHADO, S. (Org.). Educação matemática: uma introdução. São Paulo: PUC, 1999.

Sites consultados

http://www.educacional.com.br/

http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/geometria

Texto de referência

Matemática, Linguagem e Comunicação[1]

Luís Menezes[2]

Neste texto, pretendemos abordar, de forma inter-relacionada, a Matemática, a linguagem e a comunicação, tendo como pano de fundo a sala de aula. Desde logo, se nos coloca a questão: Por que refletir sobre a Matemática, a linguagem e a comunicação? Antes de mais nada, porque a Matemática desempenha, nos nossos dias, um papel fundamental no avanço científico. A Matemática tem funcionado como uma espécie de metaciência, na medida em que perpassa e estrutura muitas outras ciências. A Matemática tem mesmo sido apelidada, por diversos autores, de linguagem universal da ciência, sendo ela mesma detentora de uma linguagem própria que permite a comunicação entre "os iniciados".

Nem sempre a comunicação entre os "matemáticos profissionais" e os divulgadores de Matemática, nomeadamente os professores, tem sido a mais profícua, porque os primeiros tendem a ver como "impura" ou "pouco rigorosa" a Matemática que se pretende partilhar com as gerações mais jovens.

Neste trabalho, a Matemática interessa-nos enquanto área científica, mas principalmente enquanto disciplina escolar. É nesta segunda vertente que a Matemática tem sido mais popular – entenda-se mais falada – embora por razões pouco abonatórias para a disciplina. Falamos, como facilmente se infere, do insucesso escolar que grassa na disciplina de Matemática, fato que a torna um alvo apetecido dos comentários de alunos, de encarregados de educação e de outros agentes, que, de uma forma direta ou indireta, entram em contacto com a Matemática. O insucesso escolar, que não está circunscrito a qualquer área geográfica, a nenhum grupo social, nem a nenhum grupo etário, está ainda longe de encontrar formas eficazes de o debelarem.

A linguagem pretende, neste trabalho, ser analisada em dois níveis: i) a linguagem da Matemática; ii) a linguagem da sala de aula. É sobre o segundo nível que focaremos a nossa atenção. A linguagem é um aspecto central em todas as atividades humanas e em particular nas aulas. Como diz Stubbs (1987), ensinar e aprender confundem-se com a própria comunicação. Neste sentido, refletir sobre as práticas de sala de aula, em que a linguagem assume grande preponderância, parece plenamente sustentável.

Por último, a comunicação. A ligação entre a linguagem e a comunicação é óbvia, uma vez que esta última é a principal função da primeira. Sendo assim, e tendo em conta a onipresença da linguagem na sala de aula, parece oportuno questionar, por um lado, a eficácia da comunicação que tem lugar em uma aula de Matemática e, por outro, problematizar a própria comunicação em termos de ensino e aprendizagem da disciplina, à luz de resultados oriundos da investigação.

---

1. Texto da Conferência, com o mesmo nome, proferida no ProfMat 99 – Encontro Nacional de Professores de Matemática que decorreu na cidade de Portimão. O texto está inserido nas Atas do Encontro.

2. Da Escola Superior de Educação de Viseu e do Centro de Investigação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Linguagem, comunicação... Ou do que falamos

Esta área de estudo, por ser recente, padece de alguma indefinição em termos terminológicos. Este fato não é exclusivo da nossa comunidade de educadores matemáticos – ainda muito jovem – e tem sido apontado por diversos autores. Em uma revisão da literatura sobre linguagem no ensino e na aprendizagem da Matemática, Ellerton e Clarkson (1996) apontam a multiplicidade de significados dos termos linguagem e comunicação. A propósito do termo comunicação (entenda-se comunicação humana), Fiske (1995) refere que é uma daquelas atividades humanas que todos reconhecem, mas que poucos sabem definir satisfatoriamente. Por este motivo, parece-nos ser importante discutirmos, neste momento, o significado destes conceitos e de outros que habitualmente orbitam à sua volta, seja com discursos ou interações.

Ouvimos, com freqüência, falar de interações na aula de Matemática e, em alguns casos, percebe-se uma quase congruência com o termo comunicação. Na realidade, estamos perante conceitos diferenciados que apresentam, no entanto, zonas de intersecção. Embora os conceitos não sejam propriedade de nenhuma área do saber, o que é um fato é que alguns deles são nativos de algumas delas e desenvolveram-se no seu seio. É o que se passa, precisamente, com os termos em apreço: interações e comunicação. Enquanto o primeiro é oriundo da Sociologia, onde se fala muito de interações sociais, o segundo tem uma raiz muito forte na Lingüística. Assim, o ato de comunicar é um "ato de intercâmbio lingüístico entre dois interlocutores".

No entanto, "verifica-se que o intercâmbio recorre a outros meios além dos do sistema lingüístico propriamente dito (há a situação, o tipo de relações entre os interlocutores, etc.) e que as informações (no sentido vulgar do termo) recebidas pelo receptor não são todas de origem lingüística" (Gallisson e Coste, 1983, p. 142). Neste sentido, comunicação humana é uma forma de interação social entre indivíduos. Segundo a Teoria da Comunicação, esta interação supõe a transferência de informação entre um emissor e um receptor graças a uma mensagem que circula por meio de um canal. Sendo assim, podemos conceber interações – entendidas como ações que indivíduos exercem sobre outros – que não têm na sua matriz qualquer intenção comunicativa, uma vez que não há a finalidade de transferir qualquer informação.

Quando afirmamos que dois homens comunicam, consideramos duas realidades complementares, entendendo a palavra em dois sentidos: no sentido etimológico, "comunicar" está ligado ao adjetivo comum e ao substantivo comunidade. Comunicar será neste sentido "tornar comum", "pôr em comum" ou, ainda, "estabelecer comunidade". Os homens "realizam comunidade pelo fato mesmo de que uns com os outros comunicam" (Carvalho, 1983, p. 25). O mesmo autor acrescenta, por outro lado, que o termo comunicação, na acepção mais corrente, significa "transmitir" ou "transferir para o outro". Teoricamente, a eficácia da comunicação é medida pelo grau de aproximação entre a informação enviada e a que é recebida. No primeiro sentido, comunicar está relacionado com partilhar; no segundo, aproxima-se de transacionar.

Para que a comunicação verbal possa ocorrer, deve estar presente um certo grupo de fatores, que Jakobson (1973) sistematizou deste modo: um emissor, que envia a mensagem a um receptor, por meio de um canal de comunicação. Para isso, ele utiliza um código (supostamente comum aos dois). A situação que envolve a produção da mensagem, como as relações entre os sujeitos do ato verbal e as circunstâncias e acontecimentos extralingüísticos que enquadram a produção da mensagem, constitui o referente ou o contexto.

A linguagem, em sentido lato, corresponde a um "meio de comunicação utilizado por uma comunidade (...) para transmitir mensagens. Em sentido mais estrito, a linguagem é vista como um sistema de signos diretos ou naturais e pressupõe um sujeito falante e implica fenômenos ligados à transmissão da mensagem dentro de um contexto espaço-temporal e cultural chamado de situação. O estudo da linguagem comporta, pois, aspectos psicológicos (os psicólogos falam de atividade da linguagem), sociológicos, etnológicos e mesmo psicanalíticos. São estes aspectos não lingüísticos que distinguem a noção de linguagem da de língua ou de código.

O discurso refere-se às realizações escritas ou orais da língua, no caso concreto, aquelas que professores e alunos realizam no palco da sala de aula. Neste sentido, discurso é bastante diferente de comunicação, embora, por vezes, se confundam inexplicavelmente. Assumindo, assim, o discurso como o uso de um sistema lingüístico em contextos próprios, do ponto de vista da Pragmática, refere o modo como os significados são atribuídos e trocados pelos interlocutores em situações concretas e devidamente contextualizadas. A análise do discurso procura caracterizar as produções dos interlocutores ao nível lingüístico. De um ponto de vista mais amplo, a análise do discurso permite o estabelecimento de relações com problemáticas mais abrangentes (por exemplo, de um ponto de vista psicológico ou sociológico). Aí, passamos para a análise de conteúdo, uma vez que o processo de produção de sentido a partir da utilização de um determinado sistema lingüístico, tendo em conta, por um lado, um conjunto de condicionalismos, tem por referência um conjunto de idéias, valores ou convenções que existem fora das palavras trocadas (Gallisson e Coste, 1983). É, precisamente, esta vertente que mais nos interessa quando estudamos as realidades educativas que decorrem em uma sala de aula, uma vez que todo o ensino e aprendizagem da Matemática é mediatizado pela linguagem.

A Matemática como uma linguagem

A propósito da Matemática é comum ouvirmos termos e expressões como as que se seguem: "a Matemática é uma linguagem abstrata", "a linguagem da Matemática é de difícil compreensão aos alunos", "a linguagem da Matemática é precisa e rigorosa". Sendo a Matemática uma área do saber de enorme riqueza, é natural que seja pródiga em inúmeras facetas; uma delas é, precisamente, ser possuidora de uma linguagem própria, que, em alguns casos e em certos momentos históricos, se confundiu com a própria Matemática. Se atendermos à conceitualização que apresentamos para linguagem, facilmente admitimos esta particularidade na Matemática.

Na realidade, estamos perante um meio de comunicação possuidor de um código próprio, com uma gramática e que é utilizado por uma certa comunidade. Esta linguagem tem registros orais e escritos e, como qualquer linguagem, apresenta diversos níveis de elaboração, consoante a competência dos interlocutores: a linguagem matemática utilizada pelos "matemáticos profissionais", por traduzir idéias de alto nível, é mais exigente do que a linguagem utilizada para traduzir idéias em uma aula. Da mesma forma, a linguagem natural assume registros de complexidade diferentes dependendo da competência dos falantes.

A comparação que fazemos entre a linguagem natural e a linguagem da Matemática, em que apontamos similitudes, apresenta, como é fácil de adivinhar, diferenças marcantes. Desde logo, porque a linguagem matemática não se aprende a falar em casa, desde tenra idade – aprende-se, isso sim, a utilizar na escola. A aprendizagem da Matemática apresenta, também, diferenças, quando comparada com a aprendizagem de uma segunda língua natural – que habitualmente também ocorre na escola – pois não encontramos, no dia-a-dia, um grupo de falantes que a utilize, com exclusividade, para comunicar. A linguagem da Matemática carece, então, do complemento de uma linguagem natural.

Alguns autores defendem que a linguagem matemática assume diversos componentes: linguagem escrita, linguagem oral e linguagem pictórica (Usiskin, 1996). Na verdade, a linguagem matemática dispõe de um conjunto de símbolos próprios, codificados, e que se relacionam segundo determinadas regras que supostamente são comuns a uma certa comunidade e que as utiliza para comunicar. Porque os falantes são dotados da capacidade de falar, a linguagem matemática dispõe de um registro oral e, assim, podemos falar de uma linguagem matemática oral. Esta linguagem utiliza a língua natural como língua suporte. Embora com diferenças, a linguagem escrita da Matemática tem um caráter mais universalizante do que a linguagem oral. Usiskin (1996) sustenta que a Matemática possui também uma forma de expressão pictórica, por meio, por exemplo, de gráficos, diagramas, barras de Cuisenaire ou desenhos.

A aprendizagem da linguagem da Matemática nas nossas aulas tem passado por diversas fases, tendo-se, em algumas delas, concedido um destaque excessivo, a ponto de se ter privilegiado as questões puramente formais em detrimento das questões de conteúdo. A aprendizagem de um meio de comunicação deve estar subordinada ao ato de comunicar, ou seja, a aprendizagem de um código e das suas regras de funcionamento não deve, nem pode, ser desconectada do que pretende ser comunicado.

A linguagem da aula de Matemática

Tal como já defendemos, os atos de ensinar e aprender são na sua essência atos de comunicação. A presença da linguagem numa sala de aula é verdadeiramente avassaladora, sendo que será bastante difícil "olhar para a aula de Matemática" sem nos atentarmos para a linguagem desta mesma aula, por meio da análise do discurso e da análise de conteúdo. A linguagem da Matemática é híbrida, pois resulta do seu próprio cruzamento com uma linguagem natural, no nosso caso, o português.

As práticas dos professores têm um forte componente de linguagem. Estas práticas estão muitas vezes embebidas das visões e dos valores dos professores, dentre outras, sobre o lugar da linguagem e da comunicação no ensino e na aprendizagem da Matemática. A linguagem da aula de Matemática, além das concepções dos professores, é influenciada por outros fatores, como as aprendizagens anteriores dos alunos, o nível sócio-cultural e a formação de professores.

Na aula, professor e alunos desempenham papéis diferenciados, para os quais contribuem formas deliberadas de agir que variam consoante o modelo de ensino/aprendizagem preferido. As tarefas propostas influenciam e são influenciadas pela linguagem da aula.

A qualidade do trabalho desenvolvido por uma turma, e consequentemente o tipo de linguagem e a qualidade da comunicação, depende, em grande medida, da forma como o professor organiza as situações de ensino/aprendizagem, da forma como organiza o trabalho dos alunos, de como os orienta e das tarefas que apresenta.

Os atos de fala do professor durante uma aula, além de ocorrerem em grande número, primam também pela enorme variedade. Consoante aquilo que tem em vista, o professor pode expor, pode explicar, pode pedir, pode perguntar, pode sugerir, pode recorrer a outros atos de fala. Love e Mason (1995) sistematizam assim os atos comunicativos orais da responsabilidade ou com participação do professor: (i) o professor diz coisas aos alunos (expor, explicar ou conjecturar); (ii) o professor faz perguntas aos alunos; (iii) os alunos discutem entre si e com o professor.

Também Emília Pedro (1982), com base em uma investigação, discute sobre como é formada a prática na aula e como esse uso lingüístico implica uma competência semântica que reflete os contextos sociais. Relativamente às conclusões a que chega esta autora sobre o discurso da aula de Matemática, destacam-se as seguintes:

- O discurso da aula segue um conjunto de regras que configuram papéis para professores e alunos. O discurso é dominado pelo professor, por meio da ocupação do espaço de linguagem e da produção da linguagem.
- O tipo de perguntas que o professor seleciona para formular na aula determina não só as respostas dos alunos, mas também e em grande medida o seu conteúdo.
- Este padrão de discurso repete-se nos países industrializados, o que parece pressupor que as regras gerais estão fora do controle do professor. O professor tem a autoridade, mas ela forma-se fora do discurso e tem de ser executada. Assim, o professor está limitado, quanto ao conhecimento, a transmitir e à forma desta transmissão.
- O discurso da sala de aula sofre limitações externas criadas pelo Estado (currículo, horários, material, etc.) e limitações internas (posição social dos alunos na sociedade de que provêm).

As intervenções dos alunos dependem em grande medida do espaço discursivo que o professor "reserva", tendo em conta os modelos de ensino/aprendizagem que privilegia. Em uma aula de resolução de problemas, por exemplo, será importante que o professor estimule os alunos a mostrarem, dizerem, explicarem e criticarem as várias resoluções, procurando que a sua contribuição seja limitada a metacomentários.

A formulação de perguntas ocupa um lugar de destaque no discurso da aula de Matemática (Ellerton e Clarkson, 1996; Menezes, 1996), sendo aplicadas em situações diversificadas e com intuitos variados. A arte de questionar tem sido muito usada nas escolas enquanto um meio a que o professor deve e pode recorrer para aumentar e melhorar a participação dos alunos. Os benefícios do questionamento são apontados por alguns investigadores (Ainley, 1988; Menezes, 1996; Vacc, 1993). Segundo Sadker e Sadker (1982), o questionamento permite ao professor detectar dificuldades de aprendizagem, ter feedback sobre aprendizagens anteriores, motivar o aluno e ajudá-lo a pensar.

Pereira (1991), baseado em um estudo que desenvolveu, assinala outras finalidades das perguntas:

- Centrar a atenção dos alunos em aspectos que o professor considera relevantes.
- Provocar efeitos positivos na participação dos alunos (fazê-los falar).
- Promover no aluno uma atitude intelectual menos passiva (fazê-los pensar).
- Minimizar os efeitos da indisciplina.

Cohen e Manion (1992) defendem que as questões colocadas na sala de aula servem a duas grandes finalidades: (i) fazer pensar os alunos; (ii) testar o conhecimento dos alunos (antes e após novas aprendizagens). Relativamente a estas finalidades, os autores distinguem as perguntas que visam testar o conhecimento das que o visam criar. Baroody (1993) sustenta que as perguntas que o professor coloca ultrapassam estas duas finalidades. As perguntas podem gerar a discussão na sala de aula, promovendo o desenvolvimento de capacidades (como o raciocínio e a comunicação) e de atitudes.

Segundo Long (1992), as questões que os professores formulam e as subseqüentes respostas dos alunos são atividades importantes na sala de aula. Acrescenta que o questionar é um versátil e poderoso recurso para promover a compreensão e encorajar a investigação ativa de novas idéias. Além disso, as respostas dos alunos fornecem ao professor a informação que o permite monitorar e avaliar o trabalho individual e em grupo. Aquele autor arremata dizendo que uma comunicação efetiva na sala de aula contribui para o desenvolvimento da capacidade de pensar e melhora a aprendizagem dos alunos.

Ao professor compete iniciar e dirigir o discurso e usá-lo habilmente para desenvolver a aprendizagem dos alunos, de modo a dinamizar o envolvimento da turma no discurso, desenvolvendo a comunicação matemática. Devem-se colocar questões e propor atividades que desafiem o pensamento dos alunos. A um comentário do aluno, o professor deve regularmente perguntar o porquê ou pedir para que ele se explique.

Esta "habilidade" do professor para o questionamento passa pela capacidade de decidir quando colocar questões "provocadoras" ou questões "orientadoras" e depende do entendimento que tem da forma como deve decorrer a aula de Matemática, do seu papel e do papel do aluno.

No sentido de obter um bom questionamento na aula, McCullough e Findley (1983) e também Cohen e Manion (1992) enumeram um conjunto de aspectos que o professor deve ter em conta, nomeadamente:

- Preparar algumas questões antecipadamente.
- Fazer questões claras e concisas.
- Variar o nível de dificuldade, tentando envolver a maioria dos alunos da turma.
- Promover um tempo de pausa a seguir as questões.
- Colocar as questões a todo o grupo e só depois individualizá-las.
- Colocar questões que proporcionem ao professor o feedback sobre a aprendizagem dos alunos.

Em Johnson (1982), é possível encontrar outras indicações para se fazer um questionamento eficaz:

- Evitar fazer um grande número de perguntas cuja resposta é um simples "sim" ou "não".
- Evitar responder a perguntas formuladas.
- Depois da resposta de um aluno, perguntar o porquê.
- Evitar a formulação de um grande número de perguntas que apelem sobretudo para a memória.
- Tentar que os alunos se pronunciem sobre as respostas dos colegas.
- Evitar fazer perguntas que contenham a resposta.
- Fazer perguntas abertas.

Hargie (1983) apresenta um conjunto de conclusões, de caráter mais geral, relativas à eficácia do questionamento promovido pelo professor na sala de aula, das quais se destacam:

- É necessário que os professores fomentem a formulação de um maior número de perguntas de nível superior relativamente às perguntas factuais.
- Na sala de aula, as perguntas orais mostram-se mais eficazes do que as perguntas escritas.
- O uso de atividades de investigação é um bom meio de promover o questionamento.
- Os professores devem reenviar à turma as questões colocadas pelos alunos.
- É necessário fomentar o tempo de pausa após as questões e a seguir às respostas.

Em síntese, realçamos a importância que a pergunta tem em qualquer ato comunicativo, uma vez que corresponde a um desafio formulado aos outros interlocutores e, nessa medida, favorece as interações verbais na aula.

A comunicação no contexto das orientações para o ensino da Matemática: que discurso?

Este final de milênio está sendo pródigo em grandes mudanças na nossa sociedade e também na Educação. Movimentos em Educação Matemática têm por base uma nova visão do que deve ser o ensino e a aprendizagem da Matemática. Este conjunto de novas idéias que pressupõem diferentes finalidades do ensino da Matemática tem subjacentes novos enquadramentos metodológicos, diferentes papéis para o professor e para o aluno e novas formas de avaliação.

A preparação para uma sociedade que entra em um novo milênio, pleno de novos desafios, impõe uma nova forma de pensar a Educação. Mais do que informar, cabe à escola formar pessoas capazes de se adaptarem a uma sociedade cada vez mais exigente e em mutação mais rápida. Uma idéia veiculada em muitas propostas de trabalho é o desenvolvimento do "poder matemático" do aluno. Esta idéia de dotar o aluno de ferramentas que lhe permitam uma abordagem mais conseguida da realidade passa pela valorização de quatro aspectos considerados fundamentais: (i) a resolução de problemas; (ii) a comunicação; (iii) o raciocínio matemático; (iv) as conexões (NCTM, 1991).

As principais razões para focar o ensino da Matemática na comunicação podem ser sintetizadas, para Baroody (1993), em dois pontos: "a primeira é que a Matemática é essencialmente uma linguagem – uma segunda linguagem; a outra é que a Matemática e o ensino da Matemática são, no seu âmago, atividades sociais" (p. 99). Aquele autor sublinha que a Matemática é uma segunda linguagem, permitindo comunicar idéias de forma "precisa" e "clara".

A dimensão social da comunicação – outra razão avançada por Baroody (1993) – é também salientada por Hiebert (1992), quando assume que a comunicação é uma parte integrante do "fazer Matemática". Esta atividade matemática constitui-se, segundo o autor, como um processo de interação social onde a comunicação desempenha um papel relevante, tanto ao nível da Matemática feita pelos profissionais como daquela que é feita pelos alunos nas aulas.

Baroody (1993) aponta outros motivos para o professor estimular a comunicação na aula de Matemática, principalmente aquela que acontece entre os alunos: (i) desenvolve o conhecimento matemático; (ii) desenvolve a capacidade de resolver problemas; (iii) melhora a capacidade de raciocínio; (iv) encoraja a confiança.

A comunicação entre os alunos, tanto oral como escrita, constitui um aspecto que o professor deve incrementar, porque permite o desenvolvimento de capacidades, de atitudes e de conhecimentos.

Esta estreita ligação da linguagem aos processos de estruturação do pensamento é também assinalada por Hoyles (1985, citada por Lappan e Schram, 1989). Esta autora considera que, na sala de aula, a linguagem tem duas funções: (i) a função comunicativa; (ii) a função cognitiva. A primeira destas funções prende-se, segundo aquela autora, com a capacidade de o aluno, em uma dada situação, ser capaz de identificar os elementos importantes e de relatá-los aos outros. A segunda está relacionada com a possibilidade de a linguagem promover a estruturação e a regulação do pensamento, especialmente quando o aluno está em interação com os outros.

Lappan e Schram (1989) consideram que qualquer aula de Matemática deve incorporar "espaços" onde o aluno possa raciocinar e comunicar as suas idéias. Acrescentam que é necessário que o professor escute os alunos e lhes peça para explicitarem o seu pensamento. Aquelas autoras, em jeito de conclusão, afirmam que se os professores querem ajudar os alunos a valorizarem a Matemática, de forma a tirarem partido do seu poder, é fundamental mudarem as suas práticas, dando tempo para os alunos explorarem, formularem problemas, desenvolverem estratégias, fazerem conjecturas, raciocinando sobre a validade dessas conjecturas, discutirem, argumentarem, preverem e colocarem questões.

Esta nova visão da comunicação na sala de aula pressupõe um outro tipo de discurso. O professor, como principal responsável pela organização do discurso da aula, tem aí um outro papel, colocando questões, proporcionando situações que favoreçam a ligação da Matemática à realidade e estimulando a discussão e a partilha de idéias.

Tendo em mente esta nova forma de conceitualizar a comunicação, Baroody (1993) desenha o quadro de uma aula de Matemática, a que chama de tradicional: o livro e o professor são as fontes de onde brotam correntes de palavras, muitas delas com pouco significado para os alunos; a comunicação dos alunos nas aulas restringe-se a respostas curtas a perguntas formuladas oralmente pelo professor e a exercícios escritos modelados anteriormente. Nestas aulas, os alunos não são chamados a explicar as suas idéias, nem a confrontá-las com as dos colegas. Apesar de os alunos estarem agrupados em turmas com duas a três dezenas de elementos, a aprendizagem faz-se no mais perfeito isolamento, como se aqueles não tivessem condições físicas de estabelecer comunicação. Se achamos que o quadro se deve alterar, com outro tipo de discurso, temos que repensar o que fazemos antes, durante e depois de uma aula; logo, devemos repensar o papel da linguagem nesses diversos momentos.

Bibliografia

AINLEY, J. *Perceptions of teachers´ questioning styles*. Proceedings of PME XII (pp. I/92-99), Veszprém, Hungary, 1988.

APM. *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 1988 .

BAROODY, A. *Problem solving, reasoning, and communicating, k-8: Helping children think mathematically*. New York: Macmillan, 1993.

CARVALHO, H. *Teoria da linguagem: Natureza do fenómeno linguístico e a análise das línguas* (Vol. I). Coimbra: Coimbra Editora, 1983.

COHEN, L. e MANION, L. *A guide to teaching pratice*. London: Routledge, 1992.

Commitee of inquiry into the teaching of Mathematics in schools. Mathematics counts (The Cockcroft Report). London: Her Majesty´s Stationery Office, 1993.

ELLERTON, N. e CLARKSON, P. *Language factors in Mathematics teaching and learning* A. J. Bishop et al. (Eds.). pp. 987-1033, International Handbook of Mathematics Education, 1996.

FISKE, J. *Introdução ao estudo da comunicação*. Porto: Edições Asa, 1995.

GALLISSON, R. e COSTE, D. *Dicionário de didáctica das línguas*. Coimbra: Livraria Almedina, 1983.

HIEBERT, J. *Reflection and communication: Cognitive considerations in school Mathematics reform*. *In* W. Secada (Ed.), International Journal of Educational Research (pp. 439-456). Oxford: Pergamon Press, 1992.

HOYLES, C. *What is the point of group discussion? Educational Studies in Mathematics*, 2, 205-214. 1985.

HOYLES, C. *Iluminations and reflections: Teachers, methodologies and Mathematics. Proceedings of PME XVI* (pp. III/263-286). Durham, USA, 1992.

JAKOBSON, R. *Linguistique et Poètique*. *In A.* Jacob (Ed). Genèse de la pensée linguistique. Paris: Livrairie Armand Colin, 1973.

JOHNSON, D. Todos os minutos contam: *Como fazer funcionar a aula de Matemática (texto policopiado)*, 1982.

LAPPAN, G. e SCHRAM, P. *Communication and reasoning: Critical dimensions of sense making in Mathematics*. In P. R. Trafton e A. P. Shulte (Eds.). New directions for elementary school Mathematics: 1989 Yearbook (pp. 14-30). Reston, VA: NCTM, 1989.

LONG, E. *Teachers´questionning and students´responses in classroom Mathematics. Proceedings of PME XVI* (pp. III/ 172). Durham, USA, 1992.

LOVE, E.; MASON, J. *Telling and asking*. Londres: Routlegde, 1995.

MCCULLOUGH, D. e FINDLEY, E. *How to ask effective questions*. Arithmetic Teacher. 1983.

MENEZES, L. *Concepções e práticas de professores de Matemática: Contributos para o estudo da pergunta*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 1996.

MEC. *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem* (Vol. II). Ensino Básico, 2º Ciclo, Reforma Educativa, Direcção Geral dos ensinos Básico e Secundário. Lisboa: Imprensa Nacional – Casa da Moeda, 1991.

NCTM. *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE, 1991. (Trabalho original publicado em 1989).

NCTM. *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE, 1994. (Trabalho original publicado em 1991).

NRC. *Everybody counts: A report to the nation on the future of Mathematics education*. Washington: National Academy Press, 1989.

PEDRO, E. *O discurso na sala de aula: Uma análise sociolingüística da prática escolar em Portugal*. Lisboa: Edições Rolim, 1982.

PEREIRA, A. *Comunicação e ensino das ciências: Contributo para o estudo da pergunta no discurso da aula de ciências do ensino básico* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa), 1991.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

SADKER, M. e SADKER, D. *Questionning skills*. In J. Cooper (Ed.), Classroom teaching skills. USA: D.C. Heath ad Company, 1982.

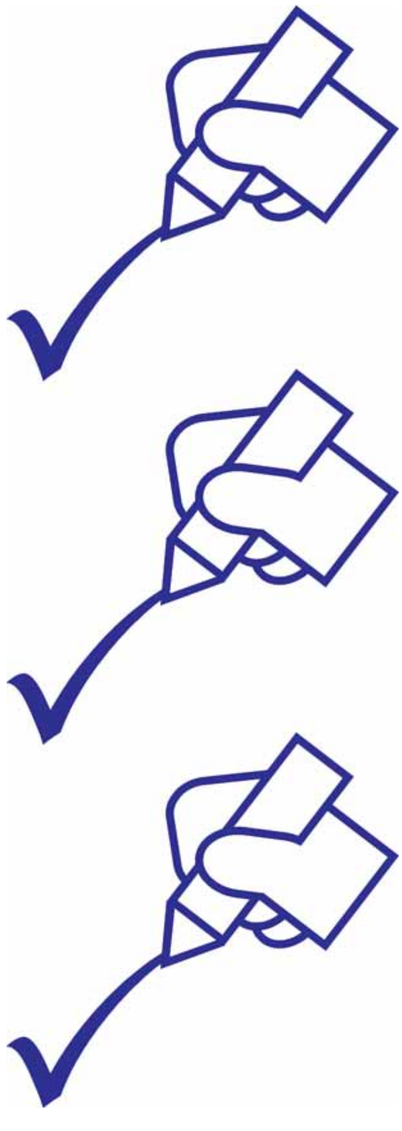
SCHÖN, D. *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York: Basic Books, 1983.

STUBBS, M. *Linguagem, escolas* e *aulas*. Lisboa: Livros Horizonte, 1987.

USISKIN, Z. *Mathematics as a Language*. In P. C. Elliott e M. J. Kenney (Eds.). Communication in Mathematics: 1996 Yearbook (pp. 231-243). Reston, VA: NCTM, 1996.

VACC, N. *Implementing the professional standards for teaching Mathematics: Questioning in the Mathematics classroom*. Arithematic Teacher, 2, 88-91, 1993.

Solução das atividades



Solução das atividades

Atividade 1

a) Preço a ser pago e quantidade de livros comprados.

b) $y = 15x$.

c) São diretamente proporcionais.

Atividade 2

a) Valor total das vendas e comissão por venda.

b) $y = 0{,}10x$.

c) R$10.000,00.

Atividade 3

a) Diâmetro e comprimento da circunferência.

b) Sim.

Atividade 4

Na Atividade 1: o preço a ser pago varia em função da quantidade de livros comprados.

Na Atividade 2: a comissão do vendedor varia em função de suas vendas.

Na Atividade 3: o comprimento da circunferência varia em função do diâmetro.

Atividade 5

c) Gráfico de uma função crescente (quando os valores de x aumentam, os correspondentes $f(x)$ também sofrem acréscimos).

b) Gráfico de uma função identidade $f(x) = x$ (os valores da variável dependente são iguais aos valores da variável independente).

f) Esta é uma função composta.

d) Gráfico de uma função decrescente (quando os valores de x aumentam, os correspondentes $f(x)$ também sofrem um acréscimo).

e) Gráfico de uma função nula (para qualquer valor de x, o valor associado é zero, isto é, $f(x) = 0$ para $\forall x \in R$).

a) Gráfico de uma função constante $f(x) = c$ (o valor da variável é fixo).

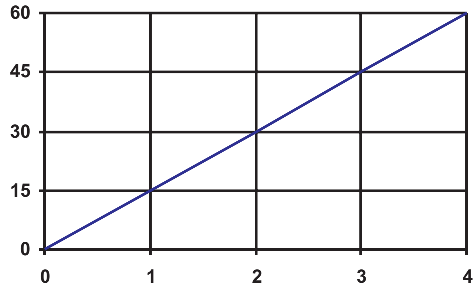
Atividade 6

1)

x = Total de livros comprados.

y = Preço a ser pago.

x	y (R$)
1	15
2	30
3	45
4	60

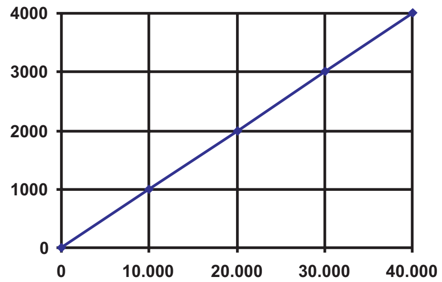


2)

x = Total das vendas.

y= Comissão do vendedor.

x(R$)	y(R$)
10.000	1.000
20.000	2.000
30.000	3.000
40.000	4.000

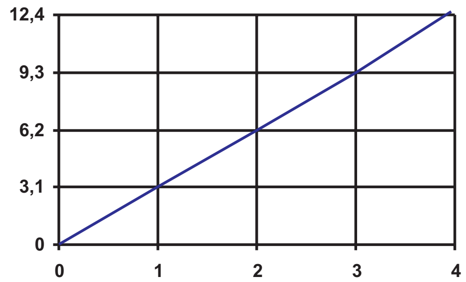


3)

x= Medida do diâmetro.

y= Comprimento da circunferência.

x	y
1	3,1
2	6,2
3	9,3
4	12,4

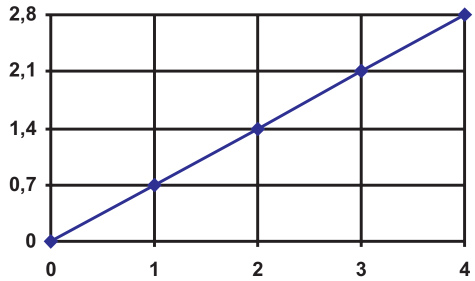


Atividade 7

1) y = 0,70x.

2) No mínimo, 72 quilos.

x	y
1	0,70
2	1,40
3	2,1
4	2,8



4) Observando o comportamento, podemos dizer que esta função é linear.

Atividade 8

- Não.
- Não representa.

Atividade 9

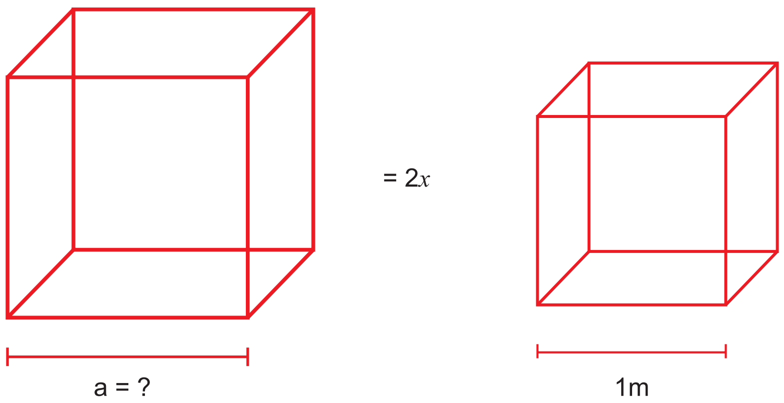
a) Por que a medida da aresta do cubo não é diretamente proporcional ao seu volume. Em vez de dobrar, os atenienses octuplicaram (aumentaram em 8 vezes) o volume do altar, pois:

para a = 1, o $V_{cubo} = 1^3 = 1$;

para a = 2, o $V_{cubo} = 2^3 = 8$.

b) Por 8.

c) A solução deste problema pode ser encontrada com os recursos da Álgebra: procura-se a aresta (a) de um cubo cujo volume seja o dobro do volume de um cubo de a = 1. ($V_{cubo} = a^3$):



Cálculo de a:

$V_{\text{cubo de aresta a}} = 2 \times V_{\text{cubo de aresta 1}}$

$a^3 = 2 \times 1^3$

$a^3 = 2$

$a = \sqrt[3]{2}$ aproximadamente 1,26.

Ou seja: um cubo de a = $\sqrt[3]{2}$, onde a é aproximadamente 1,26 m, tem o dobro do volume de um cubo cuja aresta seja 1 m.

d) Sim.

e) Quando a aresta aumenta, o volume também aumenta, mas não proporcionalmente.

Atividade 10

a) Aumenta.

b) Pessoal.

c) Pessoal.

d) À medida que colocamos bolinhas, o nível da água sobe e, dessa forma, aumenta o espaço ocupado dentro do copo. Estamos trabalhando com dois volumes, o da bolinha e o da água no copo, estabelecendo uma relação entre eles. Os pares formados por essa relação podem ser representados no plano por pontos. Essa relação é expressa por uma equação do 1º grau, cujo gráfico é uma reta.

e) Não, pois a equação dessa reta é $y = 0{,}35x + 6$ (lembre-se de que a altura da água no copo era de 6 cm).

f) Se mudarmos o tamanho da bolinha, o que mudamos é o termo b da função. Se alterarmos o raio do copo, o que se altera é o valor da variável a.

Abaixo, fornecemos um exemplo da realização da experiência.

Começaremos mostrando o experimento que realizamos.

***x* - Número de bolinhas**	**y - Nível de água**
5	6,35cm
10	6,7cm
15	7,15cm

Depois da coleta de dados, construímos um gráfico com os pontos obtidos. Percebemos que o esboço do gráfico aproximava-se de uma reta, então obtivemos a relação abaixo, por meio da equação da reta que passa por dois pontos:

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

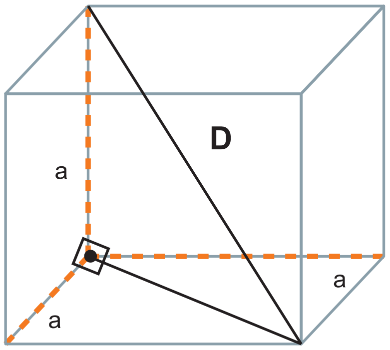
$$y - 6{,}35 = \frac{6{,}7 - 6{,}35}{2-1}(x - 1)$$

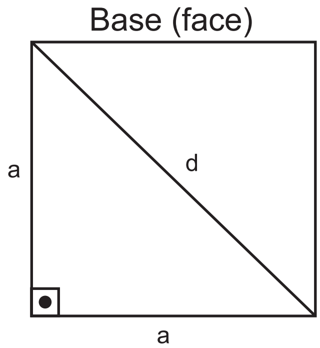
$$y - 6{,}35 = 0{,}35\,(x - 1)$$

$$y = 0{,}35x + 6$$

Atividade 11

É preciso fazer alguns cálculos que auxiliam na determinação da diagonal do cubo.





Diagonal de uma face: $d^2 = a^2 + a^2$

$d^2 = 2a^2$

$d = a\sqrt{2}$

Diagonal do cubo: $D^2 = d^2 + a^2$

$D^2 = 2a^2 + a^2$

$D^2 = 3a^2$

$D = a\sqrt{3}$

x(medida da aresta)	y(diagonal)
1	1,73
2	3,46
3	5,19
4	6,92

Ao concluir a tabela, calcule o quociente de proporcionalidade entre o valor das variáveis:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2}$$

$\frac{y}{x}$ ... $\sqrt{3}$ ...(constante de proporcionalidade).

Para facilitar a construção, use $\sqrt{3} = 1,73$

Atividade 12

Tales:

$$\frac{21}{140} = \frac{x}{22500 + 2500}$$

$$\frac{21}{140} = \frac{x}{25000}$$

$140x = 525.000$

$x = 3.750$ cm ou 37,5 m

Atividade 13

Fazer com os alunos.

PARTE II

TEORIA E PRÁTICA 6

Socializando o seu conhecimento e experiências de sala de aula

Socializando o seu conhecimento e experiências de sala de aula – unidade 22

Este momento final tem por objetivo:

1. rever e sintetizar por escrito as principais idéias tratadas na Unidade;
2. refletir sobre a proposição da equipe de pesquisadores, coordenada pela professora Nilza Bertoni, de ampliação das categorias do conhecimento geométrico: Geometria das Formas e das Propriedades de Construção; Geometria das Medidas e Proporções; Geometria da Orientação, discutida e exemplificada no Texto de Referência;
3. elaborar uma produção escrita a ser entregue ao formador, na próxima Oficina, contendo produções dos seus alunos.

Para tanto, três tarefas devem ser preparadas para serem levadas à Oficina e socializadas entre os colegas:

Tarefa 1

Nesta Unidade, vimos algumas das noções presentes na exploração do espaço físico, como: localização, deslocamento, leitura de guias, mapas e plantas. E também as construções com régua e compasso, projetando deslocamentos no plano, em papel quadriculado, para facilitar a localização de pontos no espaço.

Nesta primeira tarefa, peça a seus alunos que busquem, em livros de Geografia e em revistas especializadas em turismo ou outras publicações como o Guia Brasil[1], diferentes mapas e guias. Solicite que, em pequenos grupos, eles estudem os mapas e guias selecionados e procurem melhor entender as questões de localização. Incentive-os a observar a escala apresentada no mapa, converse com eles sobre a visualização dos deslocamentos quando projetados em um sistema de coordenadas cartesianas. Peça a eles que registrem e entreguem todas as observações.

Tarefa 2

a) Analise a produção de seus alunos e registre as observações mais interessantes feitas por eles.

b) Registre as suas reflexões sobre a proposição da equipe de pesquisadores coordenada pela professora Nilza Bertoni de ampliação das categorias do conhecimento geométrico apresentada no Texto de Referência.

Tarefa 3

a) Desenvolva com seus alunos a Atividade 5, proposta na Seção 2. Faça as adaptações que forem necessárias. Analise as produções.

b) Escreva um texto sobre o que você percebeu investigando a produção de seus alunos. Não esqueça de anexar algumas das produções.

Este material deve ser entregue ao Formador ao final da Oficina.

---

1. Guia Brasil. Quatro Rodas. Publicado pela Editora Abril. Site: http://guia4rodas.abril.com.br.

Socializando o seu conhecimento e experiências de sala de aula – unidade 24

Este momento final tem por objetivos: 1) rever e sintetizar por escrito as principais idéias tratadas na Unidade; 2) refletir sobre os desafios propostos na utilização da linguagem matemática, registrando-os por escrito; e 3) elaborar uma produção escrita a ser entregue ao formador na próxima Oficina, contendo produções dos seus alunos.

Para tanto, três tarefas devem ser preparadas para serem levadas à Oficina e socializadas entre os colegas:

Tarefa 1

Nesta Unidade, vimos como a função linear pode ser estudada: explorando a noção de proporcionalidade entre duas grandezas, analisando diferentes situações, observando as variáveis envolvidas em cada situação e a representação gráfica de diversas funções. Desta forma, conseguimos ressignificar o conceito de função linear e vimos que em alguns casos este modelo matemático não se aplica à situação considerada, como no exemplo das Atividades 8 e 9 da Seção 2.

Como primeira tarefa, peça a seus alunos que levem para a sala de aula jornais e revistas que contenham gráficos. Separe-os em grupos e peça-lhes que selecionem alguns gráficos; em seguida, solicite aos grupos que registrem o máximo de informações possíveis disponibilizadas nos gráficos. Peça-lhes, também, que tentem deduzir uma fórmula matemática que melhor defina o gráfico. Faça provocações questionando, por exemplo: – Quais são as variáveis em cada situação? – Quais são as variáveis dependentes e as independentes? – Como as grandezas estão variando? - Quando uma grandeza aumenta, a outra também aumenta proporcionalmente? Após estes e outros questionamentos possíveis, solicite aos alunos que diferenciem o gráfico da função linear das outras funções. Após a identificação destas diferenças, peça-lhes que registrem as características do gráfico que representa uma função linear.

Assim, resumindo, o registro de seus alunos deve conter: informações sobre os gráficos selecionados e características do gráfico que representa uma função linear.

Tarefa 2

a) Analise a produção de seus alunos e registre as observações mais interessantes feitas por eles.

b) Destaque os pontos principais do texto sobre linguagem matemática.

Traga esses documentos para discussão na Oficina.

Tarefa 3

Durante o estudo das Unidades, foram lidos vários textos sobre Educação Matemática, e você pode observar alguns pressupostos fundamentais sobre Educação Matemática. Segundo Pais (1999), esta área de estudo não visa simplesmente recomendar modelos ou receitas de solução a determinados problemas de aprendizagem, pois é somente a partir de resultados de pesquisas, sobretudo em sala de aula, que se podem indicar propostas pedagógicas com a finalidade de contribuir para uma melhor compreensão do fenômeno da aprendizagem da Matemática e, conseqüentemente, contribuir para a melhoria do seu ensino. Pensando nisso propomos que você:

a) Desenvolva com seus alunos a Atividade 7, proposta na Seção 2. Faça as adaptações que forem necessárias. Analise as produções.

b) Escreva um texto sobre o que você percebeu investigando a produção de seus alunos. Não esqueça de anexar algumas das produções.

Este material deve ser entregue ao Formador ao final da Oficina.

PARTE III

TEORIA E PRÁTICA 6

SESSÃO COLETIVA

Sessão Coletiva 1
Unidade 21

Esta Sessão envolve uma discussão da Unidade 21 e prepara para a Unidade 22.

A Unidade 21 do Caderno de Teoria e Prática 6 centrou-se na questão de frações numéricas e frações algébricas, fazendo uma analogia entre elas.

A duração prevista para esta Sessão é de aproximadamente quatro horas, incluindo um intervalo de dez minutos e uma reserva técnica de dez minutos. Ela deve se desenvolver em três grandes momentos, conforme apresentados a seguir.

1º Momento (80 minutos)

Na Unidade 20, ao final da Seção 3, de Transposição Didática, na parte de Socializando o seu conhecimento e experiências em sala de aula, foi proposto que o professor desenvolvesse junto aos alunos a situação-problema da determinação do comprimento de um lago ou uma atividade prática de construção de quadriláteros com lados iguais, com registro e sistematização de produções de alguns alunos. Nesta parte da Sessão Coletiva, cada professor deve ter a oportunidade de socializar no grupo o relato e os produtos obtidos na experiência realizada.

Devem ser sorteados ou convidados alguns cursistas para começarem os relatos, de preferência cursistas que tenham aplicado situações-problema distintas.

Em cada caso, o cursista apresentador deve:

a) Dizer ou ler o que desenvolveu em sala de aula – se foi a situação-problema ou a atividade de manipulação de canudos.

b) Contar com detalhes o trabalho desenvolvido, informando ainda:
- se contatou outro professor de Matemática da escola ou algum professor de outra disciplina, para a realização da tarefa;
- se os alunos foram capazes de fazer sozinhos os cálculos corretos, se necessitaram de ajuda e quais problemas ou surpresas apareceram;
- se os alunos trabalharam em grupos;
- se foi o professor que dividiu as tarefas ou se foram os próprios alunos;
- quantas aulas foram necessárias para desenvolver o projeto;
- se houve entusiasmo e envolvimento dos alunos;
- dificuldades encontradas.

c) Apresentar a produção dos alunos.

FORMADOR, RECOLHA DOS CURSISTAS O MATERIAL QUE ELES TROUXERAM, INCLUSIVE DEZ LINHAS SOBRE A IMPORTÂNCIA DA ATIVIDADE PARA A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA DE SEUS ALUNOS, COM COMENTÁRIOS. ISSO É UM ELEMENTO QUE SERVIRÁ PARA A AVALIAÇÃO DOS CURSISTAS.

2º Momento (110 minutos)

Parte A – Discussão sobre a Unidade, levantamento de dúvidas e esclarecimentos

O Formador deve discutir com os cursistas sobre o fato de, em geral, os alunos terem pouca base a respeito de frações, e que esse conhecimento será necessário para a aprendizagem da Álgebra. Em vista disso, deve motivar os cursistas para a importância de ser feito um trabalho bom com frações na 5ª série e de serem resgatados conhecimentos sobre elas ao longo das séries seguintes.

Entretanto, é preciso lembrar que não basta a recordação das regras das operações entre frações. Em geral, elas não têm significado nem são compreensíveis pelos alunos, que, por isso mesmo, as esquecem.

Formador, procure saber se os alunos compreenderam, na Unidade 21, a lógica dos seguintes aspectos:

- a questão de se usar o mínimo múltiplo comum na soma de frações ou de se usar apenas um múltiplo comum;
- o fato de, multiplicando-se o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, ela não se alterar. Faça-os explicarem por que isso leva a uma fração equivalente;
- a analogia entre soma de frações numéricas e de frações algébricas;
- os esquemas, verbalizações e situações-problema adequadas para o trabalho com frações.

Parte B – Este momento é destinado à realização de uma atividade prática

Os cursistas deverão trabalhar em duplas, fazendo dois tipos de atividades:

a) Um deles propõe ao outro um produto notável para ser resolvido mentalmente pelo colega. Deve ser o quadrado de uma soma ou de uma subtração, em que os quadrados dos termos não sejam difíceis. Por exemplo:
$(20 -1)^2$
$(20 - 2)^2$
$(100 - 5)^2$
$(12 + 5)^2$
Depois é o outro que deve propor um produto ao primeiro, variando a expressão.

a) Formador, distribua uma das seguintes atividades para cada dupla de cursistas. Eles deverão resolvê-la em conjunto, aplicando o método da inversão. Se houver tempo, faça com que apresentem ou discutam os resultados ao final.

Atividades

Resolver, usando o método da inversão[7]:

Atividade 1

Um homem solicitou um milagre a Santo Antônio: "Se ele fizer dobrar o dinheiro que tenho no bolso, darei R$30,00 para obras de caridade". O milagre aconteceu, e o homem pagou a promessa. Achou tão bom que pediu o mesmo milagre a São João, sendo novamente atendido, e, novamente, cumpriu a promessa de dar R$30,00 para caridade. Então, pediu o mesmo milagre a São Pedro, sendo mais uma vez atendido. Mas, ao pagar a sua promessa, percebeu, surpreso, que ficara sem dinheiro algum! Quanto ele tinha de dinheiro no começo da história?

Atividade 2

Diga-me, formosa jovem de olhos radiantes, se você entende o método da inversão, qual é o número que multiplicado por 4, aumentado em 3/4 desse total, dividido por 7, diminuído por 1/2 do quociente, multiplicado por 10, diminuído em 11, extraindo-se a raiz quadrada, somando 7 e dividindo por 10, dá 1 como resultado?

Atividade 3

Descubra quantos anos viveu Antonio Matemático, em cujo túmulo foi gravado:

"Neste túmulo repousa Antonio Matemático.
Através da arte dos números a pedra nos ensina sua idade.
Viveu um sexto de sua vida como criança;
E mais um doze avos como adolescente;
E após isso um nono da sua existência transcorreu até que
contraísse matrimônio;
E mais dois anos até que surgisse dessa união um filho,
que partiu para outro país, quando atingiu a metade dos anos que seu
pai viveria.
Após isso, oito anos viveu o pai saudoso;
Quando então também ele chegou ao fim último terrestre."

7. Adaptado de SAMPAIO, F.A. *Matemágica – História, Aplicações e Jogos Matemáticos*. São Paulo: Papirus, 2005. 98 p.

3º Momento (110 minutos)

Conversando sobre a próxima unidade

O tema central da Unidade 22 serão as migrações entre países diferentes ou em um mesmo país. Um estudo sobre os movimentos migratórios no mundo e no Brasil pode contribuir em muito com contextos significativos para questões de localização espacial, possibilitando uma análise mais "geométrica" do fenômeno, abordando noções de posição, localização de figuras, deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas.

Na introdução da unidade, você encontrará o texto:

É importante que estes conteúdos possam contribuir com o aluno no desenvolvimento de uma forma de compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Um dos objetivos do trabalho com a noção de espaço no Ensino Fundamental é o desenvolvimento do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que instrumentalizem o aluno a resolver situações-problema de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo nas noções de direção e sentido, de ângulo (como mudança de direção), de paralelismo e de perpendicularismo, elementos fundamentais para a constituição de sistemas de coordenadas cartesianas.

Ao explorar aspectos de representação do espaço geográfico, aparece também a noção de proporcionalidade.

A situação-problema da unidade é sobre uma família que quer migrar de sua terra natal – Teresina, no Piauí – para São Paulo, e desdobra-se em uma série de atividades, envolvendo cálculo da distância entre estas duas cidades, reconhecimento de escala utilizada em mapa, identificação e traçado de caminhos.

Atividade 4

Pegue um mapa de sua região ou de sua cidade.

a) Qual a escala do mapa? O que ela significa?
b) Coloque o mapa dentro de um retângulo. Qual o comprimento e a largura da região real que foi representada dentro do retângulo?

Se você tiver alguma dificuldade, saiba que na próxima unidade aprenderá mais sobre essas noções. Na seção 3, de Transposição Didática, vocês vão explorar o sistema de coordenadas cartesianas, posição e deslocamento no plano, construções com régua e compasso, múltiplos e divisores. Também serão retomadas as noções de currículo em rede, campos conceituais e conhecimento em ação, presentes em diferentes situações de aprendizagem.

Sessão Coletiva 2
Unidade 23

Material Necessário

Para esta Sessão, você necessitará do material das balanças: quatro pratos, caixas vazias de filmes ou outra caixa pequena, caixas vazias de fósforos, quadradinhos brancos e pretos. Prepare um conjunto de materiais para cada dupla de cursistas.

Esta Sessão envolve uma discussão da Unidade 23 e prepara para a Unidade 24.

A Unidade 23 do Caderno de Teoria e Prática 6 centrou-se na questão de sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas e inequações do 1º grau. Foi feita também uma introdução a sistemas lineares de três equações e com três incógnitas. A Unidade propiciou a exploração de situações envolvendo questões agrárias e de nutrição.

A duração prevista para esta Sessão é de aproximadamente quatro horas, incluindo aí um intervalo de dez minutos e uma reserva técnica de dez minutos. Ela deve se desenvolver em três grandes momentos, conforme apresentados a seguir.

1º Momento (80 minutos)

Na Unidade 22, ao final da Seção 3, de Transposição Didática, na parte de Socializando o seu conhecimento e experiências em sala de aula, foi proposto que o professor escolhesse uma situação-problema e a desenvolvesse em sala de aula, com registro e sistematização de produções de alguns alunos. Nesta parte da Sessão Coletiva, cada professor deve ter a oportunidade de socializar no grupo o relato e os produtos obtidos na experiência realizada.

Devem ser sorteados ou convidados alguns cursistas para começarem os relatos, de preferência que tenham aplicado situações-problema distintas.

Em cada caso, o cursista apresentador deve:

a) dizer ou ler, com todo o cuidado, qual das situações-problema ele desenvolveu em sala de aula;

b) responder às questões apresentadas abaixo ou outras formuladas pelos colegas;

c) apresentar os materiais produzidos pelos alunos, com relação à tarefa proposta no Socializando anterior.

Situação-problema

O cursista apresentador deve contar como foi, se houve interação com o professor de Geografia ou de Artes. Deve esclarecer os seguintes pontos:

- se os alunos foram capazes de fazer sozinhos os cálculos corretos, se necessitaram de ajuda e quais problemas ou surpresas apareceram;
- se os alunos trabalharam em grupos, dividindo, eles próprios, as tarefas;
- quantas aulas foram necessárias para desenvolver o projeto;
- se houve entusiasmo e envolvimento dos alunos.

Formador, recolha dos cursistas o material que eles trouxeram, incluindo até mesmo dez linhas sobre a importância, para a aprendizagem matemática de seus alunos, desta atividade desenvolvida; com comentários. Isto é um elemento que servirá para a avaliação dos cursistas.

2º Momento (110 minutos)

Este momento é destinado à realização de uma atividade prática.

Atividade com balanças
Divida os professores cursistas em duplas e dê a cada dupla um conjunto de materiais, conforme descrito no início. Um dos cursistas deve propor ao colega um sistema linear de duas equações com duas incógnitas para ser resolvido na balança. Ao final, deverá ser resolvido o sistema e verificado se a solução da balança está correta.

Se houver tempo, devem ser invertidos os papéis de quem propõe e de quem resolve o sistema.

3º Momento (30 minutos)

Conversando sobre a próxima unidade

Certamente, você conhece os conceitos de proporcionalidade direta e inversa entre grandezas, e já resolveu muitos problemas relacionados a eles.

Pense no seguinte: se duas grandezas que representaremos por x e y são diretamente proporcionais, e se são valores correspondentes da outra, que igualdade matemática você pode escrever envolvendo esses valores?

E que relação matemática você pode escrever envolvendo os valores genéricos x e y?

Essa relação é expressão de uma função? Como é o nome dessa função?

Agora pense em duas grandezas x e y que são inversamente proporcionais, e faça o mesmo, isto é, se x1 , x2 , x3 são valores de uma e y1 , y2 , y3 são valores correspondentes da outra, que igualdade matemática você pode escrever envolvendo esses valores?

E que relação matemática você pode escrever envolvendo os valores genéricos x e y, neste caso?

Essa relação é expressão de uma função? Como é o nome dessa função?

A Unidade 24 tratará dessa temática, fazendo um aprofundamento das noções de proporcionalidade direta e inversa, relacionando-as a determinados tipos de funções e seus gráficos cartesianos.

Como são conceitos que aparecem em abundância no contexto físico e social, é importante que o professor compreenda-os em sua forma geral e tenha idéias sobre como desenvolvê-los com seus alunos.

Prepare-se, portanto, para uma leitura interessante da Unidade 24!